



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

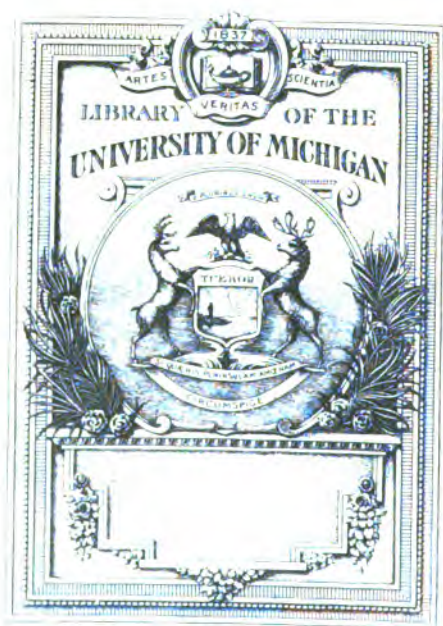
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

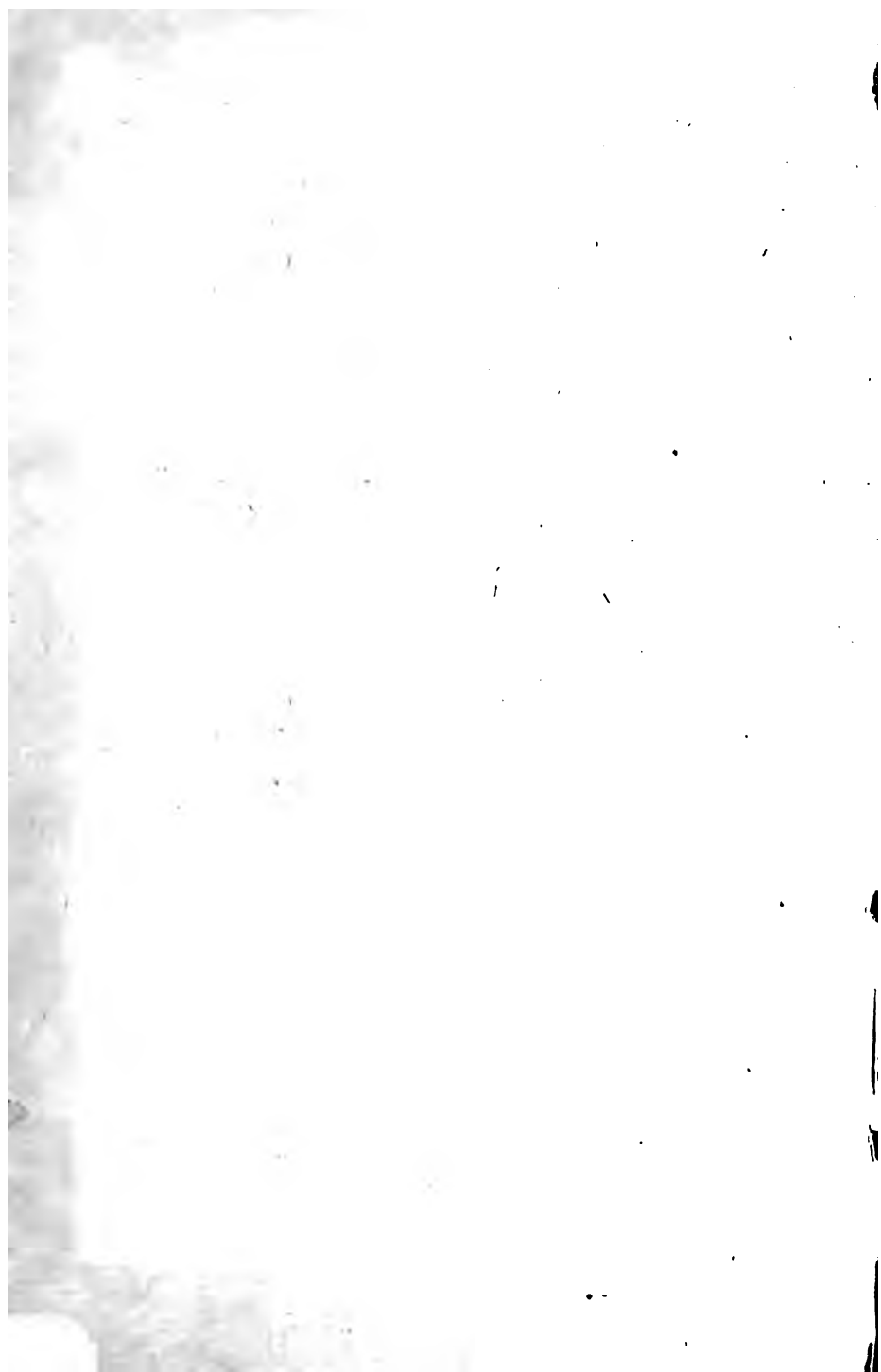
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



QA
35
.P222

**NON
CIRCULATING**



PRINCIPES
DU CALCUL
ET
DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
PARTIE MATHÉMATIQUE
DE LA
THÉORIE DES ÊTRES SENSIBLES.



PRINCIPES
DU CALCUL

ET

DE LA GÉOMÉTRIE,

OU

COURS COMPLET

DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES,

MISES A LA PORTÉE DE TOUT LE MONDE:

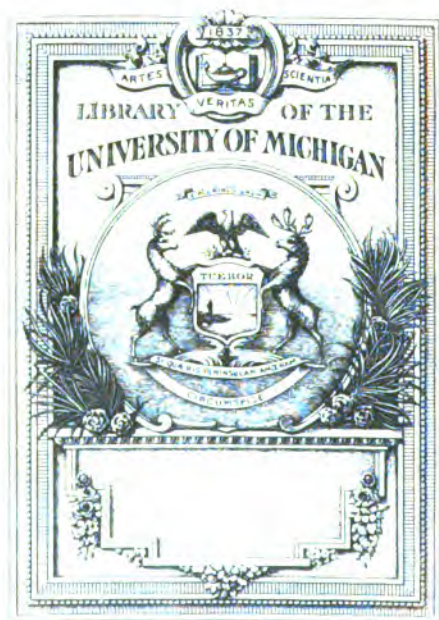
*Ouvrage en grande partie composé, & en
petite partie extrait des Auteurs les plus
intelligibles,*

Par M. l'Abbé, ^{françois} PARA DU PHANJAS:



A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, pere,
Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie,
à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LXXIIL



QA
35
.P222

**NON
CIRCULATING**

sur presque toutes nos connoissances, même sur celles qui paroissent en être les plus indépendantes : elles servent à distinguer les vraies d'avec les fausses ; à convaincre l'esprit des vérités déjà connues ; & à lui en découvrir une infinité de nouvelles. *Dans la Physique*, la théorie du Mouvement, la Mécanique, la Météorologie, l'Hydrostatique, l'Optique, la Catoptrique, la Dioptrique, l'Astronomie géométrique & physique, sont nécessairement liées aux Mathématiques ; de qui elles empruntent presque tout ce qu'elles ont de précision, d'étendue, de certitude & de lumière. *Dans la vie Civile*, la science des rapports, les spéculations bien concertées, les calculs prompts & rapides, la théorie des généralités & des détails, en montrent en une infinité de circonstances, l'usage & l'utilité. *Dans la Littérature*, le brillant combiné avec le solide, la méthode déployant lumineusement la richesse, l'énergie s'unissant avec la justesse & avec la clarté, en font par-tout sentir l'heureuse influence.

Rectifier & perfectionner l'Esprit ; l'accoutumer à chercher & à saisir le Vrai ; l'exercer à descendre d'un principe connu aux conséquences éloignées qui en découlent ; ou à remonter des conséquences éloignées au principe connu, dans lequel en dernière analyse elles vont se résoudre : tel est le fruit des Mathématiques ; fruit plus précieux peut-être, que les connois-

lances mêmes dont les Mathématiques nous enrichissent.

Si le genre mathématique est le plus riche & le plus digne théâtre de l'esprit humain, il faut avouer aussi, à la gloire de l'esprit humain, qu'il n'y a point de théâtre où il se soit déployé avec autant de grandeur & de succès. Dans tous les autres genres, il doit être humilié de voir presque par-tout ses lumières infiniment bornées, & trop souvent incertaines & mal assurées. Dans le genre mathématique, il doit être moins surpris de sentir qu'il lui manque quelques connoissances, que flatté & ravi de se voir enrichi de toutes les connoissances nécessaires, & d'un assez grand nombre qu'il pourroit regarder comme simplement utiles, ou même comme superflues.

Une foule de beaux Génies se sont occupés successivement; depuis Euclide jusqu'à nos jours, à enrichir le Public des découvertes du génie en ce genre; les uns dans des Cours complets, les autres dans des Cours élémentaires, dont plusieurs feront l'admiration de la Postérité, comme ils font celle de notre Siècle. Mais en réfléchissant sur la nature de ces Ouvrages estimables, auxquels nous devons tout ce que nous pouvons avoir de lumières en ce genre, il nous a paru qu'il n'y en a aucun, du moins parmi ceux qui nous sont tombés entre les mains, qui mette les Mathématiques à la portée de tout le monde; qui les dépouille

Diversi Oub-
vrages de Ma-
thématique.

de ce qu'elles peuvent avoir de peu utile & de trop scientifique; qui leur donne le degré d'intelligibilité & d'intérêt dont elles sont susceptibles; qui les adapte suffisamment aux connoissances d'utilité ou d'agrément, relatives à la Physique & à la vie Civile.

Les uns, *trop diffus*, me font perdre de vue le terme principal où ils doivent me conduire, en détournant mon attention sur une foule d'objets minutieux, de problèmes ou de corollaires de pure curiosité, dont je puis me passer; & qu'on devroit ne me montrer que quand j'aurai déjà parcouru la petite sphere des connoissances essentielles, toujours suffisante pour remplir toute l'attention d'un Commencant.

Les autres, *trop concis*, me fatiguent & me rebutent, par les efforts qu'il me faut faire à chaque instant pour les entendre: ils me supposent ou trop d'intelligence ou trop de connoissances; & ils m'indisposent contre une Science qui est susceptible d'agrément & d'intérêt, quand on la présente avec méthode & avec lumiere.

Quelques-uns, *mal conçus & mal digérés*, me menent de vérité en vérité, sans me montrer auparavant ni le terme où ils doivent me conduire, ni la route qui doit me conduire à ce terme. C'est comme un grand labyrinthe, où tous mes pas isolés sont éclairés de la plus vive lumiere; mais où je ne puis suivre & retenir la

route trop sinueuse, qui me conduit d'un terme à un autre.

Quelques autres, *plus théoriques que pratiques*, me conduisent assez simplement & assez rapidement, toujours par des sentiers de lumière, des plus simples connoissances aux connoissances les plus relevées ; mais sans me faire assez connoître quelle utilité je puis retirer & quelle application avantageuse je puis faire des lumières que j'acquiers. En m'enrichissant de mille & mille connoissances abstraites, ils me laissent ignorer comment il faut s'y prendre dans la pratique, pour mesurer la surface d'un jardin, ou pour toiser un mur qu'on y fait réparer, ou pour trouver la distance de tel point de ce jardin au sommet d'un colombier voisin. Tels sont les principaux défauts que nous avons tâché d'éviter dans cet Ouvrage.

Le vrai moyen de rendre intéressantes les Mathématiques, c'est de faire connoître & sentir leur rapport avec l'étude de la Physique & avec les utiles connoissances qui découlent des différentes branches de la Physique. Il y a un rapport essentiel entre les Sciences physiques & les Sciences mathématiques : celles-ci doivent être le flambeau de celles-là ; & celles-là doivent montrer l'usage & l'utilité de celles-ci. Un Ouvrage de Mathématiques, borné aux mathématiques pures, *n'intéresse pas assez* : parce qu'on ne voit pas suffisamment à quoi peuvent aboutir les brillantes connoissances

qu'on y acquiert. Un Ouvrage sur la Physique, séparé des lumières mathématiques, *n'éclaire pas assez* : parce qu'il donne des connoissances dont souvent il suppose le fondement ; & que tout le monde ne connoît pas ce fondement, qu'il faudroit quelquefois aller chercher dans une foule d'ouvrages étrangers. Par exemple, dans tel ouvrage de Mathématiques, on me dit que la proposition qu'on me démontre, peut me conduire à mesurer la distance de la Terre au Soleil, quand je serai au fait des connoissances astronomiques ; mais ne sachant en quoi consistent ces connoissances, je me borne à croire aveuglément & sans grande satisfaction, ce qu'on me promet. Dans tel ouvrage sur la Physique, on me dit dans un endroit, que tel point est incontestable ; parce que c'est une dépendance d'une démonstration géométrique, que je ne connois pas & que je ne sais où aller chercher : on me dit dans un autre endroit, qu'étant donné un triangle parallaxique qu'on me fait connoître, & dont on connoît les trois angles & un côté, il est facile de trouver la distance de l'astre auquel aboutit ce triangle ; parce que selon certaine démonstration géométrique que j'ignore, les côtés de ce triangle sont entre eux comme les sinus, que je ne connois peut-être pas, ou que je n'ai pas sous les yeux.

C'est d'après ces observations, qu'un Cours de Physique & de Mathématiques, qui ne se

roit qu'un seul & même Tout, où la partie Physique seroit rapportée à la partie Mathématique, & la partie Mathématique à la partie Physique, nous a paru un Ouvrage encore à faire ; & c'est celui que nous donnons au Public. Nous ne ferons mention ici que de la partie Mathématique, que renferme ce volume.

Un Cours de Mathématiques, assez intelligible pour être à la portée des Commencans qui veulent s'instruire par eux-mêmes & sans le secours d'un Maître, assez étendu pour leur donner toutes les lumières dont on a communément besoin & dans l'étude de la Physique & dans l'usage de la vie Civile, assez concis pour ne pas les effrayer par la volumineuse prolixité des matieres, assez bien conduit pour leur présenter lumineusement toutes les connoissances utiles, en laissant à l'écart une foule de connoissances superflues qui ne servent qu'à rebuter & à fatiguer l'esprit en pure perte, seroit un Ouvrage qui auroit encore le mérite de la nouveauté. Telle est l'idée que nous avons conçue, & que nous avons tâché de remplir. Assez d'autres ont montré combien on pouvoit savoir en fait de Mathématiques : nous voulons montrer combien peu il est nécessaire de savoir en ce genre, pour en savoir assez. Si ce que cette science a de plus profond, peut conduire à quelques connoissances rares & curieuses ; ce qu'elle a de plus simple, suffit

pour nous mener à presque toutes les connoissances nécessaires & utiles.

Le fameux Sage de la Grece, l'immortel Socrate, sembla improuver une trop grande curiosité à pénétrer les mysteres des Mathématiques. « Quand on sait, dit-il, assez de » Géométrie pour mesurer son champ, assez » d'Astronomie pour connoître les heures & » les tems, pour se conduire dans les voyages » de terre & de mer, on ne doit pas affecter » un savoir plus profond ». Persuadé que la premiere étude de l'Homme est la Morale, qui tend à le rendre & plus vertueux & plus heureux, Socrate vouloit que le Sage fût éclairé, & non absorbé, par l'étude des Mathématiques. Mais en blâmant peut-être avec trop de sévérité un excès de goût & de penchant pour ces sortes de Sciences, Socrate exige ou approuve dans le Sage, du moins la connoissance de tout ce qu'on nomme Mathématiques élémentaires : puisqu'il lui faut au moins tout cela, pour être en état de mesurer son champ avec quelque lumiere, de connoître les tems avec quelque précision, de se conduire par lui-même & sans guide sur terre & sur mer. Plus occupé de l'homme moral & social que de l'homme calculateur & géometre, Socrate semble décider & déterminer ici quel degré de lumiere, en genre de Mathématiques, convient à l'homme du monde, à l'homme d'état, à l'homme littérateur, à l'homme militaire, à l'homme

naturaliste, en un mot, à l'homme éclairé qui n'est point Mathématicien de profession ; & tel est le fond de lumieres mathématiques, que renferme cet Ouvrage.

Les propositions mathématiques peuvent se démontrer en deux manieres, par voie de Synthèse, ou par voie d'Analyse ; à la façon d'Euclide, ou à la façon de Descartes. Quand on démontre *par voie de Synthèse*, on conçoit des figures, on en examine la formation & la décomposition ; & de-là on en déduit les propriétés. Quand on démontre *par voie d'Analyse*, on emploie certaines formules de calcul, qui supposent les figures toutes formées, qui en représentent algébriquement la formation ou la décomposition, & d'où naissent des résultats qui en expriment les propriétés. La premiere méthode, qui est celle d'Euclide (*) &

(*) Euclide le Géometre florissoit à Alexandrie sous le premier Ptolémée, environ 300 ans avant l'ere chrétienne. Il ramassa & rédigea en corps d'ouvrage, toutes les vérités élémentaires de la Géométrie & du Calcul, découvertes avant lui ; & c'est à cet ouvrage qu'Euclide doit principalement sa célébrité. Ces Elémens d'Euclide (divisés en treize livres, auxquels Hypsiclès d'Alexandrie en ajouta dans la suite un quatorzième & un quinzième assez peu nécessaires), sont peut-être la plus forte chaîne de vérités qui ait été jamais ourdie ou formée par l'esprit humain. Mais il faut avouer aussi que cette admirable chaîne, où l'ordre & la marche naturelle des idées semblent totalement renversés, où du composé on va au simple, où la théorie des Surfaces, par exemple, mène à celle des Lignes, où tout paroît formé de matériaux qui semblent être violemment assortis & fondus ensemble, est quelque chose de bien enaiveux & de bien rebutant pour l'Esprit hu-

de tous les anciens Géomètres, & qui est aussi celle que recommandent les Wolfe, les Newton, la plupart des plus grands Géomètres de ces derniers tems, mene toujours à la connoissance de la Vérité par des sentiers de lumiere : elle est plus propre à donner de la justesse & de la solidité à l'esprit. La seconde méthode, qui est celle de Descartes & d'un très-grand nombre de Mathématiciens modernes, mene au même but par des routes plus courtes, mais toujours un peu ténébreuses dans le fond, & moins propres à perfectionner l'esprit. La *Méthode synthétique* est celle que nous emploierons communément, sans exclure la *Méthode analytique* qu'il est à propos & souvent très-

main. Ce vice, si c'en est un, fut senti par le Roi Ptolémée lui-même, le protecteur & l'ami d'Euclide, auquel il demanda s'il n'y auroit pas quelque route plus facile pour arriver aux Mathématiques. Non, Sire, répondit fierement le Géometre : les Mathématiques n'ont pas un chemin fait exprès pour les Rois. *Non est regia ad Mathesim via.*

Cette décision d'Euclide, décision applaudie & adoptée par quelques-uns des plus grands Géomètres de ces derniers siècles, n'a point empêché un assez grand nombre d'autres Géomètres non moins profonds & non moins célèbres, de prendre une marche différente de celle d'Euclide ; de tendre & d'arriver au même terme, par une route plus simple & moins scabreuse. D'ailleurs, parmi les treize ou quinze livres de l'ancien Géometre, il y en a plusieurs qu'on regarde aujourd'hui comme inutiles ; savoir, ceux dont l'objet principal est ou le Calcul, qui a totalement changé de face depuis Euclide ; ou la théorie des Incommensurables & des Corps réguliers, à laquelle personne ne s'intéresse plus : ces livres, réputés inutiles, sont le septieme, le huitieme, le neuvieme, le dixieme, & le treizieme,

utile de ne pas ignorer. L'un des plus grands Calculateurs, le fameux Newton, s'est souvent repenti, au rapport de Pemberton son commentateur, d'avoir passé trop tôt à la Géométrie de Descartes & à la lecture des traités analytiques des Modernes, lorsqu'il commençoit à étudier les Mathématiques. Il sentoit que la méthode synthétique est infiniment plus propre à éclairer & à satisfaire l'esprit, que la méthode analytique ; & c'est sans doute pour cette raison, dit M. l'Abbé Deidier (*), que quoiqu'il eût composé beaucoup d'ouvrages algébriques qui ont extrêmement enrichi nos Méthodes, avant de travailler à ses *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* ; il n'a cependant employé dans celui-ci, que la méthode des Anciens.

Les Elémens de Mathématiques que nous donnons au Public, renferment neuf traités, quatre sur le Calcul, & cinq sur la Géométrie. On trouvera dans ces neuf traités, tout ce que les Mathématiques élémentaires contiennent

(*) Dans la Préface de l'Ouvrage qui a pour titre : *Elémens généraux des principales parties des Mathématiques, nécessaires à l'Artillerie & au Génie* ; ouvrage primitivement imprimé avec peu de correction & sans goût, mais excellent pour le fond des choses, & le meilleur peut-être, le plus riche & le plus intelligible du moins, qui ait encore été fait en ce genre, pour les Elèves de cette intéressante classe de Militaires, dont les opérations, dans le système présent des Armes, décident principalement du sort des sièges & des batailles, & par-là même, des États.

d'intéressant & d'utile, avec la maniere de faire usage des connoissances qu'elles donnent. Par le moyen de la Méthode & de la Lumiere que nous avons données à toutes les parties de cet Ouvrage, tout Esprit mûr & solide pourra se mettre au fait, seul & sans Maître, en moins de trois mois d'une étude modérée, de tout ce qu'il renferme. Si nous avions à diriger sa marche dans cette carrière, nous lui conseillerions de commencer par se mettre bien au fait de l'Arithmétique ; d'en bien saisir les regles, les démonstrations, les opérations, en se donnant lui-même des exemples, la plume à la main, sur chaque regle & sur chaque objet : de passer de là au traité des Proportions, & de le bien concevoir, jusqu'à l'article des Fractions exclusivement : de passer ensuite de-là à la Longimétrie, qui ne suppose qu'une simple connoissance de l'Arithmétique & de la Regle de Trois. Après quoi, commençant à voir & à sentir l'utilité des Mathématiques, il pourra indifféremment ou passer à la Planimétrie, ou revenir sur ses pas pour s'occuper des autres parties du Calcul dont il aura besoin dans la suite, soit pour la Géométrie, soit pour la Physique, soit pour différens usages de la vie civile.

La Trigonométrie, qui dans la plupart des Auteurs est très-compiquée & très-difficile, se trouve si simplifiée dans cet Ouvrage, qu'elle ne renferme qu'un seul théorème qui soit un peu difficile à saisir : tout le reste n'est qu'une

simple application de ce théorème. On trouvera dans ce Traité une *Méthode pour transformer les Tables ordinaires des Sinus, en Tables des Sinus des Secondes*; méthode dont on sentira l'utilité, & dont nous ne devons l'idée à personne.

Pour résoudre les triangles par la Trigonométrie, on a toujours nécessairement besoin d'une *Table des Sinus*; & c'est ce qui nous a déterminé à la placer à la fin de ce Volume. On aura par-là, en un seul & même ouvrage, tout ce dont on a besoin dans l'étude de la Physique & des Mathématiques. Les Géomètres & les Astronomes de profession, qui font habituellement de grands calculs trigonométriques, ont des tables des Sinus jointes à des tables des Logarithmes, qui leur facilitent ces calculs : mais les Personnes qui ne font pas fréquemment des calculs, & qui veulent cependant quelquefois se donner la satisfaction de résoudre un triangle par la méthode trigonométrique, seront bien aise d'avoir ici une Table des Sinus qui leur procure la facilité de résoudre ce triangle par un calcul qui leur coûte un quart-d'heure de plus, les dispensera de se procurer des Tables des Logarithmes, & de la peine d'apprendre à s'en servir. Ces Tables des Sinus leur donneront aussi toutes les tangentes & toutes les sécantes dont elles pourroient quelquefois avoir besoin, avec la même précision qu'elles ont dans les tables où elles

se trouvent le plus exactement calculées.

Dans l'étude des Mathématiques, on observera que tout l'art de cette Science consiste à faire connoître ou trouver des grandeurs inconnues, par leur rapport avec des grandeurs connues : ainsi cette science est principalement la *Science des rapports*. On observera aussi que les démonstrations mathématiques ont communément la plus grande généralité possible : il faut donc que l'esprit s'accoutume & s'habitue, en considérant une figure géométrique sur le papier, à la transporter par la pensée hors du papier, sur la surface de la terre, ou dans l'immensité des Cieux, où elle doit conserver toujours les propriétés qu'on y démontre. « Le conseil le plus important que l'on puisse » donner à ceux qui étudient les Mathématiques, dit M. de la Lande dans la Préface » de son excellent Ouvrage sur l'Astronomie, » c'est d'exercer leur imagination beaucoup » plus que leur mémoire ; c'est de lire peu & » de penser beaucoup ; de chercher par eux-mêmes les démonstrations, ou du moins d'employer leurs forces le plus souvent qu'ils pourront. C'est ainsi qu'on acquiert l'esprit des Mathématiques, le goût de recherches, la facilité de découvrir & d'inventer. Il faut en tirer des corollaires, en faire des applications ; & ne chercher dans le Livre, s'il est possible, que la confirmation de ce qu'on aura trouvé ».

L'unique but que nous nous sommes proposé dans cet Ouvrage, c'est de rendre plus simple, plus intelligible, moins épineuse & plus intéressante la science des Mathématiques. Pour parvenir à cette fin, nous avons lu & médité un assez grand nombre d'ouvrages en ce genre; & nous avons profité de ce que nous y avons trouvé de plus simple & de plus lumineux, pour en enrichir l'ouvrage dont nous avons conçu l'idée. Ainsi dans cet Ouvrage, la méthode, le cadre, le choix sont de nous: le remplissage sera en grande partie de nous, & en petite partie des Auteurs les plus clairs & les plus intelligibles en genre de Mathématiques. Nous avons emprunté quelquefois de ces Auteurs, quelques-unes des propositions fondamentales, que nous avons éclaircies, quand elles avoient besoin d'éclaircissement; qu'il importe peu de démontrer différemment, quand elles sont clairement & solidement démontrées.

Nous conçûmes il y a sept ou huit ans l'idée & le plan de ce Cours de Mathématiques élémentaires: nous l'exécûmes alors en partie, & nous en fîmes imprimer à Besançon un Essai, pour l'usage uniquement d'une nombreuse Jeunesse que nous y formions, par religion & par état, à la Physique & aux Mathématiques. Cette idée, ce plan, se sont successivement étendus & perfectionnés pendant les trois à quatre ans que nous avons employés à

composer notre Cours de Physique, auquel nous avons assorti ce Volume de Mathématiques qui en fait comme partie, quoiqu'il forme lui-même un Ouvrage à part ; & nous le livrons aujourd'hui au Public, après nous être efforcés de lui donner à loisir toute la perfection dont nous le croyons susceptible.

Il nous eût été possible, sans doute, de ne rien emprunter de personne dans ce Volume de Mathématiques : mais il nous auroit fallu pour cela, avec beaucoup de peine & d'ennui, & le tout pour ne pas faire mieux, renoncer à profiter de notre premier travail, qui n'étoit guere alors qu'un excellent Extrait de tout ce qu'il y avoit de plus clair & de plus intelligible dans les meilleurs Auteurs, assorti & lié au plan méthodique & lumineux que nous nous étions tracé. Nous avons donc mieux aimé renoncer en partie, dans ce Volume, au titre d'Auteur ; & conserver une partie de cet ancien Extrait dans ce Cours de Mathématiques, qui sera peut-être quelque chose d'infiniment moins qu'un Ouvrage en tout nouveau, créé par le génie ; qui est certainement quelque chose d'infiniment mieux qu'une simple compilation, à laquelle il ne ressemble en rien. Le compilateur assemble & transcrit, souvent sans méthode & sans goût ; toujours sans tirer de lui-même un fonds de lumières nouvelles ; sans s'attacher à créer dans les choses qu'il emprunte d'autrui, un nouveau jour,

jour, un nouveau goût, une nouvelle perfection, une nouvelle manière d'être, qui les lui rende en quelque sorte propres ; ou s'il fait autrement, il cesse d'être compilateur.

Nous espérons que le frontispice & la préface de ce Volume, nous mettront à couvert du reproche de plagiat ; vice qui consiste, non à profiter des découvertes & des lumières d'autrui, à l'exemple d'Euclide & de tant d'autres grands hommes, mais à se les approprier furtivement & sans en prévenir le Public. Nous avertissons donc ici authentiquement le Public, qu'il trouvera dans ce Volume, quelques théorèmes & quelques problèmes, qui ne sont point ou qui ne sont qu'en partie de notre composition. Qu'un habile Architecte, dirigé par le génie & par le goût, forme le plan d'un nouvel édifice utile au Public ! Si ce plan est bien conçu & bien exécuté, lui fera-t-on un crime d'y avoir heureusement adapté quelques colonnes, quelques statues, quelques pierres artistement taillées, qui avoient servi antérieurement à certains édifices admirés ? Nous avouons hardiment que nous serions très-flattés d'être un tel Architecte.

Un Cours complet de Mathématiques élémentaires, tel que celui dont nous avons tracé l'idée, tel que la méthode en enchaîne & que la lumière en éclaire puissamment toutes les parties, sera toujours un ouvrage dont l'exécution présentera au Génie de grandes diffi-

cultés à vaincre. Si nous n'osons nous flatter d'avoir rempli cet objet dans toute sa perfection, nous pouvons du moins nous rendre la justice de n'avoir rien négligé pour en approcher. Notre unique vue, en travaillant à cet Ouvrage, a été en premier lieu, de faciliter & d'aplanir l'étude des Mathématiques; en second lieu, de nous rendre utiles aux Amateurs de la Physique, pour qui nous avons spécialement travaillé, en leur présentant sous un point de vue simple & resserré, méthodique & lumineux, tous les principes mathématiques qui ont un rapport plus ou moins prochain avec cette Science; & en nous efforçant de leur rendre plus intelligible & plus sensible, ce qui ne l'est pas assez dans une foule d'Auteurs, qui souvent semblent n'écrire que pour des Savans comme eux.

Nous nous bornons dans ce Volume, qui fait comme partie de notre Cours de Physique, mais qui en est lui-même indépendant, à ouvrir ou à montrer au Génie l'immense carrière des Mathématiques. Le Génie, excité & mis en jeu, saura trouver en lui-même, des ressources pour la parcourir & peut-être pour l'étendre: semblable assez souvent au salpêtre inflammable que forma la Nature ou l'Art, une simple étincelle l'atteint & le met en action; & un embrasement soudain, qui surprend & étonne, en fait éclater l'énergie intérieure, auparavant liée & comme ensevelie.

Un tableau historique, qui mettroit sous les yeux & l'origine & les progrès des différentes branches des Mathématiques, termineroit heureusement cette Préface : mais il lui feroit perdre un mérite essentiel, celui de la brièveté. Les personnes, qui voudront se procurer des connoissances détaillées sur cet objet, trouveront amplement de quoi satisfaire leur goût, dans un Ouvrage plein de sagacité & d'érudition, dans l'excellente Histoire des Mathématiques par M. de Montucla ; histoire plus intéressante & plus utile que celle de toutes les sanglantes batailles & de toutes les désastreuses révolutions qui ont successivement effrayé & désolé la Terre : puisque telle-ci n'est que l'histoire des passions des Souverains & des malheurs des Peuples ; & que celle-là est l'histoire du Génie & des grandes lumières qui en sont émanées.



REMARQUES GÉNÉRALES.

Ce Volume de *Mathématiques* se vendra, ou conjointement avec le Cours de Physique dont il fait partie ; ou séparément sans ce Cours de Physique, parce qu'il peut en être détaché, formant lui seul un ouvrage à part.

Dans la *Théorie des Êtres sensibles*, la partie physique est dépendante de la partie mathématique : mais la partie mathématique, quoique relative & assortie à la partie physique, en est au fond indépendante. Ainsi ce Volume de *Mathématiques*, seul & isolé, est un ouvrage complet en son genre ; & il peut être détaché des quatre volumes qui forment le Cours de Physique.

On trouve chez le même Libraire à Paris, les *Éléments de Métaphysique*, ou la *Théorie des Êtres Insensibles*, du même Auteur. Cet Ouvrage, en un seul volume in-octavo, est divisé en sept Traités, qui ont pour objet :

I°. La *Métaphysique pure*, ou les notions les plus générales & les plus abstraites de toutes les Sciences.

II°. La *Certitude humaine*, où l'on fait voir que toutes nos connoissances dérivent ou du témoignage du Sentiment intime, ou du témoignage des Idées, ou du témoignage des Sens, ou du témoignage des Hommes revêtu de certaines conditions.

III°. La *Logique*, ou les règles de la Dialectique sur les perceptions, sur les jugemens, sur les raisonnemens.

IV°. L'*Existence & la Nature de Dieu*, c'est-à-dire, toutes les intéressantes questions qui ont trait à cet Être adorable.

V°. L'*Ame humaine*, envisagée dans sa spiritualité, dans son immortalité, dans sa liberté, dans ses facultés naturelles, dans son contraste avec l'Ame des Brutes.

VI°. La *Morale*, ou la théorie générale de la Religion & des Mœurs.

VII°. La *théorie métaphysique de la Matière*, où l'on traite de son Essence, de ses Accidens, de tout ce qui doit servir de préparatif & de prélude à un Cours de Physique.

Ces sept traités sont suivis de trois *Discours philosophiques* sur la Religion, dans lesquels les preuves fondamentales de spéculation & de fait, qui établissent la vérité & la divinité

de la Religion révélée, sont développées dans le genre oratoire. Le prix de ce volume de Métaphysique, est de 3 livres 10 sols en brochure, & de 4 livres 10 sols relié en veau.

III°. On fera peut-être surpris, au premier coup d'œil, que ces trois Ouvrages, le *Cours de Métaphysique*, le *Cours de Physique*, & le *Cours de Mathématiques*, soient chacun si peu volumineux, eu égard à l'immense quantité de matières qu'ils embrassent & qu'ils renferment. Mais la surprise & la prévention cesseront, quand on fera attention, comme nous l'avons déjà observé ailleurs, qu'on n'est communément long & diffus dans les Ouvrages d'esprit, que parce qu'on n'a pas eu ou le temps ou le talent de les faire courts; & qu'il est possible de tout abréger, quand on a su se mettre en état de tout voir. Les ouvrages concis & bien présentés sont toujours assez longs, pour les personnes qui ont de l'intelligence & de la pénétration; & il est fort inutile de les étendre & de les allonger, pour celles qui en manquent. L'ensemble de ces trois Ouvrages, renferme le Cours le plus complet & le plus méthodique de Philosophie, qu'on ait encore en aucune langue.

IV°. Le Cours de Physique, en quatre volumes in-octavo, est relatif au volume de Métaphysique & au volume de Mathématiques: parce qu'il n'y a point de Physique, comme on sait, sans quelques connoissances sur la Métaphysique & sur les Mathématiques. Ce Cours de Physique a aussi dans ses premiers traités, des rapports & des renvois aux traités suivans: ce qui signifie, non qu'il faut interrompre la lecture de ces premiers traités, pour passer à celle des numéros indiqués; mais simplement, que ce qu'on lit dans ces premiers traités, a un rapport avec d'autres branches de la Physique, dont on verra l'explication & la démonstration en tems & lieu. Il en est de même du volume de Mathématiques.

Dans ce Volume de Mathématiques, ainsi que dans les quatre volumes de la Physique, on a quelquefois dessiné & gravé les Figures, non selon les règles du Dessin & de la Gravure; mais selon l'exigence de la chose à expliquer ou à démontrer, & de la manière qui a paru la plus propre à fixer à la fois & l'œil & l'imagination & l'esprit sur le point fondamental qui doit occuper l'attention & la sagacité d'un Commençant.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIERES,

Qui fait de tout cet Ouvrage, un vrai

DICTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES.

Ce signe == signifie ici jusqu'à. Par exemple, 559 == 575, signifie que la matiere indiquée est traitée depuis le numero 559, jusqu'au numero 575. Il y aura aussi un petit nombre de renvois, relatifs aux pages, qui seront marquées expressement.

A B.

ABSISSSES & Ordonnées de la parabole, 738 == 743; de l'ellipse, 749 == 750.

ADDITION, incomplete & complexe, 23 == 28. Addition algébrique, 84. Addition des fractions, 201.

Aire d'un triangle, 380.

ALGÈBRE: son origine, ses progrès, sa nature, 74 == 152.

Alidade d'un graphometre, 420.

ALLIAGE: regle d'alliage, directe & indirecte, 275 & 281 == 287. Résoudre par cette regle, le fameux problème d'Archimede sur la couronne d'Hieron, 286.

ANALYSE GÉOMÉTRIQUE: son origine, ses progrès, sa nature, ses formules, 250 == 252. Son usage dans la résolution des équations du premier

& du second degré, 252 == 269.

ANGLE RECTILIGNE, droit, aigu, obtus, 335. Angles alternes, internes & externes, 357. Angle au centre, & angle inscrit ou angle du segment, 365 == 369. Angles saillans & angles rentrans, 469. Angles mixtilignes & curvilignes, 726.

Année solaire tropique: sa durée, page 13.

Antécédent ou conséquent d'une raison, 155.

A-plomb: ligne d'a-plomb, destinée à faire connoître la ligne horizontale, la ligne verticale, la ligne de niveau, 532.

Apothème du polygone, 468; de la pyramide, 550.

APPROXIMATION: extraire par approximation, la ra-

cine quarrée & cubique d'un nombre qui n'est ni un quarré parfait, ni un cube parfait, 135 & 151.

Aqueducs: pente qu'ils exigent pour l'écoulement des eaux, 537.

Arc de cercle, 310 & 335. Arcs semblables de deux circonférences concentriques, 340 & 648. Mesurer dans le ciel un arc de grand cercle, 736 & 737.

ARITHMÉTIQUE: son origine, sa nature, ses regles & ses différentes opérations, 12 = 73.

Arpent & arpentage, pages 21 & 389.

Asymptotes de l'hyperbole, 769 & 770.

AXE d'un prisme, 547; d'un cylindre, 549; de la pyramide, 550; du cône, 551; de la sphere, 554; d'un grand cercle de la sphere, 727; de la parabole, 739; de l'ellipse, 749.

Axiomes: divers axiomes de mathématiques, 11.

B A.

BASE d'un triangle, 380; d'un prisme, 546; d'une pyramide, 590.

Bouffole, 420 & 436.

C A.

CALCUL ARITHMÉTIQUE, 12 = 73.

Calcul Algébrique, 74 = 152.

Calcul Analogique, 153 = 249.

Calcul Analytique, 250 = 301.

Calotte sphérique, 576.

Carte: lever la carte d'un pays, 455.

Centre d'un cercle, 309; d'une sphere, 554 & 735; d'une ellipse, 749.

Cercle, 309 & 466. Sections dans le cercle, 406 = 410. Propriété fondamentale du cercle, 410. Quadrature du cercle, 489. Surface du cercle, 481. Grands & petits cercles de la sphere, 554 = 557. Le cercle a plus de surface que toute autre figure de même périmètre, 510.

Cercle osculateur de l'ellipse, 762.

Chiffres: leur nature & leur miliet, 14 = 21.

CHRONOLOGIE, sacrée & profane, rapportée à la période Julienne, pages 14 = 19. Chronologie du texte Hébreu, du texte Samaritain, du texte des Septante, pages 16 = 19.

Circonférence d'un cercle, 310 & 311. Rapport de la circonférence au diamètre, 479 & 663.

Circonscrit: polygone circonscrit au cercle, 506. Cylindre, cube, cône équilatéral, circonscrits à la sphere, 571. Cercle circonscrit à l'ellipse, 749 & 752.

Coefficients algébriques, 88.

Combinaisons dont sont susceptibles plusieurs grandeurs,

Commensurable : grandeurs commensurables, 6 & 519.

Compas & règle, 303 & 308.

Compagnie : Règle de compagnie, 275 & 279.

Complément d'un angle & d'un arc, 337, 339, 637, 660.

Complexes : nombres complexes, 22, 23.

Concentriques : circonférences concentriques & excentriques, 310.

Cône droit, 551; oblique, 552; tronqué, 553.

Corde d'un arc de cercle, 310, 318, 633, 648. Trouver les cordes de tous les arcs de cercle, depuis l'arc d'une minute jusqu'à l'arc de 180 degrés, 653 = 661.

Corollaire, 9.

Conséquent & antécédent d'une raison, 155.

Continu, ou quantité continue, 1.

Co-finus, ou sinus du complément d'un angle ou d'un arc, 637 & 660.

Courbure & élévation des montagnes : en quel sens elles n'augmentent pas la surface de la terre, 540.

Cube d'un nombre, parfait & imparfait, 117 & 120.

Cube géométrique, 121 & 546. Sa formation & ses propriétés, 136 = 144. Son expression algébrique, 136 & 137. Sa décomposition, ou extraction de la racine cubique, 145 = 151.

Cylindre, 549. Sa surface, 564. Sa solidité, 603.

D E.

DÉFINITIONS, 8.

Degrés d'une circonférence circulaire, 311.

Demandes, 8.

Dénominateur d'une fraction, 13.

DÉVELOPPEMENT de la surface d'un solide, 559. Développement ou surface du prisme, 560 = 562; de la pyramide, 563; du cylindre, 564 = 566; du cône droit, 568; du cône tronqué, 570; du sphéroïde régulier, 572; de la sphère, 573 = 577; d'une calotte sphérique, 576.

Diagonale d'un parallélogramme, 434.

Diamètre d'un cercle, 309. Rapport du diamètre à la circonférence, 479 & 663. Diamètre d'une sphère, 554.

Différence, ou reste, dans la soustraction, 29.

Dimensions de l'étendue, longueur, largeur & profondeur, 301.

Directrice de la parabole & de l'ellipse, 738 & 739.

Discrete : grandeur ou quantité discrète, 1.

Dividende & diviseur, 43.

DIVISION, 43. Division incomplexe, simple & composée, 44 = 53. Division complexe, 61 = 64. Division par les fractions de l'unité, 71 & 72. Division algébrique, incomplexe & complexe, 103 = 112. Division des fractions, 219 = 223.

E C.

ECHELLE, ou ligne des parties égales, 411.

Échelle géométrique, 412, 415, 416.

Éléments des Surfaces, 438; des solides, 585.

ELLIPSE, 738. L'ellipse, sur un plan, 749 = 764. L'ellipse dans le cône, 765 & 767. Surface d'une ellipse, 752 & 753.

Ellipsoïdal: solide à courbure ellipsoïdale, tel qu'est à peu près le globe terrestre: sa surface, 755: sa solidité, 754.

Elliptique: courbe elliptique, telle qu'est à peu près la courbe des planètes & des comètes, 749 & 756. Solide à concavité elliptique; & miroir concave elliptique, 764.

Époques générales pour l'Histoire: la création, le déluge, la vocation d'Abraham, la sortie d'Égypte, la dédicace du Temple de Salomon, l'ère des Olympiades, la fondation de Rome, l'ère de Nabonassar, la délivrance des Juifs sous Cyrus, la mort d'Alexandre, la prise de Carthage, le commencement de l'ère chrétienne; pages 14 = 19.

ÉQUATION ALGÈBRE, & ses membres, 82 & 252. Équations de différens degrés, 254.

Équations du premier degré: leur formation, 257: leur décomposition, 258: leur transformation, 259 = 265: leur

substitution, 266: règles pour leur résolution, 267. Divers problèmes fondamentaux sur cet objet, 268 = 297.

Équations du second degré, 298 = 301.

Équerre, instrument de l'étui de Mathématiques, 364 & 532.

Étendue, envisagée dans ses trois dimensions, 301 & 543.

Exagone, 465.

Exaltation & Extraction des grandeurs numériques & algébriques, 115 & 152.

Excentricité d'une ellipse, 757 & 760.

Excentriques: circonférences excentriques, 310.

Exposant algébrique, 92.

EXPOSANT D'UNE RAISON, en général, 155. Exposant de la raison géométrique, 155 = 162.

EXTRACTION DES RACINES, quarrées & cubiques, 129 & 145.

Extrêmes & moyens, d'une proportion géométrique, 170 & 171: d'une proportion arithmétique, 181 & 182.

F A.

FAUSSE-POSITION: règle de fausse-position, 273 = 275.

FIGURE, 379. Figures ou surfaces semblables, 498. Rapports des figures ou surfaces semblables, comme les quarrés d'une de leurs dimensions homologues, 499.

Foyer de la parabole, 739.

& 746; de l'ellipse, 757 & 759.

FRACTIONS, ou nombres fractionnaires, 13. Fractions de l'unité, 65 = 72. Théorie des fractions, 186 = 216. Leur nature, 187: leur valeur, 188 = 192: leur transformation, 203: leur réduction, 198 = 200: leur addition, 201: leur soustraction, 203: leur multiplication, 206 = 209: leur division, 210 = 213: leur exaltation & leur extraction, 214 = 216.

Fractions décimales, 464 & 645.

G E.

GÉOMETRIE, spéculative & pratique, élémentaire & transcendante, 302.

Grandeur, discrète & continue, 1.

Grandeurs radicales, 152.

Graphomètre, 420. Son usage, 423 = 426.

H A.

HAUTEUR, d'un triangle, 380; d'un parallélogramme, 438; d'un prisme, 547; d'un cylindre, 549; d'une pyramide, 550; d'un cône, 551.

HOMOLOGUES: côtés homologues de deux triangles semblables, 390.

Horizon: ligne horizontale, 422 & 531 = 534.

Hyperbole, 738, 747, 768, 770.

HYPOTHÉNUSE, 514. Propriété fondamentale du quar-

ré de l'hypothénuse, 515 & 517.

I N.

INCOMMENSURABLES: grandeurs incommensurables, 6 & 519.

INFINIS MATHÉMATIQUES, 237 & 238. Infinités relatifs, 238. Infinités & infiniment petits, du premier, du second, & du troisième ordre, 239 = 245. Sommation de quelques suites infinies, 246 = 249.

Inscrit: polygone inscrit au cercle, 506. Sphere inscrite au cylindre, au cube, au cône équilatéral, 571.

Jour moyen, page 13.

Isocelle: triangle isocelle; 381.

Isopérimètre: figures ou surfaces isopérimètres, 467 & 507 = 512.

L E.

LEMME, 9.

Lieue, 7 & 446.

LIGNES, 303. Leur origine & leurs propriétés, 304 = 326. Leur position relative, 327 = 378. Leur assortiment, 379 = 392. Leurs rapports, 393 = 430.

LIGNES PROPORTIONNELLES, 393 = 400; & 494 = 497.

Lignes des parties égales, 411.

Logarithmes, 708.

LONGIMÉTRIE, ou science de l'étendue en longueur, 302 = 430.

Lozange, 432.
Lunettes acromatiques, 423.
 III°.

M A.

MATHÉMATIQUES : leur nature, leur utilité, leur division, leur méthode, moyen de les rendre simples & intéressantes : voyez la Préface. Mathématiques en général, 1. Mathématiques pures & mixtes, 4.

MESURES : idée générale d'une mesure universelle de l'étendue page 6 = 13; du temps, pages 14 = 19. Mesures de l'étendue, anciennes & modernes, rapportées à nos mesures de France, pages 20 = 23. Dilatation des mesures par la chaleur, page 23.

Mesure des surfaces, 445 = 457. Mesurer la surface d'une province, 453 & 538 = 740.
Mesure des solides, 587 & 612.

Méthode des Géometres, 8. Méthode synthétique & analytique, 251. Méthode des indivisibles de Cavalieri, 438.

Micrometre objectif, 422.

Miroirs paraboliques & elliptiques, 746 & 764.

MOUVEMENT : problèmes fondamentaux sur le mouvement des corps, 288 = 294.

MOYEN PROPORTIONNEL, géométrique, 170 & 412; arithmétique, 185 & 448.

Moyens & extrêmes, d'une proportion géométrique, 170 & 171; d'une proportion arith-

métique, 181 & 182.

Multiples d'un nombre, 161;

Multiplicande & multiplicateur, 34.

MULTIPLICATION, 34; Multiplication incomplexe, simple & composée, 35 = 42. Multiplication complexe, 54 = 60. Multiplication par les fractions de l'unité, 66 = 70. Multiplication algébrique, in-complexe & complexe, 91 = 102. Multiplication des fractions, 206 = 209.

N I.

NIVEAU, vrai & apparent, 533 = 537. Table des hautessems du niveau apparent sur le niveau vrai, 534. Nivellement, 533 & 536. Niveau d'eau, 535, 422, & 420.

NOMBRES, & science des nombres, 13 & 14. Nombres abstraits & concrets, incomplexes & complexes, entiers & fractionnaires, 13. Nombres premiers, nombres multiples, 161. Maniere de marquer les nombres chez les Hébreux, chez les Grecs, chez les Romains, chez les Arabes, 14.

Numérateur d'une fraction, 13.

O B.

OBLIQUE : ligne oblique à une autre ligne, 330 & 348. Prisme oblique, 547. Cylindre oblique, 549. Pyramide oblique, 550. Cône oblique, 552.

ORDONNÉES, au cercle, aux sections coniques, 738, 739, 749.

P A.

PARABOLE, 738. La parabole sur un plan, 739 = 748. La parabole dans le cône, 738 & 766. Solide à concavité parabolique, & miroirs concaves paraboliques, 746.

PARALLELE : ligne parallèle à une autre ligne, 328 & 356 = 364. Plan parallèle à un autre plan, 528.

Parallélisme de deux plans, 528.

Parallélopède, 546 & 121.

Parallélogramme, 432 & 437.

Paramètre de la parabole, 639 & 742; de l'ellipse, 758.

Parties égales : ligne des parties égales, 411.

Parties aliquotes & aliquantes d'un tout, 161. Multiplication par les parties aliquotes, 68 = 70.

Parties semblables d'un tout, 162 & 169.

Pendule à secondes, simple & composé, pages 7 = 13.

Pentagone, 465.

Périmètre d'un polygone, 465.

Période Julienne, page 14.

PERPENDICULAIRE : ligne perpendiculaire à une autre ligne, 329 & 353. Surface plane perpendiculaire à une autre surface plane, 529.

Perpendiculaire : éloignement de perpendiculaire, 351 & 352.

Pinnules d'un graphometre, 420.

PLAN, ou surface plane, 523 & 524. Sections des plans, 522 = 531. Plan générateur d'un solide, 545. Plan d'un cercle, 723.

Planchette, 436.

PLANIMÉTRIE, ou science de l'étendue en longueur & en largeur dans les surfaces planes, 431 = 541.

Point mathématique, 302 & 438. Faire passer une circonférence par trois points donnés, 322. Trois points isolés sont toujours nécessairement dans un plan, 530.

POLES de la sphere, 554. Poles d'un grand cercle de la sphere terrestre ou céleste, 727.

Polynomes : quantités polynomes ou complexes en algebre, 80. Binomes, trinomes, quadrinomes, 80.

POLYGONES, 463. Polygones inscrits & circonscrits au cercle, 506 : leur surface plus ou moins grande, 503 = 505.

Preuve de l'Addition, 267 de la Soustraction, 32 ; de la Multiplication, 40 ; de la Division, 48.

Preuve de superposition, 10 & 358.

PRISME, 546. Sa surface, 560 = 562. Sa solidité, 601 & 602.

PROBLÈME, 9. Problèmes déterminés & indéterminés, 256. Conditions d'un problème, 255. Problèmes fondamentaux, dont la solution a un rapport prochain avec les

grandes connoissances du Calcul, de la Géométrie, de la Physique, 268 = 301.

Produisant des surfaces planes, 490; de la surface des solides, 579; de la solidité des solides, 616.

PRODUIT de deux grandeurs quelconques, 34: toujours le même, soit qu'on multiplie la première par la seconde, ou la seconde par la première, 93. Le produit d'une ligne par une autre ligne, est une surface, 490 & 650. Le produit d'une surface par une ligne qui en exprime la hauteur, est un solide, 612.

PROGRESSION, 154. *Progression* arithmétique & géométrique, finie & infinie, 230 = 249. Somme de la progression finie des nombres naturels, 231 & 232: de la progression finie des nombres impairs, 233: de la progression infinie des nombres naturels, de leurs carrés, de leurs cubes, 247 = 249: d'une progression géométrique infinie, dont on connoit le premier & le second terme, 295 = 298.

PROPORTION, 154. *Proportion* arithmétique & géométrique, 155. Théorie des proportions géométriques, 170 = 180. Théorie des proportions arithmétiques, 181 = 185. Termes d'une proportion géométrique, élevés à leurs carrés ou à leurs cubes, ou réduits à leurs racines carrées ou cubiques,

encore en proportion, 225 & 228.

Proportion continue, 170.

PUISSANCES ALGÈBRIQUES: leur nature & leur formation, 115 & 118.

PYRAMIDE, 550. Sa surface, 563. Sa solidité, 604.

Q U.

QUADRATURE du cercle, 483; de l'ellipse, 753; de la parabole, 748.

Quadrilatère, 432.

Quantité, ou grandeur, discrète & continue, 1.

Quantités algébriques, 75 = 83: positives ou négatives, elles sont également réelles, 86.

QUARRÉ D'UN NOMBRE, parfait & imparfait, 117 & 119.

QUARRÉ GÉOMÉTRIQUE, 121 & 432. Sa formation & ses propriétés, 122 = 128. Son expression algébrique, Sa décomposition, ou extraction de la racine carrée, 129 = 135.

Quarré d'une ligne, 515. *Quarré* de l'hypothénuse, 515 & 517. Ligne, ponce, pied, toise, lieue, quarrés, 7 & 446.

Quart de cercle, 311 & 421. *Quotient* dans la division, 43.

R A.

RACINE d'un nombre, 118. Racine carrée, 116. Racine cubique, 117. Extrac-

tion de la racine quarrée d'un nombre, 129 = 135. Extraction de sa racine cubique, 145 = 151.

Radicaux, ou grandeurs placées sous le signe radical, 152.

RAISON, en style mathématique, 155. Raison géométrique, 155 & 156. Raison arithmétique, 155 & 181.

Raisons simples, arithmétique & géométrique, 155. Raison géométrique : sa nature & sa valeur, 156 = 162. Principes sur les raisons géométriques, ou théorie de leurs rapports, 166 = 169. Égalité de deux raisons, 169. Raison directe & raison inverse, 176 = 179.

Raisons composées, 217. Raison doublée, 218 & 490. Raison triplée, 219 & 621. Théorie des raisons composées, doublées, triplées, 220 = 229.

Rapport d'une grandeur à une autre, 154. Égalité de deux rapports, 169. Rapport du diamètre à la circonférence d'un cercle, 479 & 663. Rapports des surfaces, 489 = 521. Rapports des solidités, 616 = 626.

Rapporteur, instrument de Mathématique, 345.

Rayon d'un cercle, 309 & 310. Rayon d'une sphere, 554.

Rayon vecteur, dans la parabole, 747; dans l'ellipse, 760.

Rayon terrestre, sa grandeur moyenne, page 20.

Réciproques : grandeurs réciproques, ou réciproquement proportionnelles, 408.

RECTANGLE : triangle rectangle, 382. Rectangle simplement, ou parallélogramme rectangle, 432.

Réduction algébrique, 88.

Réduction des fractions, 195 & 198 = 200.

Réduction des figures, de petit en grand, & de grand en petit, 411.

Règle & compas, 303 & 308.

RÈGLE DE TROIS, ou règle d'or, directe & indirecte, 177 = 180. Règle de cinq, de sept, de neuf, 275 & 276. Règle de fausse-positon, 273 = 275. Règle de compagnie, 275 & 279.

Règle d'alliage, directe & indirecte, 275 & 281 = 287.

Résolution des équations, 267.

Reste, ou différence, dans la soustraction, 29.

Rhombes & rhomboïdes, 432.

S C.

SCALENE : triangle scalene, 381.

Scholies, ou remarques, 91.

Sécante au cercle, 332; à des lignes parallèles, 357.

SÉCANTE D'UN ARC, 721. Étant donnée la tangente d'un angle, trouver la sécante du même angle, 724.

Secteur de cercle, 310. Sa surface, 482.

Sections des lignes dans le cercle, 406 = 410. Sections

des lignes & des plans 522

== 532.

SECTIONS CONIQUES: idée générale de ces courbes, dans le cône & sur un plan, 738. La parabole sur un plan, 739 == 749. L'ellipse sur un plan, 749 == 764. La parabole, l'ellipse, l'hyperbole, dans le cône, 765 == 773.

Segmens de la surface du cercle, 310; du diamètre du cercle, 406.

Semblables: termes semblables en algèbre, 78. Parties semblables de deux tous, 162. Arcs semblables, 340 & 648. Triangles semblables, 383 & 401. Surfaces semblables, 498. Solides semblables, 578.

Signes algébriques, 75. Leur changement dans la soustraction, 85; dans la multiplication, 95 & 96; dans la division, 105.

Signes radicaux, 152.

SINUS DROIT d'un angle ou d'un arc, 634, 636, 639. Sinus total, 643 & 646. Sinus du complément d'un angle aigu, ou co-sinus, 637. Résoudre les triangles, par la théorie des sinus, 702 == 707.

SINUS VERSE d'un angle ou d'un arc, 635 & 638. Trouver le sinus verse d'un arc donné, 662.

SINUS DES SECONDES, 709 & 711. Construire une table des sinus des secondes, 717. Résoudre par la théorie des sinus, les triangles qui ont des angles au-dessous d'une minute, 718.

SOLIDES, 302 & 543. Sur-

face des solides, 560 == 575.

Solidité des solides, 601 ==

605. Solides semblables, 578.

Rapport des solides, 616 ==

626. Elémens des solides,

585.

SOMME, dans l'addition,

23. Somme des extrêmes,

égale à celle des moyens,

dans la proportion arithmé-

tique, 182.

*Sommat*ion de la suite finie

des nombres naturels, 231;

des nombres impairs, 233; de

la suite infinie des unités, de

leurs quarrés & de leurs cu-

bes, 247 == 249; d'une pro-

gression infinie dont on con-

noit le premier & le second

terme, 295 == 298.

SOMMET d'un angle, 335

& 343; d'un triangle, 380;

d'une pyramide, 550; d'un

cône, 551; d'une parabole,

739.

SOUSTRACTION, incom-

plexe & complexe, 29 == 33.

Soustraction algébrique, 85

== 90. Soustraction des frac-

tions, 203 == 205.

SPHERE, 554 == 557. Sa

surface, 573 == 577. Sa soli-

dité, 608 & 624. La sphere a

plus de solidité qu'aucun so-

lide de même surface, 626.

Sphere terrestre & céleste,

735.

SPHÉROÏDE, régulier & ir-

régulier, 558. Surface du sphé-

roïde régulier, 572.

Sphéroïde ellipsoïdal, tel

qu'est à peu près le globe

terrestre; sa formation, sa

surface, la solidité, 754 & 755.

STÉRÉOMÉTRIE, ou science de l'étendue en longueur, largeur & profondeur, 542 = 626.

Substitution dans les équations, 266; dans les raisons géométriques, 168.

Superposition, 10 & 358.

Supplément d'un angle & d'un art, 338 & 339 & 636.

SURFACES, 302. Surfaces planes & courbes, 431. Égalité des surfaces planes, 430 = 444, & 481 = 483. Surfaces semblables, 498. Rapport des surfaces planes, 489 = 521. Sections des surfaces planes, 522 = 529. Surfaces des solides, 559 = 584.

Synthese & méthode synthétique, 251.

T A.

T*ANGENTE* au cercle, 331 & 370 = 378. Entre la tangente & le cercle peuvent passer une infinité de lignes courbes différentes, 375. Tangente d'un angle ou d'un arc dans le cercle, 720. Étant donné un angle quelconque dans le cercle, trouver la valeur de sa tangente, 723. Tangente à la parabole, 744 & 745. Tangente à l'ellipse, 744 & 763.

Télescope astronomique, appliqué au quart de cercle, 422.

Termes algébriques, positifs & négatifs, 77. Termes semblables, 78.

Théorème, 9.

Toise, ou toise courante, 7. Toise quarrée: pieds, pouces, lignes de toise quarrée, 7 & 451. Toise cubique: pieds, pouces, lignes de toise cubique, 7 & 613.

TOISÉ, des surfaces, 70 & 460 = 463; des solides, 70 & 612 = 615.

Tout & partie, 11. Parties semblables de deux tous, 162 & 163.

Trapeze, 432. Sa surface; 444 & 445.

TRIANGLE RECTILIGNE, équilatéral, isocelle, scalene, rectangle, acutangle, obtusangle, 379 = 382. Triangles mixtilignes & sphériques, 726 = 737.

Triangles égaux en tout, 390 = 392.

Triangles semblables, 383, 390, & 401 = 405. Résolution des triangles rectilignes, par la méthode des triangles semblables, 417 = 430. Résolution des mêmes triangles, par la Trigonométrie, ou par le Calcul arithmétique, 702 = 707, & 718.

TRIGONOMÉTRIE, 627. Trigonométrie rectiligne, 632 = 725. Trigonométrie sphérique, 726 = 737.

ZONE, terrestre & céleste, 576 & 733 = 734.

FIN DE LA TABLE.

PRINCIPES



PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE,

60

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

GRANDEUR DISCRETE ET CONTINUE.

1. DÉFINITION I. **L**ES Mathématiques sont une science qui a pour objet la grandeur en tant que mesurable.

I°. On nomme *grandeur* ou *quantité* (car ces deux termes sont parfaitement synonymes), tout ce qui peut se concevoir comme composé de parties; tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution; comme l'étendue, le mouvement, le temps, les nombres. La grandeur est ou discrete ou continue.

II°. On nomme *grandeur discrete*, un assemblage de parties désunies entr'elles, qui forment plusieurs tous, plutôt que des parties d'un même tout; par exemple, un monceau de bled, un tas de sable.

III°. On nomme *grandeur continue*, celle dont les

Tome V.

A

parties sont unies entr'elles, & forment un même tout : comme un bâton, un bloc de marbre.

IV°. La grandeur discrete, ou composée de parties séparées, s'exprime par des *nombres* ; & c'est l'objet du *calcul*. La grandeur continue, ou composée de parties unies, est ce qu'on appelle l'*étendue* ; & c'est l'objet de la *géométrie*. De sorte que le Calcul, ou la science des nombres, & la Géométrie, ou la science de l'étendue, embrassent toutes les sciences mathématiques.

2. REMARQUE I. On peut considérer les grandeurs *discret*es, qui sont l'objet du calcul ; ou en elles-mêmes, ou dans leurs rapports ; & comme on peut combiner entr'elles ces grandeurs, on peut aussi combiner entr'eux leurs rapports. Ces quantités peuvent être, ou déterminées, ou indéterminées : leurs rapports peuvent être ou des rapports connus avec des rapports connus ; ou des rapports dont quelques-uns sont connus, & quelques autres inconnus. Delà l'objet des quatre parties du calcul.

I°. Les *quantités discret*es *déterminées* sont celles qui expriment une grandeur plutôt qu'une autre : tel est le nombre 8, qui signifie une grandeur de huit parties, plutôt que de trois, de sept ou de neuf. Elles sont l'objet du *calcul arithmétique*.

II°. Les *quantités discret*es *indéterminées* sont celles qui expriment une grandeur qui n'est pas plutôt l'une que l'autre. Telle est la lettre ou la quantité *a*, qui ne signifie rien de fixe, qui ne représente pas plutôt un mouvement qu'une étendue, un tems plutôt qu'une mesure, une toise plutôt qu'un pouce, un nombre 10 plutôt qu'un nombre 1000. Elles sont l'objet du *calcul algébrique*.

III°. Les *quantités discret*es, *déterminées* ou *indéterminées*, peuvent avoir entr'elles des *rapports* exprimés par des termes connus ; & la comparaison ou la combinaison de ces rapports est l'objet du *calcul*

analogique, ou de la théorie des proportions.

IV°. Les quantités discrètes, déterminées ou indéterminées, peuvent avoir entr'elles des *rapports* dont quelques-uns soient connus, & quelques autres inconnus; & la comparaison ou la combinaison de ces rapports, est l'objet du *calcul analytique*.

Ainsi l'Arithmétique, l'Algebre, les Proportions, & l'Analyse renferment tout ce qui concerne le calcul ou la science des nombres. Tel sera l'objet de la première partie de cet ouvrage. Un conseil à donner à ceux qui veulent entendre & posséder le calcul, c'est de l'étudier la plume à la main, en appliquant à des exemples qu'on se donne, les règles des opérations qu'on veut se graver dans l'esprit.

3. REMARQUE II. La *quantité continue*, ou l'étendue, qui est l'objet de la géométrie, peut être ou une simple ligne, sans largeur & sans profondeur; ou une simple surface, sans profondeur; ou un solide, long, large, & profond. Delà l'objet de la *Longimétrie*, de la *Planimétrie*, de la *Stéréométrie*, & enfin de la *Trigonométrie*; comme nous l'expliquerons plus en détail au commencement de la seconde partie de cet ouvrage.

Mathématiques pures, & mixtes.

4. DÉFINITION II. On divise communément les mathématiques, en mathématiques pures, & en mathématiques mixtes.

I°. Les *mathématiques pures* ont pour objet la grandeur, en tant que grandeur précisément, & sans aucun rapport aux qualités sensibles & physiques.

II°. Les *mathématiques mixtes* ont pour objet la grandeur, en tant que revêtue de qualités sensibles; telles que sont le mouvement, la dureté, la fluidité, l'élasticité, la gravité, & autres semblables.

Mais les mathématiques mixtes ne sont au fond;

qu'une application des mathématiques pures, ou du calcul & de la géométrie, à des objets particuliers; par exemple, à l'accélération des graves, aux mouvements des astres, aux loix du choc & de l'équilibre, aux propriétés du son & de la lumière; & ainsi du reste.

Grandeurs commensurables & incommensurables.

5. DÉFINITION III. Le but du calcul & de la géométrie, est de mesurer. Chercher combien de fois une quantité moindre, mais connue, est contenue dans une plus grande, c'est ce qu'on appelle *mesurer*.

Ainsi, mesurer une longueur, c'est porter sur cette longueur une quantité moindre, mais connue, telle que la toise ou le pied, pour savoir combien de fois elle y est contenue; & l'on dit alors que cette longueur a tant de toises ou de pieds. Cette quantité moindre que l'on prend un certain nombre de fois, s'appelle *mesure*: la quantité plus grande à laquelle on applique la mesure, s'appelle *grandeur*.

6. DÉFINITION IV. Lorsqu'on connoît le rapport de la mesure avec la grandeur, cette grandeur est appelée *commensurable*; & lorsqu'on ne peut pas trouver de rapport juste & précis entre l'une & l'autre, cette grandeur est appelée *incommensurable*. Ainsi,

I°. *La plupart des grandeurs sont commensurables entr'elles.* Par exemple, 10 & 3 sont deux grandeurs commensurables: parce que la petite grandeur étant prise trois fois & un tiers, est précisément égale à l'autre. De même, 99 & 10 sont des grandeurs commensurables: parce qu'en prenant neuf fois la petite grandeur, plus neuf parties de cette petite grandeur, on aura une grandeur égale à l'autre; & ainsi du reste.

II°. *Il y aussi des grandeurs incommensurables entr'elles*, en telle sorte qu'on ne peut assigner aucune partie de la petite quantité qui, prise tel nombre de fois

qu'on voudra, égale précisément la grande, sans aucun excès & sans aucun défaut. Par exemple, la grandeur 2, & la grandeur qui multipliée par elle-même donneroient un produit égal à 2, sont deux grandeurs incommensurables. Car cette seconde grandeur, qui est la *racine* de 2, n'est pas 1 plus 5 dixièmes, qui est trop grand; n'est pas 1 plus 4 dixièmes, qui est trop petit; c'est un *nombre sourd* entre ces deux termes 1 plus 5 dixièmes & 1 plus 4 dixièmes; lequel nombre n'est ni une moitié, ni un tiers, ni un quart, ni un centième, ni un millième, ni un millionième, ni aucune partie assignable de la grandeur à mesurer (216). De sorte qu'en comparant entr'elles deux grandeurs incommensurables, on trouve toujours une *différence sourde* & inexprimable entre la mesure & toute partie déterminée de la grandeur à mesurer.

IDÉE GÉNÉRALE DES MESURES DU TEMS,
DE L'ÉTENDUE, DES POIDS.

7. OBSERVATION. Comme le but général des Mathématiques est de *mesurer*; il est nécessaire de connoître les différentes mesures, soit naturelles, soit de convention, qui servent à évaluer les différentes grandeurs discrètes ou continues. On a des mesures naturelles du tems, qui sont données par la nature elle-même, qui sont connues & entendues de tous les peuples. On n'a pas de même, du moins aisément, des mesures naturelles du poids & de l'étendue : parce que la nature ne produit aucun corps d'un volume ou d'un poids déterminé, qui puisse servir de mesure commune aux différentes nations. Par exemple,

Il m'est facile, en écrivant de Paris à Pekin, d'appréhendre à un Chinois, ce que j'entends par une *année astronomique tropique*; en lui disant que c'est une durée égale à celle de la révolution réelle ou apparente du

soleil autour du zodiaque, à compter du moment où le centre du soleil est dans l'intersection de l'écliptique & de l'équateur au printems, jusqu'au moment où le centre du soleil sera de nouveau dans l'intersection de l'écliptique & de l'équateur au printems suivant. Il m'est facile de lui apprendre de même, ce que j'entends par un *jour naturel*; en lui disant que c'est une durée égale à la révolution réelle ou apparente du soleil autour de la terre, à compter du passage du centre du soleil par le méridien d'un lieu quelconque, jusqu'au retour du même centre du soleil dans le même méridien. Il me sera également facile de lui apprendre ce que j'entends par une *heure*, qui est la vingt-quatrième partie du jour naturel; par une *minute*, qui est la soixantième partie d'une heure; par une *seconde*, qui est la soixantième partie d'une minute; par une *tierce*, qui est la soixantième partie d'une seconde; & ainsi du reste.

Mais si je veux apprendre à ce même Chinois ce que j'entends par une étendue d'une lieue ou d'une toise, par un poids d'un quintal ou d'une livre; je ne fais guère comment m'y prendre pour lui exprimer mon idée, en supposant qu'il n'a pas, & que je ne lui envoie pas ma mesure ou une partie déterminée de ma mesure. Je ne connois que deux grandeurs dans la nature, qui puissent me servir de terme de comparaison, par où je puisse lui apprendre ce que j'entends par une *toise*: l'une est l'étendue d'un degré du méridien terrestre; l'autre est la longueur d'un pendule à secondes. Il ne sera donc pas hors de propos de donner ici une idée de ces deux grandeurs, qui peuvent servir de fondement à une mesure universelle de l'étendue.

Mesure universelle de l'étendue.

Arc d'un degré dans le méridien terrestre.

I°. Un arc d'un degré, pris dans le méridien terrestre, entre Paris & Amiens, à 49 degrés & 23 minutes de latitude, embrasse une étendue de 57072

toises (*Phys.* 1368). Je dirai donc à ce Chinois que la toise dont je parle, est une mesure ou une étendue en longueur, telle qu'un arc d'un degré, pris dans le méridien terrestre, à la latitude de Paris, en contient cinquante-sept-mille-soixante-douze; ou qu'une toise est la cinquante-sept-mille-soixante-douzième partie de l'étendue de cet arc d'un degré. Que ce Chinois mesure exactement un degré du méridien terrestre à la latitude de 49 degrés & 23 minutes: la mesure qu'il trouvera sera égale à la mesure du degré pris à Paris; & la cinquante-sept-mille-soixante-douzième partie de cette mesure, sera la valeur de ma toise.

Pendule à secondes simple.

II°. Le pendule à secondes pourra me servir plus aisément & plus fidèlement pour donner à ce Chinois une idée de nos mesures de France, par exemple, du pied, qui est la sixième partie de la toise. (*fig.* 119.)

Soit P une boule de plomb ou de laiton, dont le diamètre égale à peu près le grand ou le petit diamètre d'un œuf de poule: un peu plus ou un peu moins de grosseur dans la boule, ne change rien à la chose. Que le diamètre de cette boule soit percé de part en part, en telle sorte que par l'ouverture très-petite on puisse insérer & fixer un fil de laiton très-droit & très-mince AOQ, d'une longueur indéterminée. L'extrémité supérieure de ce fil sera fixée à un petit anneau solide & bien poli A, lequel reposera librement sur un petit cylindre horizontal très-poli, immobilement fixé à un plan vertical, tel qu'un mur ou une planche, & suffisamment saillant hors du plan: il faut que le diamètre de l'anneau soit un peu plus grand que le diamètre du cylindre saillant qu'il embrasse; afin que le frottement ne gêne en rien les évolutions que doit faire l'anneau. La partie inférieure Q du fil, qui

passé par le diamètre de la boule & qui doit remplir à peu près l'ouverture par où il passe, sera fixée en O ou en P ou en Q, à une distance indéterminée du point A, par le moyen d'une petite cheville insérée dans l'ouverture inférieure de la boule. Cet instrument AP, ainsi arrêté & suspendu auprès d'un plan vertical, sans toucher à ce plan, sera un *pendule simple* : il ne s'agit plus que de le régler, pour en faire un pendule à secondes. Le rouage RSTVS doit ici disparaître : son usage est pour le pendule composé, dont nous parlerons bientôt.

La boule P, suspendue à son fil de laiton AP, & livrée à sa gravité ou pesanteur, se place dans sa direction perpendiculaire AP, qu'il faudra marquer sur le plan vertical par une ligne noire. Mais si on tire cette boule P hors de sa perpendiculaire, & qu'après l'avoir écartée ou détournée en B, par exemple, on l'abandonne à sa pesanteur; elle descendra de B en P en vertu de sa gravité; elle montera, en vertu de son mouvement accéléré, de P en C; l'arc parcouru BC est sa *première vibration* ou oscillation. Elle descendra ensuite de C en P, en vertu de sa gravité; & elle montera de P en m, en vertu de son mouvement accéléré; l'arc parcouru Cm est sa *seconde vibration*. Elle descendra ensuite de m en P, & montera de P en n; l'arc parcouru mn est sa *troisième vibration*. Elle passera ensuite de n en r, & de r en s; c'est sa quatrième & cinquième vibration; & ainsi de suite, jusqu'à l'entier épuisement de son mouvement qui peut durer jusqu'à 12 ou 15 ou 20 ou 24 heures, en décrivant des arcs toujours de plus en plus petits.

Galilée fut le premier à observer que *les vibrations d'un même pendule, quand elles ont peu d'étendue, sont toutes isochrones, ou d'égale durée*; par exemple, que la vibration plus petite rs dure précisément autant que la vibration plus grande mn, que la vibration encore

plus grande BC : mais que les vibrations de deux pendules d'inégale longueur sont inégales en durée, le pendule plus court AO mettant moins de tems à faire chacune de ses vibrations isochrones, que n'en met le pendule plus long AQ à faire ses vibrations aussi isochrones; & que les deux pendules étant mis en mouvement au même instant, ils avoient fait chacun au bout d'un tems donné, des nombres de vibrations qui sont en raison inverse des racines quarrées des longueurs des pendules: c'est-à-dire qu'au bout d'un tems donné, d'une heure, d'une minute, par exemple, le nombre des vibrations faites par un pendule AO de 16 pouces de longueur, est au nombre de vibrations faites par un pendule AQ de 36 pouces de longueur; comme 6, racine quarrée de 36, est à 4, racine quarrée de 16; & ainsi du reste. Cette observation de Galilée est parfaitement d'accord avec la théorie du mouvement accéléré, qu'il venoit de créer & de démontrer (*Phys.* 363); & il appliqua sa nouvelle découverte à mesurer la hauteur des voûtes de différentes églises, en comparant le nombre des vibrations des lampes qui y sont suspendues, avec les vibrations que faisoit dans le même tems un pendule AP d'une longueur connue.

Puisqu'il consiste par l'expérience que le nombre des vibrations faites par un pendule dans un tems donné, par exemple, dans une minute ou dans une heure, est d'autant plus grand, que le pendule est plus court; d'autant plus petit, que le pendule est plus long; il s'agit uniquement, pour faire du pendule AP un pendule à secondes exact, d'élever ou d'abaisser la boule B, jusqu'à ce qu'elle fasse exactement & précisément 60 vibrations par minute, 3600 vibrations par heure. Il consiste par les expériences & par les observations faites sur cet objet depuis près d'un siècle, que le pendule simple AP, pour faire exactement une vibration en un seconde de tems, doit avoir, à Paris, une

longueur de 36 pouces 8 lignes $\frac{31}{100}$ de ligne ; sous l'équateur au niveau de la mer, une longueur de 36 pouces 7 lignes $\frac{7}{100}$ de ligne ; à Pello en Laponie, une longueur de 36 pouces 9 lignes $\frac{17}{100}$ de ligne ; au Cap de Bonne-Espérance, une longueur de 36 pouces 8 lignes $\frac{7}{100}$ de ligne. Cette longueur du pendule varie avec les latitudes ; mais elle est constante à la même latitude : elle peut donc servir à donner une mesure universelle qui se fasse entendre indifféremment à tous les peuples ; & il ne s'agit pour cela, que d'évaluer exactement la longueur du pendule.

Cette longueur du pendule AP est la distance interceptée entre le point d'appui ou de suspension de l'anneau A sur le cylindre saillant, & le centre de percussion ou d'oscillation pris dans la boule P. Ce centre d'oscillation ou de percussion n'est pas le centre même de la boule P, mais un point un peu au-dessous du centre qu'on trouvera par cette analogie : la longueur du fil, comptée depuis le point de suspension jusqu'à l'extrémité supérieure du diamètre de la boule, est au rayon de la boule, comme les deux cinquièmes du rayon de la boule, sont à un quatrième terme qui exprimera la quantité dont le centre d'oscillation est au-dessous du centre de la boule P. Supposons que la longueur du fil, comprise entre le point de suspension & la surface supérieure de la boule, soit de 435 lignes ; que le rayon de la boule soit de 5 lignes, dont les deux cinquièmes sont 2 lignes : la proportion précédente se réduira à celle-ci : $435 . 5 :: 2 . x = \frac{10}{435}$ de ligne : c'est-à-dire que le centre d'oscillation sera au-dessous du centre de la boule, d'une quantité égale à dix parties d'une ligne divisée en 435 parties.

Il me sera facile maintenant d'apprendre exactement au Chinois dont il a été question, ce que j'entends par une étendue d'un pied. Que ce Chinois, à une latitude d'environ 48 degrés & 50 minutes, & à

une hauteur peu considérable au-dessus du niveau de la mer, construisé un pendule semblable à celui que je viens de décrire, & que je suppose réglé pour Paris : la longueur de ce pendule Chinois étant divisée en 881 parties égales, chaque partie équivaldra à ce que je nomme une demi-ligne ; 288 de ces parties équivaldront à ce que j'appelle *un pied*, qui est la sixième partie de la toise Françoisé.

Quand enfin ce Chinois connoitra ce que j'entends par une longueur d'un pied, il ne me sera pas difficile de lui faire connoître ce que j'entends par *un poids d'une livre*. Car alors je lui dirai qu'un poids d'une livre est la soixante-dixième partie du poids d'un pied cube d'eau de pluie ; la treize cents soixante-quinzième partie du poids d'un pied cube d'or de coupelle, d'or pur & sans aucun alliage. (*Phys.* 644.)

Pendule à secondes composé.

III°. Le pendule simple, que nous venons de décrire, est propre à mesurer le tems avec toute la précision possible, dans certaines observations de peu de durée. Mais, faute de moyens commodes pour en compter les vibrations & pour en perpétuer les mouvements, la physique & l'astronomie n'avoient tiré que très-peu d'avantage de cet instrument ; lorsque le célèbre Huyghens, la gloire de la Hollande & l'un des grands hommes du dernier siècle, entreprit de l'appliquer à régler le mouvement des horloges. Également doué du génie de la mécanique & du génie de la géométrie, il imagina une construction d'horloge où le pendule servant de modérateur au rouage, & l'empêchant d'accélérer son mouvement, le réduisit à un mouvement très-uniforme : voici une idée de ce mécanisme. (*fig.* 119.)

Soit AP une verge de fer, plate & solide, au bas de

laquelle est suspendu le poids P. Ce poids est une pesante lentille de cuivre, formée de deux segments de sphere réunis en un même tout, & percée par le milieu de haut en bas pour donner passage à la verge de fer. Cette verge de fer est mobile sur un point fixe en A dans la partie supérieure; & dans la partie inférieure, elle est terminée en vis enveloppée d'un écrou mobile, qui puisse élever ou abaisser à volonté la lentille ou le poids P. Le pendule, qui consiste ici en une verge de fer au bas de laquelle le poids est suspendu, communique par sa partie supérieure *a*, saillante au-dessus du point A, un mouvement alternatif à un aissieu garni de deux petites palettes *rv*, *rs*, tellement disposées, qu'à chaque vibration elles ne laissent passer qu'une dent de la roue R avec laquelle elles s'engrenent (*). Cette roue R ne peut donc avoir qu'un mouvement aussi uniforme que celui du pendule même; & puisque de son mouvement dépend celui de tout le rouage, dont les parties s'engrenent mutuellement entr'elles & avec cette roue, ce rouage est contraint de marcher avec la même uniformité que le pendule.

(*) Nous ne prétendons point que la disposition des deux palettes *rs*, *rv*, soit ou doive être telle que nous la représentons ici : nous nous bornons à faire entendre d'une manière sensible le mécanisme physique de cet instrument, dans lequel il est facile de placer les palettes qui le reglent, d'une manière plus simple & plus convenable, au choix des artistes qui le composent. Les deux palettes sont supposées ici mobiles autour du point fixe S : la roue R est supposée avoir deux rangs de dents, dont l'un s'engrene avec la palette *r*, & l'autre avec la palette *v*; en telle sorte que quand la dent *r* s'échappe, la dent *v* atteigne l'obstacle qui l'arrête; & réciproquement. Nous supposons encore qu'à mesure qu'une dent s'échappe, la roue R meut un petit ressort qui donne une petite impulsion uniforme à la partie saillante *a* du pendule, & qui la meut dans un sens opposé à son oscillation finie.

Il y a plus : ce rouage RS, par l'action du poids ou du ressort qui le met en mouvement, fait un petit effort contre le pendule, & lui communique à peu près la même quantité de mouvement qu'il perd à chaque vibration par la résistance de l'air ou par la résistance du frottement : de sorte qu'au lieu de rester environ vingt-quatre heures en mouvement, comme il pourroit faire sans cela, le pendule AP ne peut plus s'arrêter que lorsque le poids ou le ressort de la machine cessera d'agir. En adaptant à ce mécanisme un petit marteau qui frappe sur un timbre à chaque vibration isochrone & uniforme BC du pendule, on aura le *pendule à secondes composé* dont se servent communément les Astronomes. Telle est, pour le fond des choses, la belle découverte de Huyghens, qu'il développa ensuite avec toute l'étendue & toute la sagacité du génie, dans son fameux ouvrage intitulé *Horologium oscillatorium* ; & qui a été universellement applaudie & adoptée par tous les savans & par tous les artistes de l'Europe.

Il nous reste maintenant à donner en détail une idée exacte & précise des différentes mesures dont il est sans cesse question, soit dans les sciences, soit dans le commerce & dans la vie civile.

Mesures du temps.

IV°. L'année solaire, celle qui règle les saisons, est de 365 jours 5 heures 48 minutes & environ 44 secondes. (*Phys.* 1137.)

Le jour moyen (*Phys.* 1326) est de 24 heures ; l'heure, de 60 minutes ; la minute, de 60 secondes ; la seconde, de 60 tierces ; la tierce, de 60 quartes. Ainsi un jour moyen est de 1440 minutes, de 86400 secondes, de 5184000 tierces : une heure est de 3600 secondes, de 216000 tierces : une minute est de 3600 tierces.

Mesure uni-
verselle du
tems.

Dans les calculs astronomiques & chronologiques, on a souvent besoin d'une mesure fixe & universelle du tems, à laquelle on puisse rapporter les différentes époques astronomiques & politiques des nations anciennes & modernes : sans quoi on ne fait à quoi répondent ces époques dans chaque chronologie isolée. Ce fut dans cette vue que Joseph Scaliger imagina la fameuse période Julienne, pour servir de mesure universelle & de terme de comparaison en fait de chronologie. Le monde savant a adopté avec empressement cette période (*); & les grandes époques des différentes nations sont maintenant rapportées à la première année de cette période, dans les plus célèbres chronologistes, & en particulier par le savant Jésuite Petau.

La période Julienne est le produit des trois cycles connus de tout le monde, du cycle solaire, du cycle lunaire, & du cycle d'indiction; ou de 28 par 19 & 15 : c'est-à-dire un espace de 7980 ans, dans lequel on ne peut avoir le même nombre pour les trois cycles, mais au bout duquel les trois cycles reviennent dans le même ordre. La période Julienne commence précisément 4713 ans avant l'ère chrétienne, le premier janvier; soit que la Création soit antérieure, soit qu'elle soit postérieure à cette époque idéale : ainsi l'année 4713 avant l'ère chrétienne, est la première année de la période Julienne. Pour savoir à quelle année de la période Julienne répond une année donnée après *Jesus-Christ*, il ne faut qu'ajouter 4713 à la somme de l'année donnée 1772, par exemple; & l'on a l'année de la période Julienne qui répond à l'année donnée de l'ère

(*) ETYMOLOGIE. Période; révolution, circuit: de *πῆξ*, *circum*, autour; & de *ἰδω*, *via*, chemin: quasi *via in circuitum*, seu *via in se rediens*.

chrétienne. De même, pour trouver à quelle année de cette période répond telle *année donnée avant Jésus-Christ*, par exemple, l'année 747; il n'y a qu'à soustraire l'année donnée 747, de 4714: le reste 3967 marquera l'année de la période Julienne à laquelle répond l'année donnée.

Dans la chronologie, la certitude & la précision ne remontent guère que jusqu'au commencement de l'ère des Olympiades: tout ce qui est antérieur n'a plus rien de fixe & de précis, soit dans l'histoire profane, soit dans l'histoire sacrée. Nous allons placer ici une table des principales époques rapportées à la période Julienne: cette table, depuis l'année présente jusqu'à la première année des Olympiades, est tracée exactement d'après la chronologie des Petau & des Bossuet, chronologie adoptée par le savant de Lalande dans son astronomie. Nous n'y ferons point mention des époques profanes antérieures à l'ère des Olympiades, par exemple, de la prise de Troye & de l'expédition des Argonautes, parce qu'elles n'ont pas assez de certitude historique. Bossuet place la prise de Troye, vers l'an 1184 avant l'ère chrétienne: Newton ne place l'expédition des Argonautes, antérieure au siège de Troye, qu'environ 900 ou 936 ans avant l'ère chrétienne. Il est vrai que la chronologie de Newton a été combattue & réfutée par MM. Wiston, Freret, Maraldi, & plusieurs autres savants: mais que prouve ce conflit d'opinions, sinon l'incertitude des choses? Les Chinois & les Indiens n'ont aucune époque fixe & précise, qui remonte plus loin, ou même aussi loin que l'ère des Olympiades: au-delà, c'est chez eux, comme dans les tems héroïques des Grecs, des Egyptiens, des Babyloniens, un tems d'incertitude & de confusion. Dans cette table, l'ère de Nabonassar, à laquelle les deux plus grands astronomes de l'antiquité, Hipparque & Ptolomée, ont rapporté leurs observations

& leurs calculs, mérite une attention spéciale.

Quant aux *époques sacrées*, antérieures à l'ère des Olympiades, nous nous sommes conformés dans cette table, à la chronologie même des Livres saints, laquelle nous paroît ne pas toujours quadrer ni avec celle de Bosfuet, ni avec celle de Petau : le premier place la Création 4004 ans, & le second 3983 ans avant l'ère chrétienne. On trouvera cette chronologie, telle que nous la traçons depuis la dédicace du temple de Salomon jusqu'à la Création, dans les sources sacrées que nous citons dans la seconde table ; c'est-à-dire, dans les différentes polyglottes (*) où se trouve à la fois & le texte hébreu des Juifs en caractère chaldaïque, & le texte grec des Septante, & le texte hébreu des Samaritains en ancien caractère hébraïque, avec leurs traductions respectives en latin. Il ne s'agit, dans les deux premières époques de cette seconde table, que de réunir par une simple addition, les années des différents Patriarches, au tems où ils deviennent peres, depuis Adam jusqu'à Isaac (*Phys.* 530) : la somme sera le nombre des années écoulées depuis la création jusqu'au déluge, & depuis le déluge jusqu'à la vocation d'Abraham ; vocation qui donne commencement au Peuple de Dieu, & qui répond primitivement à la soixante-quinzième année de ce Patriarche, vingt-cinq ans avant la naissance d'Isaac. La troisième & la quatrième époques de la seconde table, se trouvent toute calculées dans les sources sacrées que nous y citons. Quant aux deux dernières époques de la même seconde table, s'il y a quelque petite différence de chronologie entre le texte hébreu & le texte des

(*) ETYMOLOGIE. Polyglotte, ouvrage en plusieurs langues : de *πολύς*, *multus* ; & de *γλῶττα*, *lingua*. Ce terme est affecté uniquement à la Bible ou à la collection des Livres saints en plusieurs langues,

PREMIERE TABLE CHRONOLOGIQUE.

Époques principales, selon la Vulgate.	Années de la période Julienne.	Années avant Je- sus-Christ.	Époques primitives, selon les Sept ant.,
	... 1	...	
	639	3353 *	La Création, <i>anté- rieure de 639 ans à la période Julienne.</i>
	
	2	4715	
	1	4714	
<i>Commencement de la période Julienne.</i>	* ... 1	4713	
	2	4712	
La Création.	*	
	718	3996	
	
	1148	3119 *	Le Déluge.
	
Le Déluge.	* ...	2340	
	2374	...	
Vocation d'Abraham.	* ...	1914 *	Vocation d'Abraham.
	2800	1914	
	<i>Tems héroïques</i>
Sortie d'Égypte.	* ...	1484	
	3230	...	<i>des Grecs &</i>
	
Dédicace du Temple de Salomon.	* ...	1004	
	3710	...	<i>des Egyptiens.</i>
	...	777 *	
	3937	...	
Ere des Olympiades.	* ...	776	Petau : <i>Doctrina tem- porum.</i>
	3938	...	
Fondation de Rome.	* ...	753	Bossuet : <i>Discours sur l'Histoire univer- selle.</i>
	3961	...	De la Lande : <i>Astro- nomie</i> , tom. II, pag. 324 & 328, édition de 1771.
	
Ere de Nabonassar.	* ...	747	
	3967	...	
Délivrance des Juifs, sous Cyrus.	* ...	536	
	4178	...	
Mort d'Alexandre.	* ...	324	
	4390	...	
	...	201	
Prise de Carthage, sous Scipion.	*	
	4492	...	
	4711	3	<i>Naissance effective de de Jesus-Christ.</i>
	4712	2	
	4713	1	
Ere chrétienne.	* ...	1	Années depuis Jesus- Christ.
	4714	...	
	
Ere des Mahométans.	* ...	622	
	5335	...	
	
	6485	1772 *	Année présente.

SECONDE TABLE CHRONOLOGIQUE.

Epo-ques.	CHRONOLOGIE des Livres saints.	Selon l'Hébreu.	Selon les Septante.	Selon les Samaritain.	
I.	Depuis la Création, jusqu'au Déluge.	1656	2234	1307	Gen. 5.
II.	Depuis le Déluge, jusqu'à la vocation d'Abraham.	426 (*)	1145	1040	Gen. 5. 12.
III.	Depuis la vocation d'Abraham, jusqu'à la sortie d'Egypte.	430	430	430	Exod. 12.
IV.	Depuis la sortie d'Egypte, jusqu'à la dédicace du Temple.	480	440	III. Regum, 6.	
V.	Depuis la dédicace du Temple, jusqu'à la liberté sous Cyrus.	468	468	Bossuet : <i>Discours sur l'Histoire universelle.</i>	
VI.	Depuis la liberté sous Cyrus, jusqu'à Jésus-Christ.	536	536		
	TOTAL	3996	5353		

Depuis le Déluge jusqu'à Jésus-Christ, selon l'Hébreu & la Vulgate, 2340 ans ; Selon les Septante, 3119 ans : différence, depuis la création jusqu'à Jésus-Christ, 1357 ans ; depuis le Déluge jusqu'à Jésus-Christ, 779 ou 830 ans.

(*) REMARQUE. La généalogie des Patriarches, depuis le Déluge jusqu'à la vocation d'Abraham, ne donne strictement, selon l'Hébreu & la Vulgate, que de 365 ans (*Phys.* 530). En y ajoutant environ 60 ans pour l'âge de Caïnan omis dans le texte Hébreu & dans le texte Samaritain, & rétabli dans le texte des Septante & dans l'Evangile selon saint Luc ; ou en étendant cette époque jusqu'à l'entrée d'Abraham en Egypte, où commence l'époque suivante ; nous compterons avec Bossuet, 426 ans, pour nous conformer ici à la chronologie la plus reçue.

La Table chronologique qui se trouve dans le second volume de notre *Physique*, page 97, doit être conforme à celle-ci ; & si (faute d'un caractère omis) elle étoit différente, c'est à celle-ci qu'il faudroit s'en rapporter.

Septante, nous en faisons abstraction, à l'exemple de presque tous les chronologistes. En rapportant, dans la première table, les différentes époques sacrées à la période Julienne, & selon la chronologie de la Vulgate & selon la chronologie des Septante, nous ne dissimulerons point que s'il falloit nous décider pour l'une de ces deux chronologies déterminément, celle des Septante auroit la préférence,

Nous ne faisons aucune mention, dans cette première table, de la chronologie Samaritaine, qui diffère encore de la chronologie de la Vulgate & de la chronologie des Septante : parce qu'elle nous paroît avoir moins de certitude que les deux dernières. Selon la chronologie Samaritaine, ou selon la chronologie du Pentateuque conservé en langue & en caractère hébraïque par les schismatiques Samaritains, Adam (*Phys.* 530) devint père à 130 ans; Seth, à 105; Enos, à 90; Caïn, à 70; Malaléel, à 65; Jared, à 62; Henoc, à 65; Mathusalem, à 67; Lamech, à 53; Noé, à 500; Sem, à 100; Arphaxad, à 35; Salé, à 130; Heber, à 134; Phaleg, à 180; Reu, à 132; Sarug, à 130; Nachor, à 79; Tharé, à 70; Abraham, à 100; Isaac, à 60. En supposant que dans les premiers tems, les copistes Hébreux & Samaritains marquassent l'âge où les Patriarches devenoient pères, par les lettres de leur alphabet (14 III^e); il est clair qu'une lettre mise en place d'une autre, a pu occasionner cette diversité de chronologie.

On nomme *Ere*, un dénombrement d'années commencé à certain point que quelque grand événement fait remarquer. Telle est l'*ere* chrétienne, qui a pour époque la naissance de Jesus-Christ. Il faut cependant observer ici que, selon la plupart des savans, la naissance effective de Jesus-Christ paroît précéder d'un ou deux ans l'*ere* chrétienne.

Mesures de l'étendue & des poids.

V°. En attendant la convention d'une mesure universelle, les Géometres François rapportent maintenant toutes leurs mesures à la *toise de l'Académie Royale des Sciences*, qui est celle du grand châtelet de Paris, & celle qui a servi à mesurer les trois premiers degrés du méridien sous l'équateur. En vertu d'une déclaration du Roi de l'année 1766, ont été construites environ 80 toises parfaitement semblables à celle de l'équateur & du châtelet; & elles ont été envoyées aux procureurs généraux des parlements, de même que l'aune de Paris & le poids de marc: en sorte que dans les principales villes du royaume, cette mesure existe dans toute son exactitude.

La *toise royale* est de 6 pieds: le pied, de 12 pouces: le pouce, de 12 lignes: la ligne, de 12 points. Le point n'a aucune dimension, ou n'a que des dimensions comme infiniment petites, dont on fait abstraction.

Le *pas géométrique* est de 5 pieds. Cette mesure n'est guere d'usage chez les auteurs François.

La *lieue commune* de France est de 2287 toises. Quelques auteurs lui donnent quatre toises de moins.

Le *mille d'Italie* contient mille pas géométriques, ou 5000 pieds, ou 833 toises & un tiers. Quelques auteurs donnent, les uns plus & les autres moins d'étendue, au mille d'Italie: nous nous en tiendrons à l'idée que nous venons d'en donner.

Le *moyen rayon de la terre* est d'environ 3269985 toises; qui font 19619910 pieds; qui font environ 1430 lieues communes de France. (*Phys.* 1377.)

La *circonférence d'un cercle* se divise en 360 degrés (309): le degré, en 60 minutes; la minute, en 60 secondes; la seconde, en 60 tierces; la tierce, en 60 quartes. Ainsi un cercle est de 360 degrés, de

21600 minutes, de 1296000 secondes, de 7776000 tierces: un degré est de 60 minutes, de 3600 secondes, de 216000 tierces.

Le *pouce quarré* contient 144 lignes quarrées: le pied quarré, 144 pouces quarrés, ou 20736 lignes quarrées.

La *toise quarrée* renferme 36 pieds quarrés, ou 5184 pouces quarrés.

La *toise cube* contient six fois 36 pieds cubes, ou 216 pieds cubes.

L'*arpent* ou le *journal* est toujours de cent perches quarrées: mais la perche est plus grande ou plus petite en différents lieux, & souvent dans le même lieu: sa plus grande longueur est de vingt-huit pieds; sa plus petite, de dix-huit. A Paris, la perche est de 18 pieds; & l'arpent y contient 900 toises quarrées, la perche quarrée ayant neuf toises quarrées de superficie. Dans l'usage des Eaux & Forêts, par tout le royaume, la perche est de 22 pieds; & l'arpent contient 1344 toises & 4 neuvièmes de toise.

Le *muid de bled* à Paris, contient 12 septiers; le septier, deux mines ou 12 boisseaux; la mine, deux minots; le minot, trois boisseaux; le boisseau, seize litrons. Le boisseau de bled pèse de 21 à 22 livres; & il y a 144 boisseaux dans le muid.

Le *muid de vin* à Paris, contient 37 septiers & demi, ou 300 pintes, y compris la lie; le septier, huit pintes; la pinte, deux chopines.

Le *millier* contient dix quintaux; le quintal, cent livres; la livre, deux marcs ou 16 onces; le marc, 8 onces; l'once, 8 gros; le gros, 72 grains; l'once, 576 grains.

Il seroit évidemment avantageux pour les sciences; pour le commerce, pour la société, que sous un même Monarque il n'y eût qu'une même loi, qu'un même poids, qu'une même mesure: c'est l'inutile vœu que

forment depuis long-tems, les savans & les patriotes,

Mesures de l'étendue comparées,

VI^o, Comme on a souvent besoin de comparer les mesures étrangères, anciennes & modernes, avec nos mesures; voici, d'après M. de Lalande, les plus intéressantes de ces mesures, rapportées à nos mesures françoises. Nous ne garantissons pas pleinement l'exactitude de tous ces rapports: les personnes qui auroient quelque doute sur cet objet, pourront consulter l'auteur de qui nous les tirons, & qui cite lui-même les autorités sur lesquelles il se fonde, dans son *Astronomie*, dernière édition, tome III, page 94.

Toises de France,

Le mille romain de Pline, est de	757 + $\frac{1}{10}$
Le mille romain de Strabon,	766,
Le mille moderne de Rome,	764,
Le mille d'Angleterre,	830,
Le li des Chinois,	263,
Le stade des anciens Romains,	94 + $\frac{691}{1000}$
Le stade Egyptien,	114 + $\frac{13}{100}$
Le pied des anciens Romains, est de	<i>Pouces, lignes.</i> 10. 10 + $\frac{90}{1000}$
Le pied grec,	11. 4 + $\frac{16}{100}$
Le pied arabe,	9. 10 + $\frac{72}{100}$
Le pied d'Alexandrie,	13. 1 + $\frac{2}{10}$
La coudée des Hébreux,	19. 10 + $\frac{4}{10}$
Le pied d'Angleterre,	11. 3 + $\frac{1114}{100000}$
Le pied du Rhin, de Danemarck,	11. 7 + $\frac{181}{10000}$
Le pied de Vienne en Autriche,	11. 8 + $\frac{117}{10000}$
La Vare de Castille,	30. 11.
Le palme romain moderne,	8. 3 + $\frac{33}{1000}$
Le palme de Naples,	9. 8 + $\frac{11}{1000}$
L'archine de Russie,	26. 6 + $\frac{1}{10}$
Le pied royal de la Chine,	11. 2 + $\frac{2}{10}$

Dilatation des mesures par la chaleur.

VII°. Tout le monde sait que les différents corps se dilatent par la chaleur & se condensent par le froid (*Phyf.* 216) : il faut donc avoir égard à ces variations, quand on a besoin d'une extrême précision dans les mesures que l'on cherche. Par exemple, lorsqu'on mesure une grande distance ou une grande base sur terre entre deux objets éloignés & invariables, on se sert d'une toise qui est ordinairement de fer : & comme cette toise est sujette à se dilater par la chaleur & à se condenser par le froid, on trouve dans la distance mesurée pendant un tems froid, un plus grand nombre de toises ou de pieds que quand la même distance est mesurée pendant un tems chaud. Il est donc essentiel, quand on rapporte une semblable opération, de marquer à quel degré de chaleur on l'a faite, afin de faire connoître quelle devoit être alors la longueur de la toise qui a servi de mesure.

M. de la Condamine a trouvé qu'une toise de fer s'allonge d'environ $\frac{1}{87}$ de ligne, pour chaque degré du thermomètre de Reaumur ; ou plus exactement d'une toise & un tiers sur cent mille toises : de sorte que si une distance a été trouvée de 100000 toises, le thermomètre étant à zéro (*Phyf.* 211) ; cette même distance sera trouvée de 100000 + 21 + 7, le thermomètre étant à 21 degrés au-dessus de la congelation.

Suivant les expériences de M. Berthoud, faites dans une étuve où le thermomètre de Reaumur étoit monté de zéro à 27 degrés ; sur des verges de 3 pieds 2 pouces 5 lignes de longueur, de 5 lignes de large, & de 3 lignes d'épaisseur,

Le cuivre jaune s'est allongé de de lignes
 Le cuivre rouge, de
 Le fer battu à froid, de

$\frac{221}{369}$
 $\frac{167}{360}$
 $\frac{78}{360}$
 Biv

L'acier trempé & revenu bleu, de	$\frac{77}{360}$	de ligne,
Le fer battu à froid & recuit, de	$\frac{77}{360}$	
L'acier trempé & ensuite recuit, de	$\frac{49}{360}$	

MÉTHODE DES GÉOMETRES.

8. DÉFINITION I. On nomme *méthode des Géomètres*, la manière dont ils procèdent pour démontrer ou pour découvrir la vérité. Cette méthode consiste à donner d'abord des définitions des objets dont il est question ; à partir de certains axiomes avoués, d'où doit découler la vérité à établir ou à découvrir ; à faire certaines demandes ou suppositions évidemment possibles & incontestables, qui doivent servir à trouver ou à démontrer la chose dont il s'agit. Ainsi procéder dans un ouvrage, par définitions, par axiomes, par demandes, c'est suivre ce qu'on appelle la méthode des Géomètres.

I°. Les *définitions* sont l'explication des termes dont on se sert, & des idées qu'on y attache ; pour en fixer le sens, pour éviter l'ambiguïté, la confusion, la contestation.

II°. Les *axiomes* sont des propositions dont la vérité est incontestable ; qui sont si évidentes en elles-mêmes & par elles-mêmes, qu'elles n'ont pas besoin de preuves ; & qui peuvent servir à démontrer une foule d'autres propositions liées avec elles.

III°. Les *demandes* sont des suppositions ou des hypothèses si évidemment possibles, ou des choses si faciles à faire, que personne ne les conteste : comme si l'on suppose qu'il y ait une ligne tirée d'un point à un autre ; que cette ligne se meuve sur un plan ; qu'un plan tourne sur une ligne ; ou si l'on demande qu'il soit permis d'ajouter un nombre à un autre, de doubler ou de tripler une grandeur donnée ; & ainsi du reste,

9. DÉFINITION II. C'est par le moyen des définitions, des axiomes, des demandes, que le Mathématiciens établissent & démontrent toutes leurs propositions, qui sont de quatre sortes; théorèmes, problèmes, corollaires, & lemmes. Delà dans leurs ouvrages une suite lumineuse de propositions tellement assorties & liées ensemble, que les vérités qu'on y démontre, se déduisent les unes des autres, & forment entr'elles un enchaînement merveilleux.

I°. Un *théorème* (*) est une proposition dont il faut simplement démontrer la vérité.

II°. Un *problème* est une proposition dans laquelle il s'agit d'enseigner la manière de faire quelque chose; & de démontrer que celle qu'on propose pour l'exécution, est infaillible.

III°. Un *corollaire* est une proposition qui découle d'une vérité précédente & démontrée.

IV°. Un *lemme* est une proposition que l'on ne démontre que pour pouvoir démontrer par son moyen, d'autres propositions suivantes.

Outre ces quatre sortes de propositions, on emploie aussi des *remarques* ou *scholies*, pour l'éclaircissement de quelques propositions, ou pour en montrer l'application & en expliquer l'usage.

(*) ÉTYMOLOGIES. *Théorème*, *τίσιμα*; proposition dont on voit ou dont on démontre la vérité. De *τίσιμα*, théorie, contemplation, vision intuitive des choses; ou de *θεώωμαι*, *video*, je vois. *Problème*, *πρόβλημα*; proposition avancée qu'on résout ou qu'on donne à résoudre: de *πρόβάλλω*, proposer, jeter en avant. *Lemme*, *λημμα*: chose qu'on prend & qu'on établit pour en établir quelque autre. *Axiome*, *ἀξίωμα*; maxime constante & reçue de tout le monde: d'*ἀξίω*, estimer digne d'être avoué & applaudi; juger établi & reçu. *Corollaire*, vérité utile, qui découle ou qu'on extrait d'une proposition démontrée: de *ρῶω*, *extraho*, & de *κορώνη*, ou de *κόρυλλα*, petite couronne: *quasi veritas ab aliâ fluens, instar coronilla ingenii vi obiens*.

10. DÉFINITION III. Les Géomètres emploient aussi quelquefois un autre genre de démonstration, qu'on appelle la *preuve de superposition*.

Cette preuve de superposition consiste à placer, non mécaniquement & en réalité, mais mentalement & par la pensée, deux figures planes l'une sur l'autre, par exemple deux triangles; & si l'on conçoit évidemment que les deux figures, placées l'une sur l'autre, se répondent nécessairement dans tous les points correspondants qui forment leurs côtés & qui les terminent, l'égalité de ces deux figures est démontrée, & sert souvent de fondement à de nouvelles démonstrations.

Cette preuve de superposition est fondée sur cet axiome de métaphysique, qu'on doit affirmer des choses, ce que l'on conçoit évidemment dans les choses. Dans les deux triangles en question, placés l'un sur l'autre par la pensée, on conçoit évidemment que toutes les parties de l'un quadrant avec toutes les parties correspondantes de l'autre, sans excès & sans défaut, il regne entre l'un & l'autre triangle une parfaite égalité : donc on peut & on doit affirmer cette égalité.

AXIOMES DE MATHÉMATIQUES.

II. OBSERVATION. Comme les deux parties des mathématiques, le Calcul & la Géométrie, sont également fondées sur un certain nombre d'axiomes évidents en eux-mêmes, & par eux-mêmes, il est à propos d'en présenter & d'en réunir ici les principaux sous un même point de vue. Tous les axiomes mathématiques dérivent primitivement de cet axiome fondamental de toutes les connoissances humaines : on peut & on doit affirmer des choses, ce que l'on conçoit évidemment dans les choses ; comme nous l'avons observé & expliqué dans notre métaphysique (*Mét.* 154). Voici donc les axiomes qui fondent toutes les démonstrations mathématiques.

I°. *Le tout est plus grand que sa partie : le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.* On entend par partie d'un tout, une portion quelconque de ce tout, qui n'est pas le tout. Par exemple, dans la grandeur 100, une partie peut être 99 ; & alors l'autre sera 1 ; & ainsi du reste.

II°. *Toute grandeur est égale à elle-même.* Elle ne peut donc être ni plus grande, ni plus petite que toutes ses parties prises ensemble,

III°. *Quand deux grandeurs sont égales entr'elles, on peut prendre l'une pour l'autre ; ou substituer l'une à l'autre.* Par exemple, si le nombre 10 unités est égal à une dizaine d'unités ; il est indifférent qu'en faisant l'addition, je mette dans la somme, dix unités ou une dizaine d'unités ; qu'en faisant la multiplication, je multiplie par un nombre donné 4 ou 6, dix unités ou une dizaine d'unités ; & ainsi du reste,

De même si une ligne donnée AB de six toises est égale à une autre ligne donnée ab, j'aurai la même somme de toises 12, en prenant deux fois l'une ou l'autre indifféremment ; j'aurai le même produit, en multipliant l'une ou l'autre indifféremment par un même nombre 4, ou par une même ligne MN.

IV°. *Deux grandeurs, discrètes ou continues, qui sont égales chacune à une troisième grandeur, sont égales entr'elles.* Par exemple, si M est égale à 10 ; si N est égale à 10 ; donc M est égale à N.

V°. *Les grandeurs égales entr'elles, qui ont reçu des augmentations ou souffert des diminutions égales, restent encore égales.* Par exemple, si les grandeurs M & N sont égales chacune à la grandeur 10 ; en retranchant une même grandeur 3 à chacune, on aura deux restes égaux 7 ; en ajoutant une même grandeur 100 à chacune, on aura deux nouveaux tous 110, égaux entr'eux,

VI°. *Les grandeurs qui étant d'abord égales entr'elles ;*

ont reçu des augmentations ou souffert des diminutions inégales, sont devenues inégales. Par exemple, à deux grandeurs égales 10 & 10, ajoutez 2 d'un côté & 4 de l'autre : les deux grandeurs nouvelles 12 & 14 seront inégales. A ces deux mêmes grandeurs égales 10 & 10, ôtez 5 d'un côté & 3 de l'autre, les deux grandeurs restantes 5 & 7 seront inégales.

VII°. *Les grandeurs qui étant inégales entr'elles ont eu des augmentations ou des diminutions égales, restent toujours inégales.* Par exemple, à deux grandeurs inégales 10 & 15, ôtez ou ajoutez une même grandeur 4 ; les grandeurs restantes 6 & 11, ou les grandeurs augmentées 14 & 19, seront inégales.

VIII°. *Une grandeur est toujours contenue une fois & une seule fois en elle-même.* Par conséquent, une grandeur divisée par elle-même, est égale à l'unité : mais une grandeur retranchée d'elle-même, devient nulle ou égale à zéro. La grandeur a , divisée par a , est $= 1$: la grandeur a , moins la grandeur a , est $= 0$.

Avant d'entrer en matière, il est nécessaire de prévenir le lecteur sur quelques signes qu'on trouve très-fréquemment dans les ouvrages de Mathématiques. Ce signe $=$ signifie *est égal* : ce signe $+$ signifie *plus* : ce signe $-$ signifie *moins* : ce signe \times signifie *multiplié par*. Ainsi, $5 + 2 = 7$: de même $5 - 2 = 3$: ainsi encore, $5 \times 2 = 10$. Ces quatre lettres C. Q. F. D., qui terminent la plupart des démonstrations mathématiques, signifient : *ce qu'il falloit démontrer*.



PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE.

PREMIERE PARTIE. LE CALCUL.

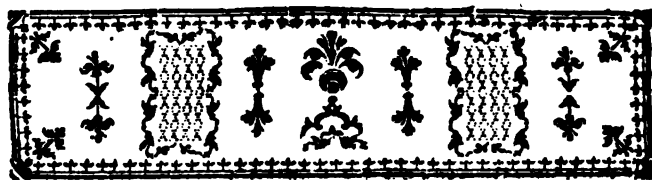
CALCUL ARITHMÉTIQUE : Idée générale des nombres ; Addition , Soustraction , Multiplication incomplexe , Division incomplexe , Multiplication complexe , Division complexe , Multiplication & Division par les fractions de l'unité.

CALCUL ALGÈBRIQUE : Ses principes & ses regles ; formation du Quarré & du Cube , & extraction des Racines quarrées & cubiques ; exaltation & extraction des Quantités algébriques.

CALCUL ANALOGIQUE , ou théorie des Raisons , des Proportions , des Progressions , géométriques & arithmétiques : Calcul des Raisons simples , des Fractions , des Raisons composées , des Progressions finies & infinies.

CALCUL ANALYTIQUE , ou théorie des Equations : leur formation , leur Résolution , leur application à divers problèmes fondamentaux : Regle de Trois , de Cinq , de Compagnie , d'Alliage : somme infinie des parties proportionnellement décroissantes.





PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE, OU ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES.

PREMIER TRAITÉ.

LE CALCUL ARITHMÉTIQUE.

12. DÉFINITION I. **L'**ARITHMÉTIQUE est la *Science des Nombres*, sur lesquels elle apprend à faire différentes opérations dont elle donne & démontre les règles. Ces opérations consistent à ajouter un nombre à un autre ou à plusieurs autres, pour en avoir la somme; à soustraire un nombre d'un autre, pour en trouver la différence; à multiplier un nombre par un autre, pour en avoir le produit; à diviser un nombre par un autre, pour en avoir le quotient, ou pour trouver combien de fois le petit nombre est contenu dans le grand. L'Arithmétique a donc pour objet, comme nous l'avons annoncé, les grandeurs discrètes, dont la

valeur est déterminée (2). Arithmétique ; science qui a pour objet les nombres : d'Ἀριθμός, *numerus*.

13. DÉFINITION II. Le *nombre* est un assemblage de plusieurs unités, ou de plusieurs parties de l'unité. Ainsi une seule unité, ou une seule partie de l'unité, ou 1, n'est point un nombre : mais 2 est un nombre ; 10 est un nombre ; 2 tiers de l'unité font un nombre ; 3 dixièmes de l'unité, ou trois parties d'une unité divisée en dix portions égales, font un nombre. Parmi les nombres, sur lesquels opere l'Arithmétique, il y en a d'abstraits & de concrets, d'incomplexes & de complexes, d'entiers & de fractionnaires, dont il est à propos de donner ici des notions générales & préliminaires.

I°. Les *nombres abstraits* sont ceux qui expriment des unités en général, sans les appliquer à des grandeurs particulières & déterminées : par exemple, 1000. Les *nombres concrets* sont ceux qui expriment des grandeurs particulières & déterminées : par exemple, 1000 toises, 1000 lieues, 100 hommes, 4550 livres.

II°. Les *nombres complexes* sont ceux qui contiennent plusieurs espèces de quantités, comme des livres & des sols ; des toises & des pieds. Les *nombres incomplexes* sont ceux qui ne contiennent qu'une même espèce de quantité, par exemple, de toises.

III°. Un *nombre entier* est celui qui contient l'unité plusieurs fois exactement ; par exemple, 5, 9, 1. Un *nombre fractionnaire* ou une fraction, est celui qui contient une ou plusieurs parties égales d'une unité. Par exemple, si on conçoit que l'unité est divisée en douze parties égales, dont on prenne 5 ; ces cinq-douzièmes feront une fraction, que l'on écrit en cette manière, $\frac{5}{12}$.

Il faut donc deux nombres pour former une fraction, par exemple la fraction cinq-douzièmes. L'un 5, placé au-dessus, exprime combien l'on prend de parties égales du tout, qui est ici l'unité divisée en 12 parties ;

on l'appelle le *numérateur*: l'autre 12, placé au-dessous, marque en combien de parties le tout est divisé; on l'appelle le *dénominateur*.

SIGNES NUMÉRIQUES.

14. OBSERVATION. Comme la *Science des Nombres* est extrêmement nécessaire à toutes sortes d'égards; il n'est point de nation qui n'ait imaginé des signes ou des caractères pour exprimer les différents nombres & pour faire aisément les calculs. Mais parmi ces signes ou ces caractères, ceux qui nous viennent des Arabes, sont incontestablement les plus commodes; & toutes les nations éclairées les ont généralement adoptés, du moins dans l'Europe, non seulement dans le commerce, mais encore dans les sciences & dans les beaux-arts. Ces caractères sont au nombre de dix, tels qu'on les voit ici; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; ils signifient zero, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf. On les nomme *chiffres*. Le premier chiffre ne signifie rien, quand il est seul: mais quand il est joint à d'autres chiffres, il sert à augmenter la valeur de tous ceux qui le précèdent; comme nous l'expliquerons bientôt. On nomme *chiffres positifs*, tous les chiffres différents du zero.

1°. Tous les hommes, dans leur enfance, commencent naturellement à compter par leurs doigts: delà vraisemblablement l'accord surprenant de tous les peuples, à l'exception des anciens Chinois & d'une petite nation de Thraces, à choisir le même système de numération par *progression décuple*; c'est-à-dire, à compter d'abord jusqu'à dix, pour avoir une *dixaine*: à recommencer ensuite en disant l'équivalent de dix plus un ou onze, dix plus deux ou douze, dix plus trois ou treize, & ainsi de suite jusqu'à vingt, pour avoir deux dixaines: à continuer ainsi par trois, quatre,

cinq dizaines, jusqu'à dix dizaines ou une *centaine* : à compter ensuite les centaines jusqu'à dix, pour avoir dix centaines ou un *mille* ; & ainsi du reste.

II°. Un peuple sex-digitaire, au lieu de la progression décuple, auroit vraisemblablement adopté la *progression duo-décuple* ; & il s'en feroit très-bien trouvé ; c'est-à-dire qu'il auroit d'abord compté jusqu'à douze, pour avoir une douzaine ou une *première classe A* de nombres : qu'il auroit recommencé ensuite à dire douze plus un, douze plus deux, jusqu'à vingt-quatre, pour avoir deux douzaines : qu'il auroit repris ensuite deux douzaines plus un, trois douzaines plus un, onze douzaines plus douze ou douze douzaines, qu'il auroit représentées par un signe & par un nom propre à exprimer cette *seconde classe B* de nombres, laquelle auroit répondu à cent-quarante-quatre unités. Après quoi, il auroit repris cette seconde classe de nombres une fois, deux fois, douze fois, pour en former une *troisième classe C* de nombres, laquelle eût valu douze fois la classe précédente ou 1728 unités.

Il auroit fallu simplement à ce peuple deux signes ou chiffres de plus ; & en supposant que notre zéro précédé de l'unité exprimât une douzaine ou leur première classe ou suite A, leur système de numération auroit eu tous les avantages du nôtre ; & il auroit eu de plus l'avantage d'admettre le plus grand nombre de diviseurs d'usage, entre un & douze, entre douze & soixante : ce qui seroit extrêmement commode en une foule d'occasions, par exemple, dans le calcul des heures, qui ont soixante minutes ; dans le calcul des pieds, qui ont douze pouces ; des pouces, qui ont douze lignes ; dans le calcul des degrés du cercle, qui ont soixante minutes ; des minutes, qui ont soixante secondes. Si un grand Monarque, ami des sciences & des arts, parvient jamais à la monarchie universelle dans le monde savant ; ou il foudroyera

le calcul à la progression duo-décuple ; ou il ordonnera que les principales mesures du tems, de l'étendue, des poids, aillent en progression décuple : ce dernier parti seroit le plus simple & le plus commode.

III°. Quant à la maniere de représenter les nombres par des signes écrits ; presque toutes les anciennes nations se sont accordées à y employer les caracteres de leur alphabet.

Chez les Hébreux, les neuf premieres lettres de l'alphabet servoient à exprimer les neuf premiers nombres, ou les unités : les neuf lettres suivantes exprimoient des dizaines : le reste de l'alphabet, avec quelques signes particuliers, exprimoit les centaines. Ainsi on avoit : aleph 1, beth 2, ghimel 3, dalet 4, he 5, vau 6, zain 7, het 8, teth 9, jod 10, kaph 20, kaph-aleph 21, lamed 30, mem 40, nun 50, nun-ghimel 53, samech 60, phe 70, fadé 80, coph 100, resch 200, sin 300, thau 400.

Chez les Grecs, on imita la méthode des Hébreux. Ils exprimerent les neuf premiers chiffres, par les lettres de leur alphabet, qui se trouverent analogues à celles de l'alphabet hébreu (*); & quand ils n'eurent pas des caracteres correspondants à ceux de l'alphabet hébreu, au lieu d'employer le caractère suivant, ils aimerent mieux y substituer un signe particulier. Ainsi n'ayant point de lettre *vau* parmi eux, ils mirent en sa place un *sigma-tau* joints ensemble en cette maniere $\sigma\tau$, auquel ils donnerent le nom d'*ισσημον-νau*, & qui signifie : signe qui tient la place du caractère *vau*. Au lieu donc de prendre les neuf premieres lettres, pour exprimer les neuf premiers chiffres ; ils expri-

(*) ETYMOLOGIE. Alphabet ; d'*αλφα* & *βητα*, nom des deux premieres lettres des Grecs, qui répondent aux deux premieres lettres Aleph & Beth des Hébreux.

merent ces nombres par alpha 1, betha 2, gamma 3, delta 4, epsilon 5, sigma-tau 6, zeta 7, eta 8, teta 9; afin de continuer avec les Hébreux à désigner les dizaines par les caractères suivants iota 10, kappa 20, lambda 30, mi 40, ni 50, qui répondent aux caractères jod, kaph, lamed, mem, nun des Hébreux. Comme le reste de l'alphabet grec est fort différent de l'alphabet hébreu; les Grecs prirent le parti, pour ne pas causer trop d'embarras, de l'employer tel qu'il étoit, en intercalant entre leur seizième & leur dix-septième lettre, un signe en forme de broche pour exprimer le nombre 90. Ainsi on eut μ' égal à 40 ou $\mu' = 40$, $\nu' = 50$, $\xi' = 60$, $\theta' = 70$, $\pi' = 80$, $\iota' = 90$, $\rho' = 100$, $\sigma' = 200$, $\tau' = 300$, $\upsilon' = 400$, $\phi' = 500$, $\chi' = 600$, $\psi' = 700$, $\omega' = 800$. Un signe composé d'un pi dans un sigma renversé exprima 900. Sur quoi il faut remarquer que pour exprimer les nombres jusqu'à mille exclusivement, on mit un *accent aigu au-dessus des signes*; & que pour exprimer les milles, on mit l'accent aigu au-dessous des mêmes signes en cette manière : $\acute{\alpha} = 1$; $\acute{\beta} = 2$; $\acute{\theta} = 9$; $\acute{\iota} = 10$; $\acute{\lambda} = 11$; $\acute{\kappa} = 20$; $\acute{\nu} = 23$; $\acute{\rho} = 100$; $\acute{\sigma} = 130$; ensuite, $\alpha_1 = 1000$; $\beta_1 = 2000$; $\iota_1 = 10000$; $\kappa_1 = 20000$; & ainsi du reste.

On se servit aussi quelquefois chez les Grecs, pour exprimer les nombres, de six lettres majuscules, qu'ils redoubloient jusqu'à quatre fois chacune : ces six lettres sont $\text{I} = 1$, $\text{II} = 5$, $\Delta = 10$, $\text{H} = 100$, $\text{X} = 1000$, $\text{M} = 10000$. Ainsi on avoit $\text{III} = 3$, $\text{IIII} = 9$, $\Delta\Delta = 20$, $\Delta\Delta\text{IIII} = 38$, $\text{HH} = 200$, $\text{HHH}\Delta\text{II} = 312$, $\text{XXH} = 2100$, $\text{MM} = 20000$; & ainsi de suite. Chez les Grecs & chez les Hébreux, les lettres de l'alphabet sont aussi employées quelquefois pour exprimer par leur suite naturelle, l'ordre & le nombre des livres ou des chapitres ou des versets dans un ouvrage.

Chez les Romains, la numération se marqua aussi par

le moyen des lettres de l'alphabet, mais sans aucune relation à l'ordre & à la suite de ces lettres. La lettre I signifia un : la lettre V signifia cinq : la lettre X signifia dix : la lettre L, cinquante ; la lettre C, cent ; la lettre D, cinq-cents ; la lettre M, mille ; & ainsi du reste. Ces trois manieres d'exprimer les nombres, étoient fort embarrassantes dans le calcul.

Chez les Arabes, on représenta tous les nombres possibles par dix signes particuliers, qui n'ont rien de commun avec les lettres de l'alphabet : ce sont les dix chiffres dont nous venons de parler. On peut regarder le système de numération arabique, comme l'un des chefs-d'œuvre de l'esprit humain : mais ce système est dû aux Indiens, de qui les Arabes l'ont emprunté, comme l'Europe l'a emprunté des Arabes.

SYSTÈME DE NUMÉRATION ARABIQUE.

15. AXIOME. Dans une suite de chiffres, la valeur d'un chiffre augmente en proportion décuple, en allant de droite à gauche.

EXPLICATION. On est convenu (& c'est ici le fondement de toute l'Arithmétique) que chaque chiffre auroit à la fois & une valeur absolue, & une valeur relative. La valeur absolue d'un chiffre quelconque 2, par exemple, est celle qu'il a, étant considéré seul : la valeur relative du même chiffre, est celle qui lui convient à raison du rang qu'il tient dans une suite de chiffres.

Par exemple, la valeur du chiffre 2, placé au dernier rang en A, est deux unités. La valeur du même chiffre 2, placé au second rang en B, est deux dizaines. La valeur du même

A.	2
B.	20
C.	200
D.	2000
E.	20000

chiffre 2, placé au troisième rang en C, est deux *centaines*. La valeur du même chiffre 2, placé au quatrième rang en D, est deux *mille*. La valeur du même chiffre 2, placé au cinquième rang en E, est deux *dixaines de mille*. Et ainsi de suite à l'infini.

Par où l'on voit que, selon la convention dont nous parlons, & qui n'est qu'une *demande mathématique* évidemment possible (8); un même chiffre acquiert une valeur dix fois plus grande ou augmente en *proportion décuple*, à chaque pas qu'il fait, en allant de la droite vers la gauche. Car dans l'exemple précédent, deux dixaines valent dix fois, deux unités; deux centaines valent dix fois, deux dixaines; deux mille valent dix fois, deux centaines; deux dixaines de mille ou vingt mille valent dix fois, deux mille; & ainsi de suite à l'infini. On peut dire la même chose de tout autre chiffre, du 3, du 6, du 8; & ainsi des autres.

16. COROLLAIRE I. Une unité d'un chiffre positif quelconque, vaut plus que tous les chiffres qui le suivent.

EXPLICATION. Selon l'axiome précédent, le chiffre 1 vaut une dixaine en A, une centaine en B, mille en C, dix mille en D; & ainsi de suite : or la valeur du chiffre 1 est toujours & partout plus grande que celle de tous les chiffres qui le suivent, qui sont cependant les plus grands qu'il soit possible; comme on voit.

A.	19
B.	199
C.	1999
D.	19999
a.	69
b.	699
c.	6999
d.	69999

De même, une seule unité du chiffre 6, lequel renferme six unités, vaut

une dizaine en *a*, une centaine en *b*, mille en *c*, dix mille en *d*: une unité de ce chiffre *e* vaut donc encore plus que tous les chiffres qui le suivent, qui sont encore les plus grands qu'il soit possible.

17. COROLLAIRE II. *Chaque unité d'un chiffre vaut dix unités du chiffre qui le suit immédiatement.*

EXPLICATION. Soit le nombre A, égal à 4524. Selon l'axiome précédent, si je veux augmenter ce nombre A, de 10 unités B; je n'ai qu'à convertir dans le nombre A, le 2 en 3. Si je veux encore augmenter ce même nombre A, de 300 unités C; je n'ai qu'à convertir dans le nombre A, le 5 en 8. Si je veux encore augmenter ce même nombre A, de 2000 unités D; je n'ai qu'à convertir le 4 en 6. Le nombre M ou 6834, vaudra autant que tous les nombres inférieurs ABCD.

M.	6834
A.	4524
B.	10
C.	300
D.	2000

De même, selon l'axiome précédent, dans le nombre 37259; chaque unité du 3, vaut dix unités du 7; chaque unité du 7, vaut dix unités du 2; chaque unité du 2, vaut dix unités du 5; chaque unité du 5, vaut dix unités du 9. Les unités du 3, sont des dizaines de mille; les unités du 7, sont des mille; les unités du 2, sont des centaines; les unités du 5, sont des dizaines; les unités du 9, sont des unités simples.

18. COROLLAIRE III. *Un zéro mis à la fig d'un nombre, rend ce nombre dix fois plus grand: puisqu'il donne à tous les chiffres qui composent ce nombre, un rang plus avancé, où leur valeur relative est dix fois plus grande.*

I°. Par le moyen d'un zero mis à la fin d'un nombre quelconque 4624, les unités 4, deviennent des dizaines; les dizaines 2, deviennent des centaines; les centaines 6, deviennent des mille; les mille 4, deviennent des dizaines de mille; ce nombre sera 46240.

II°. Par la même raison, si à la suite d'un nombre, on met deux zeros; ce nombre devient cent fois plus grand: si on met trois zeros, ce nombre devient mille fois plus grand; & ainsi de suite, toujours en proportion décuple.

III°. Si le chiffre ajouté à la fin d'un nombre, est un chiffre positif; il augmente ce nombre, comme le zero; & il l'augmente de plus, de toute sa valeur intrinsèque. Par exemple, si au nombre 6 j'ajoute un zero, j'aurai 60; & si au lieu d'un zero, je mets 9, j'aurai $60 + 9$ ou 69.

IV°. Par la raison contraire, un zero retranché à la fin d'un nombre, rend ce nombre dix fois plus petit; deux zeros retranchés, le rendent cent fois plus petit; trois zeros retranchés, le rendent mille fois plus petit; & ainsi de suite, toujours en raison décuple. Retranchez un zero au nombre 1000, le reste ne vaut plus que 100; retranchez encore un zero, le reste ne vaut plus que 10; retranchez encore un zero, le reste ne vaut plus que 1.

Tranches & expressions des chiffres.

19. OBSERVATION. Quand un nombre est exprimé par une suite considérable de chiffres, on divise les chiffres en tranches, qui contiennent chacune trois caractères, excepté la première, qui peut n'en contenir que deux ou même qu'un seul. C'est en allant de droite à gauche que l'on partage le nombre en tranches, lesquelles expriment des unités, des mille, des

millions, des billions, des trillions, des quadrillions; des quintillions, des sextillions; & ainsi de suite. Quelques auteurs ont appelé ou appellent encore *milliard*, ce qu'on nomme aujourd'hui plus communément *billion*: la dénomination est différente; mais la valeur exprimée par les chiffres soumis à ces deux dénominations, est précisément la même. Voici un exemple général de cette division des chiffres en tranches.

Trillions.	Billions.	Millions.	Mille.	Unités.
2 9,	6 7 0,	3 8 4,	6 3 2,	3 0 4,
dixaines. unités.	centaines. dixaines. unités.	centaines. dixaines. unités.	centaines. dixaines. unités.	centaines. dixaines. unités.

1°. On peut bien juger, par ce que nous avons dit, que quoique chaque tranche contienne des centaines, des dixaines & des unités, cependant une tranche signifie des parties de nombre fort différentes. La tranche des millions marque des centaines, des dixaines & des unités de millions; la tranche des mille, marque des centaines, des dixaines & des unités de mille, & ainsi des autres.

11°. La dénomination propre à chaque tranche signifie un nombre, qui vaut mille fois plus que celui qui est exprimé par la tranche suivante. Un billion vaut mille millions. Un million vaut mille fois mille. Un mille vaut mille unités.

20. PROBLÈME I. *Exprimer en chiffres, des nombres énoncés dans le discours.*

*SOLUTION. Soit le nombre énoncé, cinq cents quarante-sept millions, six cents vingt-trois mille, quatre cents soixante-neuf. Ce nombre équivaut à cinq cents

millions, quarante millions, sept millions, fix cents mille, vingt mille, trois mille, quatre cents, soixante-neuf; comme on le voit marqué ici. Or, comme dans cette suite, les zeros ne servent qu'à faire garder aux chiffres positifs les rangs qu'ils doivent tenir pour conserver leur valeur; il s'ensuit qu'en supprimant les zeros & en écrivant tous les chiffres positifs sur une même ligne, on aura l'expression arithmétique du nombre énoncé dans le discours, 547623469.

500, 000, 000							
• 40, 000, 000							
• 7, 000, 000							
• • 600, 000							
• • • 20, 000							
• • • • 3, 000							
• • • • • 400							
• • • • • • 60							
• • • • • • • 9							
<hr/>							
547, 623, 469							

Si dans le nombre énoncé il se trouve quelques nombres intermédiaires, supprimés dans quelque tranche, il faut mettre des zeros à leur place: afin de conserver aux chiffres précédents leur rang & leur valeur.

Par exemple, soit le nombre énoncé, quatre cents millions, quarante mille, trois; dans lequel il n'est point fait mention des dizaines & des unités de millions, des centaines & des unités de mille, des centaines & des dizaines d'unités. En mettant les chiffres positifs à leur place, & en mettant un zero à la place de chaque nombre omis ou supprimé dans une

400, 000, 000				
. 00, 000, 000				
. 0, 000, 000				
. . 000, 000				
. . 40, .000				
. . . 0, 000				
. . . 000				
. . . . 00				
. 3				
<hr/>				
400, 040, 003				

tranche, vous aurez l'expression arithmétique du nombre énoncé dans le discours; ainsi que dans l'exemple

précèdent où il n'y a point de semblable omission.

21. PROBLÈME II. *Enoncer dans le discours, des nombres exprimés en chiffres.*

SOLUTION. Divisez le nombre donné, en tranches des unités, des mille, des millions, & ainsi de suite : par là vous verrez aisément quelle est la qualité des chiffres à énoncer.

Il ne faut énoncer le nom propre à chaque tranche, qu'à la fin de cette tranche ; & il faut s'abstenir de nommer les rangs où il se trouve des zeros à la place des chiffres positifs. Par exemple, vous énoncerez ce nombre 908, 047, 024, en cette manière : neuf cents huit millions, quarante-sept mille, vingt-quatre. Vous énoncerez aussi ce nombre, 70, 080, 000, 900, en cette manière : soixante-dix billions, quatre-vingts millions, neuf cents : on ne fait ici aucune mention des mille ; parce qu'il n'y a aucun chiffre positif dans cette tranche.

LES QUATRE REGLES DE L'ARITHMÉTIQUE.

22. OBSERVATION. Il y a quatre Opérations générales dans l'Arithmétique ; savoir, l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, & la Division. Ces quatre Opérations sont le fondement de toutes les autres : car tous les calculs doivent toujours, en dernière analyse, se résoudre en calculs arithmétiques.

L'Addition, la Soustraction, la Multiplication & la Division peuvent avoir pour sujet ou des nombres tous homogènes & de même nature, & alors elles sont *incomplexes* ; ou des nombres hétérogènes & de différente nature, par exemple des livres & des sols, des toises & des pieds, des heures & des minutes, & alors elles sont *complexes*.

Pour donner plus de simplicité & d'intelligibilité à

tout le calcul arithmétique, nous distinguerons par-tout les opérations incomplexes, des opérations complexes : les premières serviront à faire mieux entendre les dernières.

PARAGRAPHE PREMIER.

L'ADDITION.

23. DÉFINITION. **L'**ADDITION est une opération par laquelle étant donnés tous les nombres partiels, on trouve le nombre total : ou bien, l'Addition est une opération par laquelle ayant plusieurs nombres, on en trouve la *somme*. Elle consiste à trouver un tout, dont on connoît toutes les parties.

L'Addition incomplexe donne la somme de plusieurs nombres homogenes : l'Addition complexe donne la somme de plusieurs nombres, dans lesquels se trouvent des quantités hétérogenes.

L'ADDITION INCOMPLEXE.

24. REGLE. *Pour faire l'Addition*, disposez tous les nombres donnés, les uns sous les autres; enforte que les unités répondent aux unités, les dizaines aux dizaines, les centaines aux centaines, les mille aux mille; & ainsi de suite. Ensuite tirez une ligne au-dessous de tous les nombres donnés, & observez ce qui suit.

4	0	2	9
		4	9
3	0	2	6
<hr/>			
7	1	0	4

1°. Commencez par la colonne des unités à droite, & prenez-en la somme. Si cette somme peut être exprimée par un seul chiffre, écrivez ce chiffre sous la colonne des unités. Mais si cette somme ne peut être exprimée que par deux chiffres, écrivez sous la colonne des unités le dernier des deux chiffres, & re:

prenez le premier pour le joindre à la colonne des dizaines. Par exemple, si la somme de la colonne des unités est 24, & écrivez 4 sous la colonne des unités, & retenez 2 dizaines pour le joindre à la colonne des dizaines.

II°. Passez à la colonne des dizaines & prenez-en la somme, en y joignant ce que vous avez retenu de la colonne des unités. Si cette somme peut s'exprimer par un seul chiffre, vous l'écrirez sous cette colonne. Mais si cette somme renferme deux chiffres, vous écrirez sous cette colonne le dernier chiffre, & vous retiendrez le premier pour l'ajouter à la colonne des centaines.

III°. Vous opérerez de la même manière sur la colonne des centaines, des mille, des dizaines de mille, des centaines de mille, des millions, & ainsi de suite, plaçant toujours le dernier chiffre sous la colonne dont vous prenez la somme, & retenant le premier chiffre pour le joindre à ceux de la colonne plus avancée vers la gauche, où il aura, comme il doit avoir, une valeur dix fois plus grande. (17.)

IV°. Quand dans quelques-unes des colonnes, par exemple dans la colonne des centaines, il ne se trouve aucun chiffre positif; pour lors on met un zero au-dessous, si l'on n'a rien retenu de la colonne précédente: mais si l'on a retenu quelque chose, il faut écrire sous cette colonne le chiffre qu'on a retenu.

V°. Si les nombres à additionner contenoient un trop grand nombre de chiffres, en telle sorte que le nombre résultant d'une seule colonne ne pût être exprimé que par trois chiffres; on partagera cette addition unique en deux additions, dont on prendra la somme séparément. Si on veut cependant ne faire qu'une seule addition, on écrira la valeur du dernier des trois chiffres sous sa colonne, & on portera la valeur des deux autres chiffres sur la colonne précé-

dente. Par exemple, si dans la colonne des unités, on avoit pour somme 124; on écriroit 4 sous la colonne des unités, & on porteroit 12 dizaines sur la colonne des dizaines.

DÉMONSTRATION. La démonstration de cette Opération est fondée sur cet axiome : *le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble*. Les nombres qu'on additionne & dont on cherche la somme, sont les parties : le nombre ou la somme qui en résulte, est le tout. Dans un exemple quelconque, tel que celui qu'on voit ici, je démontre que la somme qui résulte de l'addition, est égale à la somme de tous les nombres donnés.

I°. Les nombres donnés ne contiennent que des unités, des dizaines, des centaines, des mille, des dizaines de mille, des centaines de mille, des millions. Or, en observant la règle précédente, j'ai pris la somme de toutes les unités, de toutes les dizaines, de toutes les centaines, de tous les mille, de toutes les dizaines de mille, de toutes les centaines de mille, de tous les millions : donc j'ai pris toutes les parties des nombres donnés. Toutes les parties prises ensemble sont le Tout : donc j'ai pris le Tout, lequel est exprimé par la somme totale 9362294.

II°. Quant à ce que prescrit la règle, d'ajouter à la colonne précédente, le premier des deux chiffres qui expriment une colonne; cela est fondé sur ce que nous avons dit ailleurs, que la valeur des chiffres augmente en proportion décuple en allant de droite à gauche. (15 & 17.)

	8, 240, 364
Nombres donnés.	460, 723
	70
	40, 234
	620, 903
Somme.	9, 362, 294
Preuve.	1, 102, 110

En faisant l'Addition dont il est ici question, j'ai trouvé dans la dernière colonne à droite, 14 unités : j'en ai placé 4 sous cette colonne ; & j'en ai retenu 10 pour la colonne des dizaines, où je les ai exprimées par 1 ; parce que dans cette colonne des dizaines, une unité vaut dix unités de la colonne qui la suit à droite. De même dans la colonne des dizaines, j'avois 19 unités : j'en ai placé 9 sous cette colonne ; & j'en ai porté 10 sur la colonne des centaines, en disant, je porte 1 ; parce que dans cette colonne des centaines, une unité vaut dix unités de la colonne des dizaines. De même encore, dans la colonne des centaines, j'avois 12 unités qui valent des centaines ; j'en ai placé 2 sous cette colonne, & j'en ai retenu 20 pour la colonne suivante, où je les ai exprimé par 2, qui valent deux mille. Et ainsi du reste. Donc, en observant la règle précédente, j'ai pris toutes les parties des nombres donnés, & j'ai exprimé toutes ces parties par un nombre total qui en représente la somme sans excès & sans défaut. C. Q. F. D.

25. REMARQUE. Si on demandoit par hasard, pourquoi l'on commence cette opération par la droite, plutôt que par la gauche ; la raison en est, que les chiffres croissent en proportion décuple en allant de droite à gauche, & non en allant de gauche à droite. Il faut donc, dans cette opération, commencer par la dernière colonne à droite ; afin que les sommes partielles, qui se trouvent assez souvent trop grandes pour être exprimées par un seul chiffre, puissent successivement rejeter leur premier chiffre sur la colonne précédente. C'est pour une semblable raison que l'on commence aussi la Soustraction & la Multiplication par la droite.

Par la raison contraire, on commence la Division par la gauche ; afin que les portions trop petites d'un nombre, qui échappent au diviseur dans les premiers

rangs, puissent être en prise au même diviseur dans les rangs suivants, où leur valeur sera exprimée par des nombres dix fois plus grands dans leur énonciation ; comme on le verra dans la suite.

Preuve de l'Addition.

26. DÉFINITION. On nomme *preuve de l'Addition*, une opération par laquelle on se convainc qu'on a observé la règle précédente, & qu'on ne s'est point trompé en comptant.

Quand, après avoir fait une addition, on veut savoir si on ne s'est point trompé dans l'opération, il faut ôter de la somme totale qu'on a trouvée, tous les membres additionnés ; & s'il ne reste rien à la fin de cette Soustraction, c'est une marque que l'Addition est exacte & bien faite : par cet axiome ; *si à un Tout on retranche toutes ses parties, il doit ne rester rien.* Le tout est la somme qui résulte de l'Addition : les parties de ce tout, sont les nombres qui forment les colonnes correspondantes.

La preuve de l'Addition se fait en cette manière. On commence par la première colonne à gauche, dont la somme doit être soustraite du premier chiffre ou des premiers chiffres qui répondent à cette colonne ; & on écrit le reste au-dessous, s'il y a un reste, pour le joindre par la pensée au chiffre suivant de la somme totale. On opère de même pour les colonnes suivantes ; & à la fin de la preuve, il doit rester zéro. Dans cette opération, on commence par les chiffres plus avancés vers la gauche : afin que les restes des chiffres qui ont plus de valeur, puissent refluer successivement sur les chiffres suivants qui ont une valeur moindre.

Ainsi pour faire la preuve de l'Addition précédente ; de 9 j'ôte 8 ; reste 1, qui joint avec le 3 vaut 13. De 13 j'ôte 2 + 4 + 6 qui font 12 ; reste 1, qui joint

joint avec le 6 vaut 16. De 16 j'ôte la colonne correspondante 4 + 8 + 4 + 2 ou 18; reste zero. De 2 je n'ôte rien; reste 2, qui joint avec l'autre 2 vaut 22. De 22 j'ôte la colonne correspondante 21; reste 1, qui joint avec le 9 vaut 19. De 19 j'ôte la colonne correspondante 18; reste 1, qui joint avec le 4 vaut 14. De 14 j'ôte la colonne correspondante 14; reste zero; &c. l'opération est exacte.

Il ne faut pas confondre la démonstration de l'addition, avec la preuve de l'addition : la démonstration fait voir que la règle est infaillible ; la preuve fait voir qu'on a observé cette règle. La preuve est proprement un examen, une *épreuve* de l'opération ; pour découvrir si elle a été faite conformément à la règle infaillible.

27. REMARQUE. La Soustraction, la Multiplication & la Division, ont chacune une *preuve* ou épreuve destinée à en constater l'exactitude. La preuve de l'Addition est la soustraction; la preuve de la Soustraction est l'addition; la preuve de la Multiplication est la division; la preuve de la Division est la multiplication; comme on le verra par la suite. Ainsi ces règles se servent réciproquement de preuve.

Mais dans ces opérations on se dispense assez communément de faire la preuve par l'opération contraire ; quand on a l'habitude du calcul arithmétique : on se borne à revoir ou à refaire la même opération en une autre manière. Par exemple, dans l'Addition, on se borne à faire une seconde fois la même addition, en prenant les colonnes de bas en haut, après les avoir prises auparavant de haut en bas.

L'ADDITION COMPLEXE.

28. RÈGLE. On observe dans l'Addition des nombres complexes, la même règle que dans l'Addition des nombres incomplexes ; & on commence par les plus petites

especes en allant aux plus grandes. Sur quoi il faut remarquer qu'en passant d'une espece plus petite à une plus grande, comme des deniers aux sols; il faut voir combien de fois celle à laquelle on passe, est contenue dans la somme des plus petites, n'écrivant que le reste, s'il y en a, sous la moindre espece, & retenant le nombre des fois que la grande espece est contenue dans la somme des plus petites, pour ajouter ce nombre à la plus grande.

Par exemple, si on passe des deniers aux sols, & qu'il y ait 38 deniers; comme cette somme de 38 deniers contient trois sols & deux deniers de plus, on écrira 2 sous les deniers, & on retiendra 3 pour les ajouter aux sols. De même, si en passant des sols aux livres on trouve 47 sols; comme cette somme contient 2 livres & 7 sols, on écrira 7 sous la colonne des sols, & on retiendra 2 pour les ajouter aux livres.

Premier Exemple.

Livres, sols, den.		
42	18	8
125	4	11
72	16	9
1, 000	6	10
<hr/>		
Somme. 1,	241	7 2
<hr/>		
Preuve. 0,	112	3 0

Second Exemple.

Toises, pieds, pouces;		
42	5	3
12	2	7
9	0	11
24	4	8
<hr/>		
Somme. 89	1	5
<hr/>		
Preuve. 12	2	0

Par exemple encore, 29 pouces font 2 pieds & 5 pouces: je pose 5 sous la colonne des pouces; & je retiens 2, que je porte à la colonne des pieds. Prenant la somme des pieds, j'ai 13 pieds, qui font 2 toises & 1 pied: je pose 1 sous la colonne des pieds, & je porte 2 à la colonne des toises. Après quoi, le reste de l'addition est une addition incomplète.

Il faut faire la même chose, quand opérant sur d'autres quantités complexes, on passe des quantités plus petites aux quantités plus grandes, par exemple; des minutes aux heures, des heures aux jours; des onces aux livres; des lignes aux pouces, des toises aux lieues; & ainsi du reste.

La preuve de l'Addition complexe, se fait comme dans l'Addition incomplex (26), en ôtant de chaque chiffre de la somme totale, les chiffres supérieurs qui lui répondent. Par exemple, dans l'addition des toises, du chiffre 8, ôtez $2 + 1 + 4$ qui font 7; reste 1; qui joint par la pensée avec le chiffre 9, vaut 19. De 19, ôtez $2 + 2 + 9 + 4$ qui font 17; reste 2 toises; qui font 12 pieds. On aura donc dans la colonne des pieds, 13 pieds; dont il faudra retrancher $5 + 2 + 4$ pieds, qui font 11 pieds: restent 2 pieds qui valent 24 pouces dans la colonne suivante où il y en a 5. De 29 pouces ôtez $3 + 7 + 11 + 8$, qui font 29 pouces: il ne restera rien; & l'addition est exacte & bien faite.

PARAGRAPHE SECOND.

LA SOUSTRACTION.

29. DÉFINITION. **L**A *Soustraction* est une opération par laquelle, étant donnés deux nombres, on cherche leur différence: ou bien la Soustraction est une opération par laquelle on ôte un moindre nombre d'un plus grand. Le nombre qui résulte de la soustraction est appelé *reste* ou *différence*.

Par exemple, si de 6 on ôte 3, c'est une soustraction. Cette opération consiste à chercher une *partie inconnue* d'un Tout, dont on connoît déjà l'*autre partie*, aussi bien que le Tout, qui ne contient que ces deux par-

ties. Dans l'exemple proposé le Tout est 6 : la partie connue est 3 : l'autre partie de ce Tout est celle que l'on cherche, savoir 3 ; qui est la différence entre les deux nombres donnés.

LA SOUSTRATION INCOMPLEXE.

30. AXIOME. *Lorsqu'on ajoute le même nombre à deux autres nombres, la différence de ces nombres est toujours la même, avant & après l'addition.*

Par exemple, si j'ajoute 10 à 4 & à 6, la différence des sommes augmentées 14 & 16 est la même que celle des nombres primitifs 4 & 6,

31. REGLE. *Pour faire la Soustraction, il faut écrire le nombre que l'on veut soustraire au-dessous de l'autre, en sorte que les unités de l'un répondent aux unités de l'autre, les dizaines aux dizaines, les centaines aux centaines, les mille aux mille, & ainsi de suite. Il faut ensuite tirer une ligne au-dessous des deux nombres : après quoi,*

1°. On commence par ôter les unités du nombre à soustraire, des unités de l'autre. Il peut arriver trois cas : ou que le chiffre inférieur qui marque les unités, *soit plus petit* que le chiffre supérieur ; & alors on écrit le reste au-dessous dans le même rang : ou que les deux chiffres *soient égaux* ; & alors on met un zero au-dessous ; parce que le caractère inférieur étant ôté de l'autre, il ne reste rien : ou que le caractère inférieur *soit plus grand* que le supérieur : pour lors il faut ajouter une dizaine au chiffre supérieur ; ensuite, de la somme composée de cette dizaine & de ce chiffre, ôter celui qui est au-dessous, & écrire le reste sous la ligne dans le même rang.

II°. Comme on a ajouté une dizaine au nombre dont on veut soustraire, il faut ajouter tout autant au nombre que l'on doit soustraire. C'est pourquoi il faut

supposer que dans ce dernier nombre le chiffre du rang précédent est augmenté d'une unité, laquelle est égale à la dizaine ajoutée au chiffre plus reculé d'un rang vers la droite dans le nombre supérieur ; puisque chaque unité d'une colonne vaut dix unités de la colonne suivante. (17.)

III°. En opérant de même sur toutes les colonnes, on prendra la différence des deux nombres dans leurs unités, dans leurs dizaines, de leurs centaines, dans leurs mille, dans leurs dizaines de mille, dans toutes leurs parties : en prenant la différence de toutes les parties des deux nombres donnés, il est évident qu'on prend la différence des deux nombres. Cette différence ou ce reste, jointe au nombre qu'on soustrait, doit égaler le nombre dont on soustrait : puisque le nombre qu'on soustrait & ce reste, sont les deux parties du nombre sur lequel se fait la soustraction.

Voici deux exemples de cette règle. Dans le premier, de 7 ôtez 6 ; reste 1. Ajoutez une dizaine au 2, & de 12 ôtez 3 ; restent 9. Ajoutez au 3 une unité qui vaut une dizaine dans le rang suivant ; & de 4 ôtez 4 : reste zero. De 2 + 10, ôtez 4 : restent 8. Ajoutant une unité au 7, de 9 ôtez 8 : reste 1.

Additionnez le nombre à soustraire avec le reste : vous aurez une somme égale au nombre dont il falloit soustraire. C'est la preuve de la Soustraction.

Premier Exemple.

Du nombre 92, 427 :
soustrayez . . . 74, 336.

Reste. 18, 091.

Preuve. 92, 427.

Second Exemple.

497, 245
88, 378

Reste. 408, 867.

Preuve. 497, 245

DÉMONSTRATION. On se propose dans la Soustraction de trouver le reste du nombre dont on veut soustraire, après en avoir ôté le nombre à soustraire. Or, en suivant la règle proposée, il est évident qu'on trouvera ce reste : puisqu'en suivant cette règle, on prend le reste des unités, le reste des dizaines, le reste des centaines, le reste des mille; & ainsi de suite. Donc on trouvera le reste du nombre dont il faut soustraire, lequel reste exprime l'excès de ce nombre sur l'autre que l'on vouloit soustraire. En suivant la règle, on a pris le reste de toutes les parties : donc on a pris le reste du Tout. C. Q. F. D.

32. **PREUVE.** La *preuve de la Soustraction* se fait par l'addition : c'est-à-dire, qu'il faut ajouter le nombre à soustraire, avec le reste où la différence du nombre supérieur : & la somme des deux sera égale au nombre dont on soustrait, si la soustraction est bien faite. La raison en est évidente : le nombre à soustraire & le reste sont les deux parties du nombre total dont on veut soustraire : donc ces deux parties prises ensemble, doivent être égales à leur Tout. C. Q. F. D.

LA SOUSTRACTION COMPLEXE.

33. **RÈGLE.** Si la *Soustraction* contient des nombres complexes, il faut d'abord opérer sur les plus petits, & les extraire les uns des autres. Si le nombre duquel on extrait, étoit surpassé par l'autre ; il faut ajouter au premier le valeur d'une des quantités précédentes, &, après la Soustraction, ajouter à l'autre nombre dans la colonne suivante une unité : comme on le verra dans les deux exemples suivants, d'après lesquels on peut s'en proposer d'autres semblables en toute espèce de nombres complexes.

<i>Premier Exemple.</i>				<i>Second Exemple.</i>			
Toises, pieds, pouc.				Livres, sols, den.			
Du nombre	348	2	6	Du nombre	123	6	3
soustrayez	237	2	10	soustrayez	97	12	8
Reste.	110	5	8	Reste.	25	13	7
Preuve.	348	2	6	Preuve.	123	6	3

I°. Dans le premier exemple, je ne puis pas ôter ou soustraire 10 pouces, de 6 pouces : j'ajoute la valeur d'une des unités précédentes 12 pouces, à ce nombre 6 ; & j'ai 18 pouces, d'où je soustrais 10, ce qui me donne un reste 8 que j'écris sous cette colonne.

Comme j'ai ajouté 12 pouces ou un pied au nombre supérieur ; il faut, pour rétablir leur différence primitive (30), ajouter la même grandeur au nombre inférieur ; & alors ce nombre inférieur aura 3 pieds, qui ne peuvent pas être soustraits de 2 pieds. J'ajoute donc au nombre supérieur 2, la valeur d'une unité précédente qui est une toise ou 6 pieds ; & j'ai 8 pieds, d'où soustrayant 3 pieds, j'ai pour reste 5 pieds. En passant ensuite aux toises, où la soustraction devient incomplex, j'ajoute une toise au nombre inférieur ; & j'ai dans ce nombre, 8 au lieu de 7.

II°. Dans le second exemple, j'ajoute à la somme des deniers dans le nombre supérieur, la valeur d'une unité précédente qui vaut 12 deniers ; j'ajoute à la somme des sols, la valeur d'une unité précédente qui vaut 20 sols.

III°. Si j'avois à faire une soustraction sur des jours, des heures, des minutes ; j'ajouterois dans le nombre supérieur, à la somme des minutes, la valeur d'une unité précédente qui vaut 60 minutes ; j'ajouterois à la somme des heures, la valeur d'une unité précédente

ou d'un jour qui vaut 24 heures ; & ainsi du reste.

IV°. Pour faire la preuve, additionnez le nombre à soustraire avec le reste ou la différence : si la soustraction est bien faite, la somme de ces deux nombres doit égaler le nombre dont il falloit soustraire. Dans le second exemple $8 + 7$ deniers font 15 deniers, ou un sol & trois deniers : je pose 3 deniers sous la colonne des deniers, & je porte 1 dans la colonne des sols. Ensuite $1 + 12 + 13$ font 26 sols, ou une livre & 6 sols : je pose 6 sols sous la colonne des sols, & je porte 1 dans la colonne des livres. Après quoi, $1 + 7 + 5$ font 13 ; je pose 3 & porte 1 sur la colonne plus avancée. Enfin $1 + 9 + 2$ font 12 que j'écris ; & l'opération est finie & exacte.

PARAGRAPHE TROISIÈME.

LA MULTIPLICATION.

34. DÉFINITION. **L**A *Multiplication* est une opération, par laquelle étant donnés deux nombres, le *Multiplicande* & le *Multiplicateur*, on en trouve un troisième qui doit être au multiplicande comme le multiplicateur est à l'unité. Le nombre qu'il faut multiplier, est le *multiplicande* : le nombre par lequel on multiplie, est le *multiplicateur* : le nombre qui naît de la multiplication, est le *produit*. Par exemple, 5 multiplié par 3 donne 15. Le produit 15, contient autant de fois le multiplicande 5 ; que le multiplicateur 3 contient de fois l'unité.

Dans la table suivante, $5 \times 4 = 20$, par exemple, signifie que cinq multipliés par quatre, ou cinq fois quatre, valent vingt. De même $9 \times 9 = 81$, marque que neuf fois neuf font 81 ; & ainsi du reste.

TABLE POUR LA MULTIPLICATION. (II.)

5	X	4	=	20	8	X	4	=	32
5		5		25	8		5		40
5		6		30	8		6		48
5		7		35	8		7		56
5		8		40	8		8		64
5		9		45	8		9		72
6	X	4	=	24	9	X	4	=	36
6		5		30	9		5		45
6		6		36	9		6		54
6		7		42	9		7		63
6		8		48	9		8		72
6		9		54	9		9		81
7	X	3	=	21	12	X	12	=	144
7		4		28	12		11		132
7		5		35	12		10		120
7		6		42	12		9		108
7		7		49	12		8		96
7		8		56	12		7		84
7		9		63	12		6		72

LA MULTIPLICATION INCOMPLEXE.

35. OBSERVATION. Il y a deux sortes de Multiplications complexes, la simple & la composée. La *Multiplication simple* est celle dont le multiplicateur est exprimé par un seul chiffre : telle est la multiplication de 764 par 6. La *Multiplication composée* est celle dont le multiplicateur contient plusieurs caractères, comme si on multiplie 664 par 25 ou par 325.

36. AXIOME. Le produit de deux chiffres quelconques, comme 4 & 2, est toujours le même ; soit qu'on mul-

tiplie le premier par le second, ou le second par le premier. Cette proposition est évidente, & peut être placée au rang des axiomes : nous en donnerons cependant une démonstration géométrique dans l'Algebre. (93.)

Multiplication simple.

37. REGLE. Quand on veut multiplier un nombre par un multiplicateur qui ne contient qu'un seul chiffre ; il faut écrire le multiplicande, & mettre le multiplicateur au-dessous : puis ayant tiré une ligne sous les deux nombres, on commencera cette opération, comme les précédentes, par la droite ; c'est-à-dire qu'on multipliera d'abord le chiffre du multiplicande qui est au rang des unités, par le multiplicateur.

Si le produit de ce chiffre peut s'exprimer par un seul caractère ; on l'écrit sous le rang des unités. Mais si ce produit ne peut être marqué que par deux chiffres ; on met le dernier sous le rang des unités, & on retient le premier pour l'ajouter au produit des dizaines, sur lesquelles on opere de la même manière, comme aussi sur les centaines, sur les milles, sur les millions ; & ainsi de suite. Par-là on prendra le produit de toutes les parties du multiplicande.

Premier Exemple.		Second Exemple.	
Multiplicande.	912789	Multiplicande.	763478
Multiplicateur.	3	Multiplicateur.	5
<hr/>		<hr/>	
Produit.	2738367	Produit.	3817390
<hr/>		<hr/>	

Dans la multiplication simple, on peut renverser l'ordre, & multiplier le multiplicateur par le multiplicande : le produit sera le même (93). Dans le premier exemple précédent, en multipliant 3 par 912789 ; je dirai, 9 fois 3 font 27 : je pose 7 & retiens 2 que je

porte au rang précédent où ils vaudront deux dizaines ou 20. Ensuite, 8 fois 3 font 24 & 2 que je porte font 26 : je pose 6 & je retiens 2. Après cela, 7 fois 3 font 21, & 2 retenus font 23 : je pose 3 & retiens 2. Ensuite, 2 fois 3 font 6, & 2 retenus font 8. Ensuite une fois 3 fait 3 : enfin 9 fois 3 font 27 ; & l'opération est finie.

Multiplication composée.

38. REGLE. Lorsque le multiplicateur est composé de plusieurs caractères ; pour faire la Multiplication :

I°. On multiplie d'abord chaque chiffre du multiplicande, par le chiffre qui est au rang des unités du multiplicateur ; selon la règle de la multiplication simple.

II°. On multiplie de même le multiplicande entier, par le chiffre qui est au rang des dizaines du multiplicateur ; observant de mettre le dernier caractère de ce second produit au rang des dizaines.

III°. Si y a plus de deux chiffres au multiplicateur, on continue de multiplier tout le multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur, & de mettre le dernier chiffre de chaque produit au rang du chiffre par lequel on multiplie. Les multiplications particulières étant faites, on additionne tous les produits qui en viennent ; & la somme résultante est le produit total.

Premier Exemple.

Multiplicande.	321
Multiplicateur.	412
	<hr/>
	642
	321
	1284
	<hr/>
Produit.	132252

Second Exemple.

Multiplicande.	25729
Multiplicateur.	32
	<hr/>
	51458
	77187
	<hr/>
Produit.	823328

DÉMONSTRATION. I°. La règle prescrit de *multiplier chaque chiffre du multiplicande, par chaque chiffre du multiplicateur*. Il est évident qu'en suivant cette règle on trouvera le produit des unités, des dizaines, des centaines, des milles, & de tous les chiffres suivans du multiplicande ; & par conséquent on aura le produit du multiplicande entier par tous les chiffres successifs du multiplicateur.

II°. La règle prescrit d'*écrire le dernier chiffre de chaque produit, au rang du chiffre par lequel on le multiplie* : la raison n'en est pas moins évidente. Chaque unité du chiffre, qui est par exemple au rang des dizaines du multiplicateur, vaut dix fois la somme du multiplicande. Pour exprimer cette valeur, il faut donc que le dernier chiffre du produit, soit placé sous la colonne des dizaines : sans quoi il n'exprimerait pas les dizaines qu'il doit exprimer. De même chaque unité du chiffre, qui est au rang des centaines du multiplicateur, vaut cent fois la somme du multiplicande : donc, pour exprimer cette somme, il faut que le produit soit écrit sous le rang des centaines ; puisque c'est de centaines qu'il s'agit. Il en est de même des milles, des dizaines de mille, des centaines de mille, des millions, & ainsi du reste.

III°. Dans l'exemple proposé, où il falloit multiplier 321 par 412 ; j'ai pris tout le multiplicande autant de fois que le marquent les unités du multiplicateur, autant de fois que le marquent les dizaines du multiplicateur, autant de fois que le marquent les centaines du multiplicateur : donc j'ai multiplié le multiplicande par tout le multiplicateur ; donc j'ai pris tout le multiplicande autant de fois que le marque le multiplicateur ; donc j'ai rendu le multiplicande 412 fois plus grand qu'il n'étoit, comme le multiplicateur est 412 fois plus grand que l'unité. C. Q. F. D.

39. REMARQUE I. On voit aisément que la Multipli-

eation n'est qu'une espece d'addition, dont les nombres à ajouter sont égaux. Par exemple, multiplier 365 par 240, c'est la même chose que si l'on écrivoit 365 autant de fois qu'il est marqué par 240, c'est-à-dire, deux cents quarante fois; & qu'ensuite l'on fît l'addition de ces nombres placés les uns sous les autres : ce qui seroit fort long. C'est pourquoi l'on a inventé la Multiplication, qui est une maniere abrégée de faire cette sorte d'addition.

40. REMARQUE II. Comme la preuve de l'Addition se fait par la Soustraction, & la preuve de la Soustraction par l'Addition; de même *la preuve de la Multiplication se fait par la Division* : & la preuve de la Division par la Multiplication. Pour savoir si la multiplication a été bien faite, il faut diviser le produit par le multiplicateur. Le quotient doit être égal au multiplicande; puisque ce que la somme primitive a acquis par la multiplication, elle le perd par la division. Dans la pratique, on se borne communément à revoir ou à refaire la multiplication.

Usage de la Multiplication.

41. COROLLAIRE. *La Multiplication sert, entr'autres choses, à réduire les grandes especes en petites* : par exemple, les lieues en toises; les toises en pieds; les livres en sols; les jours en heures. Il faut pour cela multiplier les grandes especes par un nombre qui exprime combien de fois la petite espece est contenue dans la grande.

Ainsi, si l'on veut réduire 54 pieds en pouces, on multipliera 54 par 12 : parce qu'il y a 12 pouces dans un pied. Si l'on veut réduire 30 jours en heures, l'on multipliera 30 par 24. Si l'on veut réduire 24 livres en sols, on multipliera 24 par 20. Si l'on veut réduire 13 lieues en toises, on multipliera 13 par 2287, ou 2287 par 13.

Maniere d'abrégér la Multiplication.

42. REMARQUE. On peut abrégér la pratique de la Multiplication, en certains cas : par exemple,

I°. Quand le multiplicateur est simplement l'unité suivie d'un ou de plusieurs zeros; il n'y a qu'à écrire le multiplicande, & mettre à la fin autant de zeros qu'il y en a au multiplicateur. $740 \times 100 = 74000$.

II°. Quand il y a au multiplicateur des chiffres différens de l'unité, suivis d'un ou de plusieurs zeros; il faut multiplier le multiplicande par les chiffres positifs du multiplicateur, & mettre les zeros à la fin de la somme totale des produits particuliers additionnés. $45 \times 600 = 27000$.

III°. Quand il y a des chiffres positifs suivis de zeros, tant à la fin du multiplicande qu'à la fin du multiplicateur; il faut faire la multiplication comme s'il n'y avoit point de zeros à la fin ni de l'un ni de l'autre, & ajouter au produit total tous les zeros du multiplicateur & du multiplicande. Mais il faut se souvenir qu'il ne s'agit ici que des zeros qui sont à la fin de tous les chiffres positifs; car on doit opérer sur les autres comme sur des chiffres positifs. Ainsi $207000 \times 600 = 124200000$.

EXPLICATION. On entendra les raisons de toutes ces manieres abrégées de faire la Multiplication; si l'on fait attention qu'en mettant un zero à la fin d'un nombre, on rend ce nombre dix fois plus grand; & qu'en mettant deux zeros, on le rend cent fois plus grand, & ainsi de suite.

Par exemple, pour multiplier 560 par 300, je multiplie le 6 & le 5 par le multiplicateur 3; ce qui donne 168: cette somme est mille fois plus petite que le véritable produit. Or, en écrivant à la fin le zero du multiplicateur, & les deux zeros du multiplicande; je la rends mille fois plus grande, & par conséquent

égale au vrai produit (18). Il en est de même des autres manières d'abrégier la multiplication.

Nous n'avons parlé que de la multiplication des nombres complexes : nous parlerons de celle des nombres complexes après la division ; parce que nous aurons besoin de la division pour trouver le produit de ces sortes de nombres.

PARAGRAPHE QUATRIEME.

LA DIVISION.

43. DÉFINITION. **L**A *Division* est une opération par laquelle, étant donnés deux nombres, le Dividende & le Diviseur, on en trouve un troisième qui doit être au dividende, comme l'unité est au diviseur. Le nombre qu'il faut diviser, s'appelle le *Dividende* : le nombre par lequel on divise, est le *Diviseur* : le nombre qui naît de la division, s'appelle *Quotient*, qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Par exemple, 15 divisé par 3 donne 5. Le quotient 5, est contenu dans le dividende 15, autant de fois que l'unité est contenue dans le diviseur 3.

LA DIVISION INCOMPLEXE.

44. OBSERVATION. Il y a deux sortes de division incomplexe, la simple & la composée. La *Division simple* est celle dont le diviseur ne contient qu'un seul chiffre. La *Division composée* est celle dont le diviseur contient plusieurs chiffres. Nous donnerons bientôt les règles de la multiplication & de la division des nombres complexes : il ne s'agit maintenant que des nombres incomplexes.

1°. Pour faire la *Division*, écrivez le diviseur à côté

du dividende vers la droite ; & tirez sous l'un & l'autre une ligne , que vous couperez par une perpendiculaire menée entre le dividende & le diviseur , pour les séparer. En faisant la Division , placez successivement les chiffres au quotient sous le diviseur , en allant de gauche à droite , à mesure que vous les trouverez. Il y aura autant de chiffres au quotient , qu'il y a de membres au dividende.

II°. *Le chiffre qu'on destine ou qu'on met au quotient pour un des membres , ne doit jamais être plus grand que 9.* Car s'il étoit plus grand que 9 , même d'une seule unité , il vaudroit 10 ; & en ce cas il exprimeroit un nombre qui devrait être placé , non au rang auquel on le destine , mais au rang qui le précède (15). Ou bien , si le chiffre qu'on destine au quotient pouvoit valoir 10 , ou une unité d'un chiffre plus avancé vers la gauche ; il faudroit que le nombre dont il est quotient , valût une unité d'un chiffre plus avancé vers la gauche : or un nombre ne peut jamais valoir une unité d'un tel chiffre (16) : donc le chiffre qu'on destine au quotient , ne peut jamais être plus grand que 9.

III°. Si le premier chiffre du dividende vers la gauche est plus grand , ou aussi grand que le diviseur ; ce premier chiffre fait un membre de la Division , & chaque chiffre suivant en est un nouveau membre. Si ce premier chiffre est plus petit que le diviseur , le premier membre de la Division sera formé des deux premiers chiffres du dividende.

La Division simple est très-facile : ce que nous allons en dire préparera à l'intelligence de la Division composée , qui est un peu plus difficile.

Division simple.

45. REGLE. *Pour faire la Division simple ; ou pour diviser un nombre par un seul chiffre :*

I°. On commence à chercher combien de fois le
diviseur

diviseur est contenu dans le premier membre du dividende, pour avoir un quotient ; & on écrit sous le dividende le chiffre qui exprime combien de fois il y est contenu.

II°. On multiplie le diviseur par le chiffre qu'on vient d'écrire au quotient, pour en avoir le produit.

III°. Quand on a trouvé ce produit, on le soustrait de ce premier membre du dividende, pour chercher un reste ; & on écrit au-dessous le reste, s'il y en a, pour le joindre par la pensée avec le second membre du dividende, sur lequel on opère comme sur le premier, pour en avoir le quotient. On fait la même chose pour les membres suivans.

Si quelqu'un des membres qui suivent le premier se trouvoit plus petit que le diviseur, on écrit zero au quotient ; & le membre moindre que le diviseur, se joint avec le chiffre qui suit dans le dividende, pour former le membre suivant. Soit le nombre 9692, à diviser par 4.

Dividende.	9, 692	4	Diviseur.
	1, 010	2, 423	Quotient
		4	
Preuve.	9, 692	9, 692	Produit

EXPLICATION. Je divise d'abord le premier membre du dividende 9, qui exprime des milles : & je dis en 9 mille combien de fois 4 mille ; ou plus simplement, en 9 combien de fois 4 ? Il y est 2 fois. Je mets au quotient 2 qui exprimera des milles. Je multiplie le diviseur 4 par ce premier chiffre trouvé 2 & le produit est 8. J'extrait 8 de 9 ; & j'écris le reste 1 sous le 9.

Je joins par la pensée le reste 1, qui exprime un

mille, au chiffre suivant 6, qui exprime des centaines ; j'ai donc pour *second membre* de la division 16 centaines à diviser par 4 centaines. Je dis : en 16 combien de fois 4 ? Il y est 4 fois. Je place au quotient 4, qui exprimera des centaines. Je multiplie le diviseur 4 par le chiffre trouvé 4 : le produit est 16, qui, extrait du membre à diviser 16, donne pour reste zero.

Je passe au *troisième membre* de la division, lequel est 9 dizaines que je divise par 4 dizaines. Je dis : en 9 combien de fois 4 ? Il y est 2 fois. J'écris au quotient 2, qui exprimera des dizaines. Le diviseur 4 multiplié par ce chiffre 2, donne pour produit 8 ; lequel produit 8 étant extrait de 9, il reste 1, que j'écris sous le 9 pour le joindre avec le dernier chiffre du dividende.

Ce reste 1 est une dizaine, qui jointe au 2, vaut 12 unités : c'est le *quatrième membre* de la division, qu'il me reste à diviser par 4. Je dis encore : en 12 combien de fois 4 ? Il y est 3 fois. J'écris au quotient 3, qui exprimera des unités. Je multiplie le diviseur 4 par ce 3 : le produit est 12, qui extrait de 12, ne laisse aucun reste ; & la division est achevée.

Pour faire la preuve, je multiplie le quotient 2423 par le diviseur 4 : la division sera bien faite, si le produit est égal au dividende.

46. REMARQUE. Quand après la division faite, il reste quelque chose au dernier membre ; on écrit ce reste sous le dividende, & on le sépare par un petit arc, posé à la gauche. Ce reste est le numérateur d'une fraction dont le dénominateur est le nombre qui sert de diviseur.

Dans l'exemple suivant, après la division faite, il reste quatre unités du dividende, à diviser par le diviseur 6. Ces quatre unités divisées par 6, ne sont pas une unité entière pour le quotient, mais seulement 4 sixièmes ou deux tiers d'une unité. Ainsi, quand

après la division faite il y a un reste, ce reste doit n'être jamais assez grand pour donner au quotient une unité.

En faisant la preuve; après avoir multiplié les nombres entiers du quotient par le diviseur, il faut ajouter au produit ce nombre d'unités, qui sont restées du dividende. La raison en est, que ces unités ne sont point entrées dans les nombres entiers du quotient, & qu'elles appartiennent encore au dividende. Le produit, joint à ce reste, doit être égal au dividende; comme on le voit dans l'exemple suivant. En multipliant 23079 par 6, on a pour produit 138474, qui avec le reste 4, égale le dividende.

Dividende.	138478		6	Diviseur:
	<hr/>		<hr/>	
	1045 .		23079 + $\frac{4}{6}$.	Quotient;
Reste	(4		6	
			<hr/>	
Preuve.	138478		138474	
			+ (4	
			<hr/>	

Division composée.

47. REGLE. *La Division composée, ainsi que la Division simple, consiste dans les trois opérations marquées dans la règle précédente (45) :*

I. On divise le dividende par le diviseur, pour avoir un quotient.

II. On multiplie le diviseur par le quotient, pour avoir un produit.

III. On ôte du dividende le produit, pour avoir un reste. . . Ceci s'éclaircira par les exemples que nous allons donner, & par les observations que nous allons faire.

Quoique le diviseur soit toujours le même nombre absolu, il a cependant diverses valeurs relatives. Car

quand il est appliqué à des millions, il extrait un quotient qui exprime des millions. Quand il tombe sur les milles, il extrait un quotient qui exprime des milles; quand il divise des unités, il extrait un quotient qui exprime des unités; & ainsi du reste. Soit le nombre 49326, à diviser par 24.

Dividende.	49 . 326	24	Diviseur.
Produit.	48	2055	Quotient.
Reste.	1		
II. Membre.	13		
Produit.	0		
Reste.	13		
III. Membre.	132		
Produit.	120		
Reste.	12		
IV. Membre.	126		
Produit.	120		
Reste.	(6		

Preuve. 49, 326 égal au Dividende.

EXPLICATION. Le premier membre du dividende est 49, que je sépare du reste par un point. Tous les chiffres suivans feront autant d'autres membres. Il doit y avoir autant de chiffres au quotient, qu'il y a de membres au dividende : il y aura donc quatre chiffres au quotient. Pour observer les trois regles prescrites,

1°. Je divise le premier membre du dividende pour avoir un quotient. Je pourrois d'abord dire en 49 mille combien de fois 24 mille. Deux fois; & je

mettrois 2 au quotient. Mais ne faisant attention qu'au premier chiffre du dividende & au premier chiffre du diviseur, je dis en 4 mille combien de fois 2 mille ? Ou plus simplement encore, en 4 combien de fois 2 ? Deux fois ; & j'écris au *quotient* 2 qui exprime des milles. Je multiplie le diviseur 24 par le quotient 2 : le produit est 48 qui exprime des milles. J'ôte le produit 48, du premier membre 49 du dividende ; & j'ai pour *reste* 1 qui exprime des milles, & à côté duquel j'abaisse le second membre 3, ce qui fait 13 ; savoir, 13 centaines, dont il faut extraire 24 qui exprime aussi des centaines.

II°. J'opere sur le second membre, comme j'ai opéré sur le premier, en observant les trois regles prescrites. Je dis donc en 13 combien de fois 24 : ou plutôt ne faisant attention qu'aux premiers chiffres du dividende & du diviseur, en 1 combien de fois 2 ? Point. J'écris donc zero au quotient ; & la soustraction, ainsi que la multiplication, sont inutiles pour ce membre.

III°. J'abaisse le 2 à côté des chiffres restants ; & j'ai pour troisieme membre 132, qui exprimeront des dizaines. J'opere sur le troisieme membre, selon les trois regles prescrites ; & je dis : en 13 combien de fois 2 ? Six fois. Je multiplie le diviseur 24 par le chiffre 6 que je destine au quotient. Mais le produit 144 étant plus grand que le dividende 132, il ne peut pas en être extrait : parce qu'un nombre plus grand ne peut pas être extrait d'un nombre plus petit.

J'écris donc au quotient le 5, moindre d'une unité. Le 5 marque combien de fois 24 dizaines sont contenues dans 132 dizaines. Je fais la multiplication, & j'ai pour produit 120, que j'extrait de 132. Soustraction faite, il reste 12, à côté duquel j'abaisse le 6 ; & j'ai pour quatrieme membre 126 qui expriment des unités.

IV°. J'opere encore sur le quatrieme membre en suivant les trois regles prescrites. En 12, combien de fois 2? 5 fois; & je mets le 5 au quotient. Je fais la multiplication; le produit est 120. Je fais la soustraction, il reste 6, que je sèpare par un crochet; & la Division est achevée.

A mesure qu'on abaisse un chiffre du dividende, il est bon de l'effacer par un trait oblique; afin de ne pas confondre les chiffres sur lesquels on a opéré, avec ceux sur lesquels il reste à opérer.

DÉMONSTRATION. Diviser un nombre par un autre, c'est prendre sur le dividende, la partie que marque le diviseur. Par exemple, diviser 500 par 50, c'est prendre le cinquantieme de 500. Or, en suivant la regle proposée, on prend sur tout le dividende, la partie marquée par le diviseur. Je le démontre: je prends la partie marquée par le diviseur, sur tous les membres du dividende: donc je la prends sur tout le dividende; puisque le dividende n'est pas distingué de tous ses membres ou de toutes ses parties prises ensemble. C. Q. F. D.

48. OBSERVATION. *La preuve de la Division se fait en multipliant le quotient par le diviseur.* Le diviseur partage un Tout, savoir le dividende, en ses parties égales, dont une est exprimée par le quotient. Il y a dans le Tout ou dans le dividende, autant de parties égales au quotient qu'en exprime le diviseur: donc cette partie qu'exprime le quotient, multipliée par le diviseur, donnera un Tout égal au dividende.

On pourroit également multiplier le diviseur par le quotient; le produit est le même. $100 \times 10 = 1000$; de même, $10 \times 100 = 1000$.

49. REMARQUES. On voit par ce que nous venons de dire, & par la maniere dont nous avons opéré:

I°. Qu'avant d'écrire un chiffre au quotient, il faut l'éprouver par la multiplication; c'est-à-dire, qu'il faut

examiner s'il ne donne pas un produit plus grand que le membre du dividende auquel il répond; & le diminuer toujours d'une unité, jusqu'à ce que le produit n'excede pas le dividende partiel : il faut en même tems qu'il en approche le plus qu'il est possible.

II°. Que quand le diviseur a plusieurs chiffres, il ne faut faire attention qu'au premier chiffre qui correspond au premier ou aux deux premiers chiffres du dividende partiel.

III°. Que pour faire la preuve par la multiplication, on n'a qu'à additionner les divers produits partiels qui ont servi pour faire la soustraction. Les produits, dans l'exemple proposé, sont 48, 120, 120, & le reste 6. Après avoir effacé tous les autres membres, ces produits pris dans l'ordre des colonnes où ils sont placés, donnent pour produit total 49, 326, égal au dividende; & la preuve se trouve toute faite. Il en sera de même dans l'exemple suivant, & dans toutes les Divisions possibles.

50. PROBLÈME. *Diviser 147475, par 362.*

Dividende.	1474.75		362	Diviseur.
Produit.	1448		407	+ $\frac{141}{362}$ Quotient.
Reste.	26			
II. Membre.	267			
Produit.	0			
Reste.	267			
III. Membre.	2675			
Produit.	2534			
Reste.	(141			
Preuve.	147475		égal au dividende.	

SOLUTION. Je considère d'abord en combien des premiers chiffres du dividende qui sont sur la gauche, le diviseur peut être contenu ; & parce que 362 ne peuvent être contenus dans les trois premiers chiffres 147, mais seulement dans les quatre premiers 1474 ; je les sépare des deux autres chiffres 75, par un point. Le premier membre de la division est donc 1474 à diviser par 362.

I°. Comme cette division ne peut se faire tout d'un coup ; je divise seulement les centaines de 1474 par les centaines de 362, en disant : en 14, combien de fois 3 ? Quatre fois & plus. Je pose seulement 4 au quotient : je multiplie le diviseur 362 par le quotient 4 ; & j'ôte du dividende 1474, le produit 1448 ; il reste 26 ; & la première partie de la division est faite.

II°. J'abaisse à côté du reste 26, le premier chiffre suivant 7 ; & le second membre de la division consiste à diviser 267 par 362. Je divise de même les centaines de 267 par celles de 362, en disant : en 2 combien de fois 3 ? Point. Je pose donc zéro au quotient, & la seconde partie est finie.

III°. J'abaisse à côté du reste 267 le chiffre 5, & le troisième membre de la division consiste à diviser 2676 par 362. Je dis donc, en 26 combien de fois 3 ? 8 fois. Je multiplie 362 par 8, & je trouve le produit 2896, lequel étant plus grand que le dividende 2675, me fait connaître que le quotient 8 est trop grand. Je mets donc 7 au quotient : je multiplie 362 par 7 ; j'ôte le produit 2534, de 2675 ; restent 141 ; & parce qu'il n'y a plus de chiffre à abaisser, toute la division est faite : le quotient cherché est 407, & le restant 141, que je mets à côté en fraction, écrivant 362 au-dessous. (46.)

§1. REMARQUE. Quand le diviseur renferme un grand nombre de chiffres, & le dividende un grand nombre de membres ; il est avantageux de marquer

à côté de chaque produit du diviseur par le chiffre qu'on met au quotient, le chiffre qui donne ce produit : parce que ce produit sert souvent pour un nombre suivant, & dispense d'une multiplication qui se trouve toute faite. Par exemple, après avoir multiplié le diviseur 76842756, par 5 que vous mettez au quotient ; marquez à côté du produit 384213780, un signe qui vous rappelle quel produit donne le chiffre 5, en cette manière : $384213780 = 5$. Après avoir multiplié le même diviseur par un chiffre 7 que vous mettez au quotient, marquez de la même manière le produit $537899292 = 7$. Bientôt vous vous appercevrez combien ces signes vous seront utiles pour trouver les autres chiffres du quotient, comme dans la division suivante, qui servira d'exemple général.

Dividende.	
445632100.00000	76842756 Diviseur.
384213780 = 5.	579927 Quotient.
614183200	
537899292 = 7.	
762839080	
691504804 = 9.	
712542760	
691504804 = 9.	
210379560	
153685512 = 2.	
566940480	
537899292 = 7.	
(29041188	

Usage de la Division.

§ 2. COROLLAIRE. *La Division sert, entr'autres choses, à réduire les petites especes en grandes : ce qui se fait en divisant la somme des petites especes, par le nombre qui exprime combien de fois la grande espece contient la petite. Par exemple,*

I°. Pour réduire 36 pieds en toises, je divise 36 par 6 : le quotient sera 6 pieds. Or je n'ai pris que le sixieme du dividende : donc le dividende est six fois plus grand : & s'il est 6 fois plus grand, il vaut donc une espece 6 fois plus grande que les pieds, & par conséquent 6 toises.

II°. De même, pour réduire 100 sols en livres, je divise 100 par 20 : le quotient est 5 sols. Or je n'ai pris que la vingtieme partie du dividende : donc tout le dividende est égal à une espece vingt fois plus grande que les sols, & par conséquent à 5 livres.

III°. On réduit de même les deniers en sols, les pouces en pieds, les lignes en pouces, en divisant la somme donnée par 12. On réduit encore par la même méthode, les onces en livres, en divisant la somme des onces par 16 ; les heures en jours, en les divisant par 24 ; les minutes en heures, les secondes en minutes, en divisant la somme donnée par 60.

IV°. Pour réduire les sols en livres, retranchez du dividende le dernier chiffre, qui exprimera des sols : divisez par 2 le reste du dividende ; le quotient exprimera des livres. La raison en est évidente. Retrancher le dernier chiffre du dividende, c'est réduire tous les chiffres précédens à la dixieme partie de leur valeur (15) : retrancher encore la moitié de cette dixieme partie, c'est les réduire à la vingtieme partie de leur valeur ; & par conséquent à l'expression des livres. Par exemple, 108 sols se réduiront à 5 livres 8 sols.

Maniere d'abrégé la Division.

53. REMARQUE. On peut abrégé la division en certains cas :

I°. Quand le dividende a plusieurs zeros à la fin, & que le diviseur est l'unité suivie de plusieurs zeros ; il faut retrancher au dividende autant de zeros qu'il y en a au diviseur, & le quotient est le reste du dividende. Par exemple, en divisant 9000 par 100, je cherche un nombre cent fois plus petit que le dividende : or, en ôtant au dividende deux zeros (autant qu'il y en a au diviseur), je rends ce dividende cent fois plus petit, & $= 90$: donc je le divise par 100. (18.)

II°. Quand le diviseur est l'unité suivie de plusieurs zeros, & que le dividende a des chiffres positifs à la fin ; il faut retrancher autant de chiffres positifs au dividende qu'il y a de zeros au diviseur : le quotient sera le reste du dividende, joint à une fraction qui aura pour numérateur les chiffres retranchés du dividende ; & pour dénominateur, le diviseur. Par exemple, si je divise 999 par 100 ; le quotient sera $9 + \frac{99}{100}$; ou dix unités, moins un centieme de l'unité. De même $\frac{12}{10} = 2 + \frac{2}{10}$.

III°. Quand un nombre doit être divisé par 2, on peut prendre la moitié de tous les chiffres en commençant par la gauche. S'il faut diviser par 3 ou par 4, on prend le tiers ou le quart de chaque chiffre ; & ainsi des autres diviseurs. Dans ce cas, le reste de chaque nombre sur lequel on opere, en commençant toujours par la gauche (25), se joint par la pensée avec le chiffre suivant.

Cette méthode n'a pas besoin de nouvelle démonstration, après ce que nous avons déjà dit : il est clair qu'en prenant la moitié ou le quart de toutes les parties du dividende, on prend la moitié ou le quart de tout le dividende. En voici des exemples.

54397	2 Diviseur.	54397	3 Diviseur.
2011.	27198	2000.	18132
(1	2	(1	3
	—		—
Preuve.	54397	Preuve.	54397
54397	4 Diviseur.	54397	5 Diviseur.
1233.	13599	0434.	10879
(1	4	(2	5
	—		—
Preuve.	54397	Preuve.	54397

PARAGRAPHE CINQUIÈME.

LA MULTIPLICATION COMPLEXE.

54. DÉFINITION. *LA Multiplication est complexe, quand, ou le multiplicande, ou le multiplicateur, ou l'un & l'autre ensemble, renferment des nombres de différente valeur; par exemple, des livres & des sols, des toises & des pieds.*

Dans la multiplication complexe, les quantités qu'il faut multiplier l'une par l'autre, sont ou *hétérogènes* ou *homogènes*: c'est-à-dire, ou de *différente nature*, comme quand on multiplie des livres & des sols par des toises & des pieds; ou de *même nature*, comme quand on multiplie des livres & des sols par des livres & des sols & des deniers. Deux règles vont mettre au fait de ces deux opérations.

Quantités hétérogènes

55. RÈGLE. *Quand on veut multiplier un nombre complexe d'une espèce, par un nombre complexe*

d'une autre espece ; par exemple, lorsqu'on cherche par la multiplication, le prix d'une marchandise ; on doit toujours regarder comme *multiplieandé*, celui des deux nombres qui contient des quantités semblables à celles qu'exprimera le produit. Après cette observation générale, voici la regle & la méthode de cette opération. Il faut :

I°. Réduire chacun des deux nombres à la plus petite espece qu'il contient. Par exemple, si le premier nombre contient des toises, des pouces & des pieds, réduisez tout en pouces : si le second nombre contient des livres, des sols & des deniers, réduisez tout en deniers.

II°. Multiplier l'un par l'autre les deux nombres réduits à la plus petite espece : comme dans l'exemple suivant, le nombre des deniers par le nombre des pouces.

III°. Diviser le produit de cette multiplication, par le nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece du multiplicateur contient la plus petite : le quotient sera le produit de cette multiplication complexe.

IV°. Mais remarquez que le produit sera seulement exprimé en la plus petite espece du multiplieandé ; c'est-à-dire en deniers, s'il a été réduit en deniers.

§ 6. EXEMPLE. On demande *combien doit coûter un ouvrage en maçonnerie*, de 4 toises 5 pieds 8 pouces ; à 3 livres 2 sols 4 deniers la toise ? Pour trouver cette valeur, ou pour faire cette multiplication,

I°. Je réduis les termes, tant du multiplieandé que du multiplicateur, à leurs plus petites especes ; les toises & les pieds en pouces, les livres & les sols en deniers. J'aurai, pour multiplieandé, 748 deniers : pour multiplicateur, 356 pouces.

II°. Je multiplie l'un par l'autre, le multiplieandé

& le multiplicateur : le produit sera 266288.

III°. Je divise ce produit par 72, qui marque combien de fois la plus petite espece du multiplicateur, savoir le pouce, est contenue dans la plus grande, savoir dans la toise : & j'ai pour quotient 3698 avec le reste 32 à diviser par 72. Ainsi la valeur de 4 toises 5 pieds 8 pouces, est 3698 deniers & la fraction $\frac{32}{72}$ qu'on peut négliger ; parce qu'elle ne vaut pas un demi-denier.

IV°. Comme le produit ainsi divisé, est exprimé en deniers ; il faut le réduire en sols, puis en livres, par la méthode que nous avons donnée (52) : afin d'avoir le produit en ses moindres termes.

DÉMONSTRATION. La raison de tout ce que la regle prescrit, ou de toutes ces opérations, est claire : il ne peut y avoir de difficulté que pour le troisieme article, qui dit de diviser le produit trouvé, par le nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece du multiplicateur contient la plus petite. En voici la raison.

I°. Si chaque pouce valoit 748 deniers ; il est évident que 356 pouces vaudroient 266288 deniers ; puisque ce nombre est le produit de 748 par 356 ; ou d'une rangée de 748 deniers, prise autant de fois qu'il y a de pouces, savoir 356 fois.

II°. Mais par la supposition, 748 deniers sont le prix de la toise, & non pas du pouce : ainsi, puisque la toise vaut 72 pouces, le prix d'un pouce n'est que la soixante-douzieme partie de 266288 deniers. Donc, afin d'avoir le prix de 356 pouces en deniers, il faut diviser 266288 deniers par 72. C. Q. F. D.

Maniere d'abrégér cette Opération.

37. EXPLICATION. Lorsque la plus grande espece du multiplicateur est exprimée par un grand nombre,

pour lors la multiplication devient fort longue : à cause que cette plus grande espece étant réduite à la plus petite, produit un très-grand nombre.

Si on avoit, par exemple, à chercher la valeur de 5748 toises 5 pieds 8 pouces, à 3 livres 2 sols 4 deniers la toise, comme dans l'exemple suivant :

<i>Multiplieand.</i>	3 livres.....	2 sols.....	4 den.
<i>Multiplieateur.</i> par 5746	par 5746. . .	par 5746.	
<i>Produit.</i>	17238 livres. . .	11492 sols . .	22984 den.

I°. Il faut chercher à part la valeur de 5746 toises, sans réduire ces toises en pieds & en pouces. Pour cet effet, voici une méthode qui abrégera beaucoup l'opération. On multipliera successivement 3 livres 2 sols 4 deniers, par 5746 : ce qui donnera déjà pour 5746 toises (37), en livres, en sols, en deniers, le produit ci-dessus marqué.

II°. Il reste encore à chercher la valeur de 5 pieds 8 pouces, par la méthode précédente (56). Cette valeur est 706 deniers, & la fraction $\frac{3}{2}$ qu'on peut négliger ; parce qu'elle vaut moins d'un demi denier. Il ne s'agit plus que de réduire les deniers en sols, les sols en livres, pour avoir en ses moindres termes le produit cherché.

DÉMONSTRATION. Ce qui regarde l'article second de cette opération, a été déjà démontré (56). Ce qui regarde l'article premier, est évident. Car chaque toise valant 3 livres, il est clair que 5746 toises vaudront 3 fois 5746 = 17238 livres : chaque toise valant de plus 2 sols, il est clair que 5746 toises vaudront 2 fois 5746 = 11492 sols : chaque toise valant de plus 4 deniers, il est clair que 5746 toises vaudront 4 fois 5746 deniers = 22984 deniers. C. Q. F. D.

Quantités homogènes.

58. REGLE. Quand on multiplie des quantités complexes homogènes l'une par l'autre, il est indifférent de prendre pour multiplicande l'un ou l'autre des deux nombres qui expriment ces quantités. Voici la méthode qu'on suit. Il faut :

I°. Réduire les deux nombres à la plus petite espèce qui est exprimée dans l'un ou dans l'autre nombre.

II°. Multiplier l'un par l'autre, les deux nombres réduits à la plus petite espèce.

III°. Diviser le produit de cette multiplication, par le carré du nombre qui exprime combien de fois la plus petite espèce est contenue dans la plus grande.

Le carré d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié par lui-même. Par exemple, le carré de 6 est $6 \times 6 = 36$; le carré de 12 est $12 \times 12 = 144$; le carré de 100 est $100 \times 100 = 10000$.

59. EXEMPLE. Quand on doit multiplier une étendue par une étendue, comme des toises & des pieds, par des toises & des pieds & des pouces ; après avoir réduit le multiplicande & le multiplicateur à la plus petite espèce qui soit contenue dans les deux nombres, on multiplie les deux nombres réduits, l'un par l'autre. Ensuite on divise le produit par le nombre qui exprime combien la plus grande espèce contient de fois la plus petite. Or, la plus grande espèce, est non une toise en longueur, qui contienne 72 pouces ; mais une toise carrée, qui contient 5184 pouces carrés. Il faudra donc en ce cas diviser le produit, non par 72, mais par 5184 : le quotient exprimera le nombre cherché de toises carrées, de pieds & de pouces carrés.

On peut aussi se servir dans cette multiplication, de la méthode des parties aliquotes (70) ; ou d'une autre

autre méthode encore plus simple & plus facile, que nous donnerons ailleurs. (461.)

60. REMARQUE. Il suit de ce que nous avons dit; qu'autre chose est le résultat de deux mesures simples, multipliées l'une par l'autre; autre chose est le résultat des parties de ces mêmes mesures, multipliées les unes par les autres:

EXPLICATION. Pour saisir la raison de cette différence, il faut faire attention à la nature de l'unité que l'on trouve & que l'on considère dans le produit. Cette unité n'est autre chose qu'elle-même, dans le résultat de deux mesures simples; cette unité est une de ses parties aliquotes (161), dans le résultat des parties de ces mêmes mesures:

I°. Le produit d'une mesure simple par une mesure simple, est cette mesure simple prise autant de fois en nombre ou en surface, que le marque le produit. Par exemple, le produit de 4 sols par 3 sols, est le nombre 12 sols, ou quatre rangées de sols qui ont chacune trois sols en longueur. De même le produit de 3 toises par 4 toises, est l'espace 12 toises, ou trois rangs de toises qui ont chacun quatre toises en longueur. (fig. 63.)

II°. Mais le produit des parties ou des fractions d'une mesure simple par les parties ou les fractions de cette même mesure, exprime les parties aliquotes de cette même mesure, prises tel nombre de fois: l'unité que l'on considère dans ce produit, est donc fort différente de l'unité que l'on considère dans le produit précédent. Par exemple, le produit de 48 deniers qui valent 4 sols, par 36 deniers qui valent 3 sols, est 1728 deniers, qui valent bien plus de 12 sols. Dans ce cas, le produit exprime, non des unités qui valent chacune un denier ou un douzième de sol, mais des unités qui ne valent chacune qu'un cent-quarante-quatrième de sol.

De même le produit de 18 pieds qui valent trois toises en longueur, par 24 pieds qui valent quatre toises en longueur, est 432 pieds, qui valent bien plus de 12 toises. Dans ce cas, le produit exprime, non des unités qui valent chacune un pied ou un sixième de toise, mais des *unités* qui ne valent chacune qu'un trente-sixième de toise quarrée, dont il est ici question.

III°. Les deux résultats, dont on vient de parler, reviendront au même; si l'on prend la *même unité*, dans le résultat des deux mesures simples, & dans le résultat des parties ou des fractions de ces mêmes mesures. Car on aura d'abord, pour le produit des sols, $4 \times 3 = 12$ sols; & par la théorie des fractions (208 & 194), $\frac{48}{12} \times \frac{36}{32} = \frac{1728}{144} = \frac{12}{1} = 12$ sols. On aura ensuite, pour le produit des toises, $3 \times 4 = 12$; & $\frac{18}{6} \times \frac{24}{6} = \frac{432}{36} = \frac{12}{1} = 12$ toises.

PARAGRAPHE SIXIEME.

LA DIVISION COMPLEXE.

61. DÉFINITION. **L**A Division est complexe, quand, ou le dividende, ou le diviseur, ou l'un & l'autre ensemble, renferment des nombres de différente espece.

62. REGLE. Pour diviser un nombre complexe par un autre nombre complexe, il faut :

I°. Réduire le diviseur à la plus petite espece qu'il contient.

II°. Faire la division en commençant par les plus grandes especes du dividende, & allant de suite aux petites.

III°. Multiplier le quotient entier par le nombre, qui marque combien de fois la plus grande espece du

diviseur contient la plus petite. Le problème suivant va servir d'exemple sur cette règle.

63. PROBLÈME *Si 7 marcs 2 onces d'argent ont coûté 346 livres 18 sols 9 deniers, à combien revient le marc.*

SOLUTION. L'état de la question fait voir que c'est en divisant 346 livres 18 sols 9 deniers, qu'on trouvera le prix de chaque marc. Ainsi le diviseur doit être 7 marcs 2 onces, qui, réduits en onces, donnent 58 onces. Je divise donc d'abord les 346 livres par 58 : le quotient est 5. Je divise ensuite le reste des livres réduit en sols, & ajouté aux 18 sols du dividende, par 58 : le quotient est 19 sols. Je divise enfin de la même manière les deniers : le quotient est 7 deniers avec le reste $\frac{12}{58}$, que l'on peut négliger ; parce qu'il ne vaut guère qu'un demi-denier.

$$\begin{array}{rcl}
 346 \text{ livres } 18 \text{ sols } 9 \text{ den.} & \parallel & 58 \text{ onces. Diviseur.} \\
 \hline
 \text{Prix de l'once} = & \parallel & 5 \text{ livres } 19 \text{ sols } 7 \text{ den.} \\
 \hline
 \text{Prix du marc} = & & 40 \text{ livres } 152 \text{ sols } 56 \text{ deniers.} \\
 \hline
 \end{array}$$

DÉMONSTRATION. La raison des trois parties de cette règle, est évidente.

I°. Il faut réduire le diviseur à la plus petite espèce qu'il contient : afin d'avoir un nombre pur ou entier, qui puisse être porté sans fraction sur tous les membres du dividende qu'il doit partager en autant de parties qu'en marque le diviseur ; une desquelles parties sera exprimée par le quotient.

II°. Il faut diviser d'abord les grandes & ensuite les petites espèces du dividende, par le diviseur réduit. En portant successivement le diviseur sur tous les membres du dividende, il est évident que je prends successivement sur tous les membres du dividende, la partie que marque le diviseur, & que je place successi-

vement au quotient : donc après cette opération j'aurai divisé tout le dividende par le diviseur ; puisque j'aurai extrait la partie marquée par le diviseur, de tous les membres ou de toutes les parties du dividende.

III°. Il faut multiplier le quotient entier, par le nombre entier qui marque combien de fois la plus grande espece du diviseur, contient la petite espece par laquelle on a divisé. En suivant la méthode prescrite par les deux premiers articles de la regle, il est évident qu'on trouve la partie du dividende correspondante à une des unités du diviseur : dans l'exemple proposé, on trouve la cinquante-huitieme partie de la somme totale, correspondante à une once. Le prix ou la valeur d'une once sera donc la partie de la somme que marque le quotient ; savoir, 5 livres 19 sols 7 deniers.

Mais le marc est 8 fois plus grand que l'once : donc la somme qui exprimera la valeur du marc, doit être 8 fois plus grande que la somme marquée au quotient : & par conséquent pour avoir la valeur du marc, il faut multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien il y a d'onces dans le marc, c'est-à-dire par 8 : le produit 40 livres 152 sols 56 deniers, sera la valeur du marc ; & en réduisant, cette valeur ou le prix du marc sera 47 livres 16 sols 8 deniers. C. Q. F. D.

64. REMARQUE. Lorsque le diviseur est un nombre in complexe, pour lors le premier & le troisieme article de la regle précédente, n'ont point de lieu. Par exemple,

I°. Si 26 muids de vin ont coûté 1467 livres 12 sols 8 deniers, à combien revient le muid ? Il faut diviser par 26, les livres, ensuite les sols, & enfin les deniers du dividende : comme dans le problème précédent. Après avoir réduit les deniers en sols, les sols en livres : on trouvera 56 livres 8 sols 11 deniers, plus 10 deniers à diviser en 26 : c'est le prix d'un muid.

II°. Par la même méthode on trouvera combien une somme déterminée, par exemple, 7687 livres de revenu, donne à dépenser par jour : il est évident qu'il faut chercher la trois-cent soixante-cinquième partie de la somme en question ; & par conséquent qu'il faut diviser cette somme par 365 jours.

III°. De même si on veut savoir combien une somme qui doit être distribuée par portions égales à un grand nombre de personnes, donne pour chacun ; il faut diviser la somme en question, par le nombre des personnes qui doivent y avoir part.

PARAGRAPHE SEPTIEME.

FRACTIONS DE L'UNITÉ.

65. DÉFINITION. IL nous reste à dire quelque chose des multiplications & des divisions, qui ont, pour multiplicateur ou pour diviseur, des parties ou des fractions de l'unité. On appelle *fractions de l'unité*, un nombre fractionnaire dont l'unité est le numérateur (13, III°.). Par exemple, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{100}$, sont des fractions de l'unité, qui peuvent multiplier ou diviser un autre nombre, tel que 242 ou 3600, & ainsi du reste ; comme on va le voir dans les problèmes suivants.

PROBLÈME PREMIER.

66. *Faire la Multiplication, lorsque le multiplicateur est plus petit que l'unité.*

SOLUTION. Dans toute multiplication, le produit doit être au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité. (34.)

I°. Donc quand le multiplicateur est égal à l'unité ;

le produit doit être égal au multiplicande : par exemple, $12 \times 1 = 12$; $236 \times 1 = 236$.

11°. Donc quand le multiplicateur est *plus petit que l'unité*, le produit doit être plus petit que le multiplicande, autant & à proportion que le multiplicateur est plus petit que l'unité. Donc si le multiplicateur est l'unité divisée par 2, ou par 3, ou par 4, ou par 10 ; le produit sera le multiplicande divisé par 2, ou par 3, ou par 4, ou par 10 ; & ainsi de suite. Donc $12 \times \frac{1}{2} = 6$; $12 \times \frac{1}{3} = 4$; $12 \times \frac{1}{4} = 3$; $12 \times \frac{1}{12} = 1$.

67. COROLLAIRE. Il suit de là que lorsque le multiplicateur est une fraction qui a l'unité pour numérateur, c'est une même chose de multiplier le multiplicande par cette fraction ; ou de diviser le même multiplicande par le dénominateur de la fraction. Ainsi *une telle multiplication est une vraie division, qui a pour diviseur le dénominateur de la fraction.*

Multiplication par les parties aliquotes.

68. REMARQUE. Sur ce principe est fondé l'art de la multiplication des nombres, par les *parties aliquotes* (161) ; c'est-à-dire, par les parties ou fractions de l'unité qui est considérée dans le multiplicateur. En voici deux exemples.

69. EXEMPLE I. Soit donné le nombre 12, à multiplier par 2 livres 10 sols. Après l'avoir multiplié par 2 livres, ce qui donne le produit 24, il reste à le multiplier par 10 sols.

1°. Or je remarque que 10 sols est une fraction ou une partie aliquote de la livre, laquelle est l'unité que je considère dans le multiplateur ; parce qu'elle est de l'espèce qui le compose ; par conséquent 10 sols étant la moitié de la livre, ou $\frac{1}{2}$; je trouverai le produit de 12 par 10 sols, en divisant 12 par 2 ; ce qui donnera $12 \times \frac{1}{2} = 6$ livres. (66.)

II°. Pareillement le produit de 12 par 5 sols, qui est le quart de la livre, ou $\frac{1}{4}$, sera $12 \times \frac{1}{4} = 3$ livres. Le produit de 12 par 2 sols, qui est un dixième de la livre, ou $\frac{1}{10}$, sera $12 \times \frac{1}{10} = \frac{12}{10} = 1$ livre 4 sols.

70. EXEMPLE II. Soit donné le nombre 18 toises, à multiplier par 5 toises & 3 pieds. Après avoir multiplié 18 par 5, ce qui donne 90 toises ; il reste à multiplier 18 toises par 3 pieds.

I°. Or je remarque que 3 pieds sont la moitié de la toise : par conséquent $18 \times \frac{1}{2} = 9$ toises. Ainsi, $90 + 9 = 99$: j'aurai donc pour produit total 99 toises.

II°. Si au lieu de multiplier 18 toises par 3 pieds, il eût fallu multiplier 18 par 2 pieds ; j'aurois observé que 2 pieds sont le tiers de la toise ou $\frac{1}{3}$: par conséquent $18 \times \frac{1}{3} = 6$ toises. J'aurois donc eu pour produit total 96 toises.

III°. S'il eût fallu multiplier 18 toises par 4 pieds, j'aurois observé que quatre pieds sont les deux tiers de la toise : j'aurois donc multiplié 18 par un tiers, & j'aurois pris deux fois le produit. Ainsi, $18 \times \frac{1}{3} = 6$ toises, qui prises deux fois donnent 12 toises : j'aurois donc eu pour produit total 102 toises.

Cette méthode est le fondement du *Toisé des surfaces* & du *Toisé des solides* : nous parlerons du premier, dans la Planimétrie (461) ; & du second, dans la Stéréométrie. (613.)

PROBLÈME SECOND.

71. *Faire la division, lorsque le diviseur est plus petit que l'unité.*

SOLUTION. Dans toute division, le quotient est au dividende, comme l'unité est au diviseur. (43.)

I°. Donc quand le diviseur est égal à l'unité, le quotient est égal au dividende : 16 divisé par 1, = 16 ; 1000 divisé par 1, = 1000.

Fiv

II°. Donc quand le diviseur est plus petit que l'unité ; l'unité étant plus grande que le diviseur, le quotient doit être proportionnellement autant plus grand que le dividende. Ainsi, 16 divisé par 1, = 16 ; mais 16 divisé par $\frac{1}{2}$, = 32 ; 16 divisé par $\frac{1}{3}$, = 48 ; 16 divisé par $\frac{1}{4}$, = 64 ; & ainsi du reste.

72. COROLLAIRE. Dans les derniers exemples qu'on vient d'apporter ; pour avoir le quotient, l'on a pris le double, le triple, le quadruple du dividende : c'est-à-dire, qu'on a réellement multiplié 16 par 2, par 3, par 4. D'où il suit que, lorsque le diviseur est une fraction dont le numérateur est l'unité, c'est une même chose de diviser le dividende par cette fraction, ou de le multiplier par le dénominateur de la fraction. Ainsi *une telle division est une vraie multiplication, qui a pour multiplicateur le dénominateur de la fraction.*

73. CONCLUSION. Comme l'Arithmétique est une science d'un usage nécessaire & presque journalier, nous avons voulu ne rien laisser à désirer sur cette matière. Nous osons nous flatter d'avoir donné à ce Traité, malgré sa brièveté, toute l'intelligibilité dont il est susceptible. Les personnes qui n'ont pas appris scientifiquement le Calcul arithmétique, seront surprises, si ce petit Traité tombe en leurs mains, de voir combien peu il en coûte de savoir en Philosophe & en Géomètre, ce qu'elles ne pratiquoient qu'à l'aide d'une aveugle & machinale routine.





PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE, O U ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES.

SECOND TRAITÉ.

LE CALCUL ALGÈBRE.

74. DÉFINITION. *L'ALGÈBRE est la Science de la Grandeur en général, exprimée par quelques signes dont la signification ne soit pas déterminée par la nature des signes. Les signes qu'on a choisis, sont les lettres de l'alphabet; les premières, pour exprimer les grandeurs connues; les dernières, pour exprimer les grandeurs inconnues.*

1°. L'Algèbre est une branche des Mathématiques, que nous tenons des Arabes, lesquels la tenoient vraisemblablement des Grecs. Car si cette science paroît avoir été inconnue aux Platons, aux Pythagore, aux Archimède, aux Euclide, aux Apollonius de Perge, comme on le pense avec assez de vraisemblance; il est certain qu'elle étoit connue & qu'elle avoit déjà fait d'assez grands progrès au tems du célèbre Diophante,

vers le milieu du quatrième siècle du christianisme : comme il consiste par l'ouvrage qui nous reste de cet auteur ; ouvrage connu sous le titre de *Questions arithmétiques* de Diophante.

Si l'Arabie fut propre à accueillir & à conserver les sciences physiques & mathématiques qu'avoient créé les beaux siècles de la Grèce ; elle ne parut pas également propre à les étendre & à les perfectionner : car il ne paroît pas que cette nation, plus subtile que profonde, plus douée d'intelligence que de génie, plus faite pour recevoir que pour donner des impressions, ait rien étendu ou perfectionné en ce genre. Il falloit que toutes les découvertes des Grecs, après avoir été longtemps conservées comme en dépôt dans l'Arabie, passassent en de plus heureux climats, pour y fermenter avec énergie, & pour y prendre un élan rapide & une face nouvelle. Transportée d'Arabie en Europe par Léonard de Pise, vers le commencement du quinzième siècle, l'Algèbre y fut accueillie avec empressement par un grand nombre de Calculateurs & de Géomètres. Viète, né à Fontenai dans le Poitou l'an 1540, en simplifia & en étendit l'usage ; & dans le dernier siècle, le célèbre Descartes, qui imprimoit le sceau de son génie créateur à tous les objets qu'il faisoit, la porta à peu près au point de perfection où elle s'est élevée dans ces derniers tems.

II°. L'Algèbre est comme une arithmétique par signes ; ou bien, l'Algèbre est un langage particulier par lequel on exprime succinctement & sensiblement une suite ou un enchaînement de raisonnements géométriques, que l'esprit ne pourroit pas suivre ou qu'il ne suivroit qu'avec un effort accablant ; sans le secours de l'art qui les réduit en procédés techniques (250), en tableaux abrégés, en expressions très-simples & très-faciles à suivre dans leur composition & dans leur décomposition. Quoiqu'elle ait directement pour objet

la *quantité discrete* ou les nombres ; il est évident qu'elle peut avoir aussi réellement pour objet la *quantité continue* ou l'étendue : puisque toute espèce d'étendue peut être désignée par des nombres. Car une ligne, par exemple, n'est d'une certaine grandeur ; que parce qu'elle en contient une autre prise pour mesure ou comme unité, un certain nombre de fois. Il en est de même des surfaces & des solides, qui ne sont de mille pouces quarrés ou cubiques, par exemple ; que parce qu'ils contiennent mille fois un pouce quarré ou cubique. On pourra par conséquent représenter ces lignes, ces surfaces, ces solides, comme si c'étoient des nombres, par des signes universels. On voit par-là comment *l'Algebre est comme une science mitoyenne entre l'Arithmétique & la Géométrie* ; & sur quoi est fondée l'heureuse application que fit le célèbre Descartes de l'algebre (ou de l'analyse algébrique) à la géométrie des courbes différentes du cercle : car l'application de l'algebre à la résolution des problèmes de la géométrie élémentaire, est antérieure à Descartes.

III°. Le grand avantage de l'Algebre, c'est en premier lieu que ses démonstrations sont générales, & peuvent s'appliquer à toutes sortes de grandeurs ; étendues, vitesses, poids, nombres, tems : c'est en second lieu qu'elle opere également sur les grandeurs connues & sur les grandeurs inconnues. Les lettres de l'alphabet qui représentent ces grandeurs & qui en sont comme le symbole & l'expression, s'appellent *quantités algébriques* ; & le calcul qui opere sur ces grandeurs ainsi exprimées, s'appelle *calcul algébrique*.

Le calcul algébrique n'a d'effrayant que l'indétermination de son objet, & l'appareil de ses signes : ces fantômes, dont l'imagination s'épouvante, vont disparaître & s'évanouir. On verra dans ce traité & dans les deux suivans, que l'algebre est, pour le Géometre,

ce que les ailes font pour l'aigle : loin d'être un fardeau & un embarras, c'est un secours puissant, par le moyen duquel il se fraye une route facile & assurée vers le séjour de la Lumière.

SIGNES ET QUANTITÉS ALGÈBRIQUES.

75. AXIOME. *Les quantités algébriques sont susceptibles des mêmes opérations que les quantités numériques.*

EXPLICATION. C'est-à-dire, que ces quantités peuvent être ajoutées les unes aux autres, soustraites les unes des autres, multipliées ou divisées les unes par les autres. Les lettres de l'alphabet ne pouvant se combiner les unes avec les autres comme les chiffres; on se sert en opérant sur les lettres, de quelques signes qui sont :

I°. Le signe $+$, ou d'addition; qui signifie *plus*. Par exemple, $a + b$ signifie a plus b , ou la quantité a ajoutée à la quantité b .

II°. Le signe $-$, ou de soustraction; qui signifie *moins*. Par exemple, $a - b$ signifie a moins b , ou la quantité b retranchée de la quantité a .

III°. Le signe \times , ou de multiplication; qui signifie *multiplié par*. Par exemple, $a \times b$ signifie que a est multiplié par b .

IV°. Le signe de division, qui est un trait placé entre deux quantités algébriques, posées l'une au-dessus de l'autre. Par exemple, $\frac{a}{b}$ signifie que a est divisé par b .

V°. Le signe $=$, ou d'égalité; qui signifie *égal à*. Par exemple, $a = b$, signifie que a est égal à b .

VI°. Le signe $>$, qui signifie *plus grand que*. Par exemple $a > b$, signifie que a est plus grand que b .

VII°. Le signe $<$, qui signifie *moindre que*. Par exemple, $a < b$, signifie que a est moindre que b .

VIII°. Le signe ∞ , qui signifie *infini*. Par exemple,

∞ *a* signifie que la quantité *a* est, infinie.

IX°. Le signe $\sqrt{}$, qui signifie *la racine de*. Par exemple, \sqrt{a} signifie la racine de *a*.

76. REMARQUE. Les lettres de l'alphabet n'ayant par elles-mêmes aucune valeur; il est libre de faire signifier à ces lettres, telle grandeur que l'on voudra. Mais il faut observer que lorsqu'on a une fois donné à une lettre une valeur, il faut la lui conserver dans toute la suite de cette opération.

Quant à l'indétermination des quantités algébriques, voici de quoi faire évanouir cet épouvantail. Si je voulois combiner les grandeurs 5 & 4, pour avoir la somme 9; il est évident qu'il m'est permis de représenter ces trois grandeurs par tels autres signes qu'il me plaira; par exemple, par les lettres *a*, *b*, *c*; & qu'en ce cas la somme $5 + 4 = 9$, sera représentée sous une autre expression; savoir, $a + b = c$.

De même, si je voulois combiner les grandeurs 5 & 6, en les multipliant pour avoir le produit 30: il est évident que je puis représenter ces trois grandeurs par ces trois lettres *m*, *n*, *p*; & qu'en ce cas, la somme $5 \times 6 = 30$, sera représentée sous cette autre expression $m \times n = p$. Toutes ces suppositions ou demandes sont évidemment possibles.

DIVERSES DÉFINITIONS.

77. DÉFINITION I. On appelle *terme algébrique*; une lettre, ou plusieurs lettres jointes ensemble, mais sans interposition de signes + ou —. Par exemple, *a*, *b*, *ab*, *abc*, sont quatre termes algébriques.

On appelle *termes positifs*, ceux qui sont précédés du signe +; & *termes négatifs*, ceux qui sont précédés du signe —. Quand un terme n'est précédé d'aucun signe, alors il est censé avoir le signe +. Dans la quantité $a + ab - abc - bc + acd$, il y a trois termes positifs & deux négatifs.

78. DÉFINITION II. On appelle *termes semblables*, ceux qui sont précisément composés des mêmes lettres, écrites un même nombre de fois. Ainsi dans la quantité $ab - ab + 3ab + abc$, les trois premiers termes sont semblables : le dernier ne l'est pas.

79. DÉFINITION III. On appelle *quantités complexes*, ou simples, ou monomes, celles qui sont seules ; c'est-à-dire, qui ne sont ni précédées ni suivies de quelque autre quantité jointe par le signe $+$ ou par le signe $-$. Ainsi, $-a$ est une quantité complexe ; de même que $+ab$, que $-abcd$, que $+aaa$, que $-aaa$.

80. DÉFINITION IV. On appelle *quantités complexes*, ou polynomes, celles qui sont composées de plusieurs termes joints ensemble par l'interposition des signes $+$ & $-$. Ainsi la quantité $ab - cd - bd$, est une quantité complexe composée de trois termes, savoir ab , cd , & bd . Les quantités complexes sont appelées binomes ou trinomes ou quadrinomes, selon qu'elles ont ou deux ou trois ou quatre termes.

81. REMARQUE. Lorsque dans une quantité complexe, il y a plusieurs termes négatifs de suite ; celui ou ceux qui sont après le premier de ces termes négatifs, ne diminuent pas la valeur de ce premier terme négatif. Par exemple, si on a la quantité $+12 - 5 - 3$; cela signifie, non qu'il faut retrancher $5 - 3$ ou 2 , de 12 ; mais qu'il faut ôter de 12 , les deux nombres 5 & 3 qui font 8 . Ainsi, $12 - 5 - 3 = 4$. Par la même raison, $12 - 5 + 3 = 10$: parce que le terme positif $+3$ augmente le premier terme positif $+12$, ou diminue le terme négatif -5 qui le précède.

Il faut dire la même chose des quantités algébriques, quand elles contiennent plusieurs termes négatifs de suite : ces termes négatifs doivent être tous retranchés du terme positif qui les précède ; & il n'importe en quelle manière les termes soient arrangés. Ainsi, $a + b - c - d$ est la même chose que $a - c + b - d$.

82. DÉFINITION V. Lorsque l'on compare deux quantités égales, en mettant le signe $=$ entre deux; cela s'appelle *équation* ou *égalité*. Par exemple, $5 + 3 = 8$, ou $a + b = c$, est une équation.

Les deux quantités que l'on compare, sont appelées *membres de l'équation*. La quantité qui est à la gauche du signe d'égalité, est le *premier membre*; & celle qui est à la droite, est le *second membre*.

83. REMARQUE. On peut envisager les quantités algébriques, ou dans leurs combinaisons entr'elles par augmentation & par diminution; c'est l'*Arithmétique des quantités algébriques*: ou dans leur élévation à différentes puissances; c'est l'*exaltation & l'extraction des quantités algébriques*. Tel est le double objet dont nous allons donner des notions succinctes, mais suffisantes.

ARTICLE PREMIER.

Arithmétique algébrique.

PARAGRAPHE PREMIER.

L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION.

84. RÈGLE I. Les Géomètres font l'*Addition des quantités algébriques*, en les écrivant les unes à côté des autres, sans rien changer aux signes dont elles sont affectées. Pour ajouter $+a$ & $+b$, on écrit simplement $a + b$: pour ajouter ab , $+abc$, $-acd$; on écrit $ab + abc - acd$: & ainsi du reste. Cette méthode porte avec elle-même sa démonstration.

85. RÈGLE II. La *Soustraction algébrique* se fait en écrivant les quantités algébriques à côté l'une de l'autre; & en changeant les signes de la quantité que l'on

soustrait ; les $+$ en $-$, & les $-$ en $+$. Par exemple, pour soustraire la quantité $+b$, de la quantité $+a$; on écrit $a - b$. Pour soustraire la quantité $ab - cd$, de la quantité $bc + cd$; on écrit $bc + cd - ab + cd$. La démonstration ou la raison de cette méthode est que :

1°. Lorsqu'on soustrait une quantité positive $+b$ d'une grandeur quelconque $+a$, la grandeur $+a$ est diminuée de toute la quantité $+b$ que l'on soustrait : on doit donc écrire $a - b$. Donc le signe $+$ de la quantité à soustraire, doit être changé en $-$. Soit $+b = 10$ écus, & $+a = 20$ écus : si de $+a$ on soustrait $+b$, on aura $+20$ écus $- 10$ écus, ou $a - b$.

II°. Celui qui soustrait une quantité négative $-b$ d'une grandeur quelconque $+a$, augmente la quantité a de toute la grandeur b ; on doit donc écrire $a + b$; donc le signe $-$ de la quantité qu'il faut soustraire, doit être changé en $+$.

CHANGEMENT DES SIGNES.

86. OBSERVATION. Ce changement des signes dans la Soustraction algébrique, demande un éclaircissement qui le rende plus sensible & qui le mette à l'abri de toute équivoque.

Dans l'Algebre, *les quantités positives & les quantités négatives sont également réelles*. Les dernières ne sont pas la simple négation des premières. Elles sont tout aussi réelles & tout aussi positives en elles-mêmes, que les premières ; avec cette différence, que les quantités négatives sont des quantités opposées aux quantités positives. Par exemple,

1°. Soit un mobile, que deux forces motrices, également réelles, poussent l'une vers l'orient, & l'autre vers l'occident ; en telle sorte que la première a l'em-
porte

porte sur la seconde b . Ces deux forces sont également réelles en elles-mêmes : mais comme la dernière b est détruite ou vaincue par l'action prédominante de la première a ; je regarde la première a , qui produit un mouvement effectif vers l'orient, comme positive ; & la seconde b , qui s'oppose persévéramment à l'action de la première, comme négative. L'action de la première, déduction faite de la résistance de la seconde, sera $+ a$.

Mais si de cette quantité positive $+ a$, je retranchois la quantité opposée & négative $- b$; il est clair que le mouvement vers l'orient seroit augmenté de toute la quantité qui lui résistoit, ou de tout le mouvement vers l'occident $- b$; & qu'alors le mouvement du mobile vers l'orient, au lieu d'être $+ a$, deviendrait par cette soustraction, $+ a + b$.

II°. De même, si j'ai une dette de 10 écus, qui est une quantité négative $- b$ dans la somme de mon bien ; mon bien, déduction faite de cette dette, sera $+ a$.

Mais si quelqu'un, payant ma dette, m'ôtoit ma dette ou la quantité négative $- b$, il est évident que mon bien seroit augmenté de toute la valeur de cette dette ou de cette quantité négative $- b$; & qu'alors mon bien, au lieu d'être $+ a$, deviendrait par cette soustraction, $+ a + b$.

III°. On conçoit par-là, comme nous l'avons d'abord annoncé, que les quantités positives & les quantités négatives sont également réelles en elles-mêmes ; & par conséquent, que les négatives ne sont pas la simple négation ou la simple absence des positives. Ainsi, dans le premier exemple, la quantité négative par rapport au mouvement vers l'orient, n'est pas de n'avoir point de mouvement vers l'orient ; mais c'est d'avoir un mouvement opposé ; savoir, un mouvement vers l'occident. De même, la quantité négative

tive, par rapport au bien, n'est pas de n'avoir point de bien ; mais c'est d'avoir des dettes.

87. COROLLAIRE. Il suit de ces principes, que *c'est une même chose en Algèbre, de soustraire +, ou d'ajouter — : de soustraire —, ou d'ajouter +.*

COEFFICIENS ET RÉDUCTION ALGÈBRE.

88. DÉFINITION. Pour abréger l'expression algébrique, au lieu de $a + a$, on écrit $2a$. Car comme dans les nombres, $4 + 4$ est la même chose que deux fois 4, ou $2 \times 4 = 8$; de même pour les lettres, $a + a$ est la même chose que deux fois a , ou $2 \times a = 2a$. Par la même raison, au lieu de $a + a + a$, on écrit plus brièvement $3a$: & ainsi des nombres suivans.

Le chiffre qui précède un terme algébrique, s'appelle *coefficient*. Il sert à exprimer combien de fois le même terme doit être écrit, soit avec le signe +, soit avec le signe — ; ou plutôt combien de fois il doit être ajouté ou retranché. Cette méthode d'abréger les expressions algébriques, s'appelle *réduction* : elle n'a lieu que lorsque les termes sont semblables. Quand un terme n'a point de coefficient, il est censé avoir pour coefficient l'unité. Ainsi $a = 1a$.

89. COROLLAIRE I. Il suit de là, que $a + 2a + 4a$ se réduisent à $7a$: pareillement que $-a - 2a - 5a$ se réduisent à la quantité $-8a$. C'est pourquoi, lorsque les signes des termes semblables sont les mêmes, la réduction se fait en ajoutant les coefficients.

90. COROLLAIRE II. Il suit encore de là, que les termes $+a - a$ se détruisent ; parce qu'une grandeur retranchée d'elle-même, devient nulle ; & par conséquent que $5a - 2a$ se réduisent à $3a$: que $-5ab + 2ab$ se réduisent à $-3ab$. C'est pourquoi, lorsque les signes des termes semblables sont différens, la réduction se fait en retranchant le plus petit coefficient du plus grand.

Après l'Addition & la Soustraction, & généralement après toute opération algébrique, il faut réduire les termes semblables, s'il s'en trouve; afin d'abrégier l'expression.

PARAGRAPHE SECOND.

LA MULTIPLICATION.

91. DÉFINITION. **M**ULTIPLIER une grandeur par une autre grandeur, c'est prendre la première autant de fois qu'il est marqué par la seconde. Dans toute multiplication, soit numérique, soit algébrique, l'unité doit être au multiplicateur, comme le multiplicande est au produit. (34.)

La multiplication algébrique est, ou *incomplète*, ou *complexe*: elle est incomplète, quand le multiplicande & le multiplicateur ne renferment chacun qu'un seul terme; elle est complexe, quand, ou le multiplicande, ou le multiplicateur, ou l'un & l'autre à la fois renferment plus d'un terme.

EXPOSANT ALGÈBRE.

92. DÉFINITION. On nomme *exposant algébrique*, un chiffre placé à la suite d'une lettre: il signifie que la lettre qu'il suit a été multipliée par elle-même, pour être élevée à son quarré, ou à son cube, ou à sa quatrième puissance; & ainsi de suite. Par exemple, a^2 marque que la quantité a est élevée à son quarré: a^3 marque que la quantité a est élevée à son cube: $a^2b^2c^2$ marque que tout ce terme est élevé à son quarré: a^3b^3 marque que tout ce terme est élevé à son cube, & équivaut à celui-ci $aaa bbb$.

L'exposant sert, comme on voit, à simplifier l'ex-

pression algébrique. Au lieu d'écrire $aaabbbccc$, on écrit $a^3b^3c^3$: au lieu d'écrire $aaaa$, on écrit a^4 : & ainsi du reste.

Quand une quantité algébrique n'a point d'exposant, elle est supposée avoir l'unité pour exposant. Ainsi $a = a^1$: $abc = a^1b^1c^1$: $ax^3 = ax^3x^0$.

Il y a une grande différence entre le coefficient & l'exposant ; par exemple, entre $3a$ & a^3 . Car $3a = a + a + a$, donne une somme : au lieu que $a^3 = aaa$ donne un produit. Le coefficient (88) dénote une addition : l'exposant exprime une multiplication.

Pour multiplier deux termes algébriques l'un par l'autre, il faut assez souvent opérer sur quatre choses ; savoir, sur les signes, sur les coefficients, sur les lettres, & sur les exposants : comme on le verra dans les règles que nous donnerons, après avoir établi le lemme suivant.

LEMME FONDAMENTAL.

93. *Deux grandeurs, multipliées l'une par l'autre, donnent le même produit, soit qu'on multiplie la première par la seconde ; soit qu'on multiplie la seconde par la première.*

DÉMONSTRATION. Soit la rangée de points $AB = 5$, & la rangée de points $AC = 4$, qu'il faille multiplier l'une par l'autre.

I°. Il est évident que le produit sera le même ; soit qu'on multiplie 5 par 4, soit qu'on multiplie 4 par 5. Car le produit sera toujours le nombre de points contenus dans le rectangle ABDC. Ainsi $AB \times AC$ donne un produit égal à ce rectangle : $AC \times AB$ donne un produit égal à ce rectangle : 5×4 ou 4×5 donnent un produit égal à ce rectangle.

II°. Maintenant augmentez ou diminuez par la pensée, les rangées de points ABR & ACM : vous aurez toujours pour produit des deux rangées, en les

multipliant indifféremment l'une par l'autre, le nombre de points qui formeront le rectangle AMNRA, qui résultera des deux rangées multipliées l'une par l'autre. Or ce nombre de points est toujours le même, soit qu'on le prenne en multipliant la rangée AR par la rangée AM; soit qu'on le prenne en multipliant AM par AR.

A	5.	B	R
	*****		8
4.	*****		

C	*****		
	D
		
7		
M			N

III°. Soit maintenant un produit trouvé 20, par exemple, qu'il faille multiplier par une grandeur quelconque 3; je dis que le nouveau produit qui résultera de cette nouvelle multiplication, sera encore le même, soit qu'on multiplie 20 par 3, soit qu'on multiplie 3 par 20. (fig. 89.)

Car il est clair que la première quantité 20 étant représentée par la surface ABCF; & la seconde quantité 3, par la profondeur CD; le produit sera toujours égal au nombre de cubes ou de divisions que présente le solide ABCFEGD. Or ce nombre de divisions est toujours le même, soit qu'on le prenne en multipliant la surface ABCF par la profondeur CD; soit qu'on le prenne en multipliant la profondeur CD par la surface ABCF. Donc deux grandeurs donnent toujours le même produit, soit qu'on multiplie la première par la seconde; soit qu'on multiplie la seconde par la première. C. Q. F. D.

MULTIPLICATION INCOMPLEXE.

94. REGLE I. *En général, la multiplication algébrique se fait en joignant le multiplicande au multiplie-*
cateur. Car en algebre, aa est la même chose que a x a:
de même aaa est la même chose que aa x a: de même

encore $aabb$ est la même chose que $ab \times ab$. Ainsi, pour multiplier deux termes algébriques l'un par l'autre, il suffit de les écrire sans séparation, l'un à côté de l'autre. L'ordre & la clarté exigent qu'on range les lettres selon l'ordre alphabétique. La règle suivante fera voir en quelle occasion il faut mettre le signe $+$ ou le signe $-$, devant le produit.

95. REGLE II. Lorsque les signes du multiplicande & du multiplicateur sont les mêmes, le produit doit avoir le signe $+$: lorsque les signes sont différents, le produit doit avoir le signe $-$.

DÉMONSTRATION. Le multiplicande & le multiplicateur peuvent avoir, ou tous les deux le signe $+$; ou tous les deux le signe $-$; ou l'un le signe $+$ & l'autre le signe $-$. Dans tous ces cas la règle est vraie.

I°. S'ils ont tous les deux le signe $+$; le produit doit avoir le signe $+$. Par exemple, $+a \times b = +ab$. Car une quantité positive, multipliée par une quantité positive, donne évidemment un produit positif.

II°. S'ils ont différents signes, l'un indifféremment le signe $+$, & l'autre le signe $-$; le produit doit avoir le signe $-$. Par exemple, $+a \times -b = -ab$. La raison en est sensible dans les nombres : $5 - 4 \times 6 = 30 - 24$, & non pas $= 30 + 24$. Car le multiplicande $5 - 4 = 1$: or, $1 \times 6 = 6$, ou $= 30 - 24$. C'est pourquoi $- \times +$, ou $+ \times -$, $= -$.

III°. Si le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le signe $-$; le produit doit avoir le signe $+$. Par exemple, $-a \times -b = ab$. La raison en est sensible dans les nombres : car $6 - 2 \times 4 - 2 = 24 - 8 - 12 + 4$; où l'on voit que le produit de -2 par -2 donne $+4$, & non pas -4 . En effet le multiplicande $6 - 2 = 4$; de même le multiplicateur $4 - 2 = 2$: or $4 \times 2 = 8$, ou $= 24 - 8 - 12 + 4$. C'est pourquoi $- \times - = +$.

Cette théorie est relative, comme on voit, à ce que nous avons dit ailleurs des quantités positives & négatives (86) : nous allons lui donner ici un nouveau développement, qui servira à la fois, & pour la multiplication & pour la division algébriques.

96. THÉORÈME. *En algèbre, plus par plus, ou moins par moins, donne plus : & plus par moins, ou moins par plus, donne moins.*

DÉMONSTRATION. Pour faire la multiplication, il faut prendre le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur :

Donc, I°. Si le multiplicande est $+a$ & le multiplicateur $+b$; il faudra prendre la grandeur positive a , autant de fois que la grandeur positive b contiendra d'unités. C'est pourquoi si b contient trois unités ; le produit ab sera la grandeur positive $3a$, & par conséquent le produit ab aura le signe positif. $+ab$.

Donc, II°. Si le multiplicande est positif $+a$, & le multiplicateur négatif $-b$ ou -3 ; il faudra prendre la grandeur positive $+a$, non pas trois fois, mais -3 fois : parce que le multiplicateur ne contient pas 3 unités, mais -3 unités. Ainsi le produit ab sera la même chose que $-3a$; & son signe sera négatif. Car prendre une grandeur -3 fois, c'est manquer trois fois de la mettre au produit, ou la soustraire trois fois du produit. $-ab$.

Donc, III°. Si le multiplicande est négatif $-a$, & le multiplicateur positif $+b$; il faudra prendre la grandeur négative ou le défaut $-a$, autant de fois qu'il y a d'unités dans b , ou 3 fois : & par conséquent le produit ab sera la même chose que $-3a$, & son signe sera encore négatif. $-ab$.

Donc, IV°. Si le multiplicande est négatif $-a$, & le multiplicateur aussi négatif $-b$; il faudra prendre la grandeur négative ou le défaut $-a$, non pas

3 fois ; puisque le multiplicateur — b ne contient pas trois unités : mais — 3 fois ; parce que le multiplicateur — b contient — 3 unités. Or prendre — 3 fois, c'est soustraire trois fois ou ôter trois fois du produit ; & soustraire trois fois du produit une quantité négative ou un défaut, c'est y mettre trois fois l'opposé de cette quantité négative ou de ce défaut ; puisqu'une quantité négative ne peut être détruite ou ôtée, que par une quantité opposée (86). Ainsi prendre — 3 fois le défaut — a , c'est donner ou mettre au produit $+ 3 a$; & par conséquent le produit ab est la même chose que $+ 3 a$, & son signe est positif, $+ ab$. C. Q. F. D.

97. COROLLAIRE. *La même règle & la même démonstration ont lieu à l'égard de la division.*

EXPLICATION. Supposons que le dividende a soit 6, & que le diviseur b soit 2,

I°. Si l'un & l'autre ont le signe $+$; le dividende 6 contiendra positivement le diviseur 2, trois fois : ainsi le quotient 3 aura le signe $+$.

II°. Si l'un & l'autre ont le signe $-$; le défaut — 6 contiendra positivement (86) trois fois le défaut — 2, qui fera — 2 fois au quotient ; par conséquent le quotient 3 aura encore le signe $+$.

III°. Si le dividende est — 6 & le diviseur $+ 2$; le défaut — 6 ne contiendra pas trois fois la grandeur positive 2 ; mais trois fois le défaut ou le contraire de 2 ; ainsi le quotient 3 aura le signe $-$.

IV°. Si le dividende est $+ 6$ & le diviseur — 2 ; la grandeur positive 6 ne contiendra pas trois fois le défaut — 2 ; mais trois fois son contraire ou la grandeur positive 2 : donc le quotient 3 aura aussi le signe $-$, C. Q. F. D.

MULTIPLICATION COMPLEXE.

98. AXIOME. *En algèbre, comme en arithmétique, pour avoir le produit de deux grandeurs, il faut que toutes les parties du multiplicande soient multipliées par toutes les parties du multiplicateur.* Par exemple, pour avoir le produit de $a + b$ par $m + n$; il faut que la grandeur a soit multipliée par m & par n ; il faut que la grandeur b soit multipliée aussi par m & par n .

Comme la division est l'opération inverse de la multiplication ; il s'ensuit que *pour avoir un quotient, il faut que toutes les parties du diviseur divisent toutes les parties du dividende.*

99. REGLE I. *Si le multiplicande est une quantité complexe, & le multiplicateur une quantité incomplexe ; il faut multiplier chaque terme du multiplicande par le multiplicateur, en ayant égard aux signes.*

EXPLICATION. 1°. Soit $a + b + c$, qu'il faille multiplier par n . Il est clair que le multiplicateur positif n doit multiplier les trois termes positifs du multiplicande ; & alors on aura pour produit les trois termes positifs $an + bn + cn$.

2°. Soit $a - b + dd$, qu'il faille multiplier par $-n$. Il est clair que le multiplicateur négatif $-n$ doit multiplier successivement tous les termes du multiplicande, en donnant des produits, tantôt négatifs, tantôt positifs (96). On aura donc pour produit $-an + bn - ddn$.

100. REGLE II. *Si le multiplicande & le multiplicateur sont des quantités complexes ; il faut multiplier tout le multiplicande, par chaque terme du multiplicateur, en ayant égard aux signes.*

EXPLICATION. 1°. Soit $aa + b + ac$, qu'il faille

multiplier par $a + b + c$. On écrira le multiplicateur au-dessous du multipli-
cande ; & on multipliera
chaque terme du multi-
plicande, d'abord par le
premier terme du multi-
plicateur, ensuite par le
second, & enfin par le
troisième ; comme on le
voit ici : la somme de
tous ces produits est le produit total.

$ \begin{array}{r} aa + b + ac \\ a + b + c \\ \hline aaa + ab + aac. \\ aab + bb + abc. \\ aac + bc + acc. \end{array} $
--

II°. Soit $aa - ab + b$, qu'il faille multiplier par
 $-a + b$. On écrira le multiplicateur sous le multi-
plicande ; & l'on fera la
multiplication, en chan-
geant les signes, quand il
le faut (96) ; comme on
le voit ici. Après quoi on
fera la réduction des ter-
mes semblables. (88.)

$ \begin{array}{r} aa - ab + b \\ -a + b \\ \hline -aaa + aab - ab. \\ + aab - abb + bb \end{array} $

101. REGLE III. Si les
termes que l'on multiplie sont affectés de coefficients ; on
multiplie les coefficients les uns par les autres. Par exem-
ple, $3a \times 2b$ donne $6ab$. La raison en est, que $3a$
 $= a + a + a$, comme on l'a dit ; & pareillement $2b$
 $= b + b$. Or $a + a + a \times b + b$ donne $ab + ab + ab$
 $+ ab + ab + ab = 6ab$: donc $3a \times 2b = 6ab$.

102. REGLE IV. Si les quantités que l'on multiplie,
sont exprimées par les mêmes lettres affectées d'exposans,
on abrège l'opération en ajoutant les exposans. Par
exemple, $a^3 \times a^2$ donne a^5 . La raison en est, que a^3
 $= aaa$, & $a^2 = aa$; or $aaa \times aa = aaaaa = a^5$.

De même, $b \times b^2 = b^3$: parce que la première quan-
tité, qui n'a pas d'exposant marqué, a toujours l'unité
pour exposant. Ainsi $b \times bb = bbb = b^3$.

PARAGRAPHE TROISIEME.

LA DIVISION.

103. DÉFINITION. **D**IVISER une grandeur par une autre, c'est exprimer combien de fois la première contient la seconde, ou quelque partie de la seconde. Par la Multiplication, on cherche un produit : par la Division, on cherche un quotient. Comme $a \times a = aa$; par la raison contraire, $\frac{aa}{a} = a$: puisque la division détruit ce qu'a produit la multiplication.

La division, ainsi que la multiplication, a des règles pour les lettres, pour les signes, pour les exposants, pour les coefficients. Elle est *incomplexe*, quand le dividende & le diviseur n'ont chacun qu'un seul terme : elle est *complexe*, quand le dividende, ou le diviseur, ou l'un & l'autre à la fois, ont plus d'un terme. Ainsi aa divisé par b , est une division *incomplexe* : $a + b$ divisé par d , est une division *complexe*.

DIVISION INCOMPLEXE.

104. REGLE I. *En général, la division algébrique se fait en mettant le dividende au-dessus du diviseur, & en les séparant par un trait.* Par exemple, ab divisé par a , est $\frac{ab}{a}$. De même aaa , divisé par aa , est $\frac{aaa}{aa}$, ou $\frac{a^3}{a^2}$. Le quotient doit avoir tantôt le signe $+$, & tantôt le signe $-$.

105. REGLE II. *Si le dividende & le diviseur ont les mêmes signes, le quotient aura le signe $+$: s'ils ont des signes différents, le quotient aura le signe $-$.* Par exemple, ab divisé par b , a pour quotient $+$ $\frac{ab}{b}$. De même

— ab divisé par — b , a pour quotient $+\frac{ab}{b}$.

Mais $+ab$ divisé par — b , a pour quotient — $\frac{ab}{b}$: demême — ab divisé par $+b$, a pour quotient $+\frac{ab}{b}$. (97.)

106. REGLE III. Dans la division algébrique, on efface dans le dividende les lettres qui lui sont communes avec le diviseur ; & celles qui y restent, donnent le quotient.

EXPLICATION. Soit ce quotient algébrique $+\frac{ab}{b}$ ou — $\frac{ab}{b}$, dont le dividende est ab : la règle prescrit d'effacer dans le dividende & dans le diviseur la lettre commune b ; & annonce que la lettre a qui reste au dividende, est le quotient de cette division.

Pour rendre sensible la vérité de cette règle, soit $a = 5$; soit $b = 10$. $a \times b$ fera $ab = 50$: voilà une multiplication. Par la raison contraire ab divisé par b , fera 50 divisé par 10 : or $\frac{50}{10} = 5$; & par la même, $= a$ seul. Donc dans la division $\frac{ab}{b}$, la lettre b commune au dividende & au diviseur doit disparaître & n'être point au quotient qui sera a seul. Ce quotient a sera, ou positif, ou négatif ; selon qu'il aura le signe $+$ ou le signe $-$, qu'on ne change point en effaçant les lettres communes au dividende & au diviseur.

Par la même raison, dans les quotients $+\frac{aaa}{aa}$ ou — $\frac{aaa}{aa}$, le quotient réduit est $+a$ ou $-a$.

Il faut remarquer ici, que lorsque le dividende & le diviseur n'ont point de lettres communes, on ne peut point effectuer la division, mais seulement l'indiquer. Par exemple, on ne peut pas effectuer la division de a par b : on se borne à l'indiquer simplement

en cette maniere $\frac{a}{b}$; qui marque que la quantité a doit être divisée par la quantité b , quand on en vient au calcul numérique.

Quand le dividende & le diviseur ont à la fois, & des lettres communes, & des lettres différentes ; après avoir effacé dans l'un & dans l'autre les lettres qui leur sont communes, on met en fraction les lettres restantes, qui sont le quotient réduit autant qu'il est possible. Par exemple, $\frac{aaam}{aan} = \frac{am}{n}$.

DIVISION COMPLEXE.

107. OBSERVATION. La division complexe en Algèbre, ainsi qu'en Arithmétique, consiste à chercher, relativement à chaque membre du dividende, un *quotient*, un *produit*, un *reste* (45) : afin de trouver le quotient de tout le dividende, en trouvant séparément le quotient de toutes ses parties ou de tous ses termes. Quoi qu'il arrive fort rarement que cette division puisse se faire, il faut cependant savoir comment elle se fait effectivement en quelques occasions.

108. REGLE I. *Si le dividende est une quantité complexe, & le diviseur une quantité incomplexes ; il faut diviser chaque terme du dividende par le diviseur ; & écrire chaque fois le quotient, lequel doit être multiplié aussi chaque fois par le diviseur, pour en retrancher le produit du dividende, afin d'avoir un reste, s'il y en a un.*

EXPLICATION I. Soit $ab — ad$, à diviser par a . Après avoir écrit le diviseur à côté du dividende, comme dans la division arithmétique ; je les sépare par un trait, & je tire une ligne au dessous : le quotient sera placé sous le diviseur.

1°. Je divise le premier terme ab par a ; & j'ai pour

quotient b (106), que j'écris sous le diviseur. Je multiplie le quotient b par le diviseur a ; & j'ai un produit qui est ab . Je soustrais ce produit ab du premier membre ab du dividende; & je n'ai point de reste. La division est achevée pour ce premier membre; & je passe au second. •

$ab - ad$	a
$-ab + ad$	$b - d$
0 0	Quotient.

II°. Je divise le second membre négatif $-ad$ par le diviseur positif a ; & j'ai pour quotient $-d$ (105). Je multiplie le quotient $-d$ par le diviseur $+a$; & j'ai le produit négatif $-ad$ (97). Je soustrais ce produit, du second membre du dividende (85); & je n'ai point de reste. La division est donc achevée; & le quotient de $\frac{ab-ad}{a}$ est $b-d$. •

EXPLICATION II. Soit la quantité algébrique $8abc - 12abcc + 4bbcf$ à diviser par $4bc$.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 0 \qquad 0 \qquad 0 \\
 8abc - 12abcc + 4bbcf
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 8abc - 12abcc + 4bbcf \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 4bc \text{ Diviseur.} \\ \hline 2ab - 3ac + bf \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{l} \text{Produit; signes changés.} \\ -8abc + 12abcc - 4bbcf \end{array}
 \end{array}$$

I°. Je divise le premier terme $8abc$ par le diviseur $4bc$, & effaçant les lettres communes à l'un & à l'autre, j'ai pour quotient $2ab$. Je multiplie le quotient trouvé par le diviseur, & j'ai le produit $+8abc$, que je soustrais du dividende, en changeant son signe de $+$ en $-$; & faisant la réduction, j'efface les deux termes $8abc$, & $-8abc$, qui se détruisent, ce que je désigne en écrivant 0 au-dessus de ces termes.

II°. Je divise le second terme $-12abcc$ par le diviseur $4bc$, & faisant les mêmes opérations que ci-dessus, j'ai pour quotient $-3ac$; & après la multiplication, & la réduction des termes semblables, il ne reste plus que $+4bbcf$.

III°. Divisant ce terme $+ 4bbcf$ par le diviseur, j'ai pour quotient $+ bf$; & après la multiplication, & la réduction, il ne reste rien, & l'opération est finie.

109. REGLE II. Si le dividende & le diviseur sont tous les deux des quantités complexes; on opère comme dans la division numérique, observant seulement de plus, qu'il faut employer la réduction des termes semblables chaque fois que l'on a opéré sur un membre de la division. Par exemple, s'il faut diviser $6abb - 2bbc - 3aab + abc$, par $2b - a$; après avoir disposé les quantités comme il suit, il faut :

$$\begin{array}{r} \overset{\circ}{6}abb - \overset{\circ}{2}bbc - \overset{\circ}{3}aab + \overset{\circ}{abc} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Diviseur,} \\ 2b - a \end{array} \right\} \\ \hline - 6abb + 3aab + 2bbc - abc \quad \left. \begin{array}{l} \\ 3ab - bc \end{array} \right\} \end{array}$$

I°. Diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; & on aura le quotient $3ab$, qu'il faut écrire sous le diviseur.

II°. Multiplier le quotient trouvé $3ab$ par le diviseur $2b - a$: ce qui donne le produit $6abb - 3aab$, qu'il faut écrire sous le dividende.

III°. Soustraire du dividende le produit, en changeant les signes: ce qui donne $- 6abb + 3aab$.

IV°. Faire la réduction des termes qui se trouvent semblables dans le dividende & dans le produit soustrait, & effacer les termes qui se détruisent, ou mettre un point ou un zero dessus.

V°. Cela fait, il reste dans cet exemple les termes $- 2bbc + abc$ au dividende, qui font le second nombre de la division, sur lequel il faut opérer comme sur le premier; & comme après la réduction des termes semblables il ne reste plus rien, la division est achevée.

110. REGLE III. Si le dividende & le diviseur sont affectés de coefficients, il faut diviser les coefficients: par la raison contraire à celle pour laquelle on les multi-

triple dans la multiplication. Par exemple, $\frac{6ab}{2a} = 3b$.

111. REGLE IV. *Si le dividende & le diviseur sont exprimés par les mêmes lettres affectées d'exposans, il faut soustraire les exposans : par une raison contraire à celle pour laquelle on les ajoute dans la multiplication (102). C'est pourquoi $\frac{a^6}{a^2} = a^4$.*

112. REMARQUE. *Si le dividende & le diviseur sont des quantités complexes, & sont les mêmes lettres affectées d'exposans ; il peut arriver :*

I°. Que l'exposant du dividende soit plus grand que l'exposant du diviseur ; & alors l'exposant du quotient sera positif. Par exemple, $\frac{a^5}{a^1} = a^4$: parce que $\frac{a^5}{a^1} = a^{5-1} = a^4$.

II°. Que l'exposant du dividende & celui du diviseur soient égaux ; & dans ce cas l'exposant du quotient sera zero. Par exemple, $\frac{a^3}{a^3} = a^0$: parce que $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. (La quantité a^0 est le quotient $\frac{a}{a} = 1$.)

III°. Que l'exposant du dividende soit plus petit que celui du diviseur ; & alors l'exposant du quotient sera négatif. Par exemple, $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$: car $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$. (La quantité a^{-3} est $= \frac{1}{a^3}$ ou $\frac{1}{aaa}$.)

AUTRES COMBINAISONS DES GRANDEURS.

113. OBSERVATION. Après avoir appris à connaître les différentes combinaisons numériques & algébriques des grandeurs, pour en trouver, ou la somme, ou la différence, ou le produit, ou le quotient ; il est à propos d'observer ici, comme en passant, comment & en combien de manières, régulières ou irrégulières, peuvent se combiner ou s'arranger entr'elles, un certain nombre donné de grandeurs. Cette observation peut devenir utile ou même nécessaire en

une

une foule de circonstances, que nous nous dispenserons de marquer & de spécifier.

114. PROBLÈME. *Étant donné un certain nombre de quantités, a, b, c, d, e , &c, assigner toutes les combinaisons différentes dont elles sont susceptibles.*

SOLUTION. I°. Deux grandeurs a & b ne sont susceptibles que de deux arrangements différens; savoir, ab, ba .

II°. Trois grandeurs a, b, c , peuvent recevoir 3 fois 2, ou 6 arrangements. Car chacune des trois étant mise dans le premier rang, les deux autres peuvent recevoir deux arrangements: ce qui fait 6 arrangements différens qu'on voit ici encadrés.

$a b c, a c b.$ $b a c, b c a.$ $c a b, c b a.$

III°. Quatre grandeurs a, b, c, d , peuvent recevoir 4 fois 6 arrangements ou 24 arrangements différens. Car chacune étant mise au premier rang, les trois autres peuvent recevoir 6 arrangements; ce qui fait 6 fois 4, ou 24 arrangements différens, tels qu'on les voit exposés & épuisés dans ce cadre.

$abcd, abdc: acbd, acdb: adbc, adcb.$ $bacd, badc: bcad, bcda: bdac, bdca.$ $cabd, cadb: cbad, cbda: cdab, cdba.$ $dabc, dacb: dbac, dbca: dcab, dcba.$
--

IV°. De même, & par la même raison, cinq grandeurs peuvent recevoir 5 fois 24, ou 120 arrangements différens: six grandeurs en peuvent recevoir 6 fois 120, ou 720: sept grandeurs en peuvent recevoir 7 fois 720, ou 5040: huit grandeurs en peuvent recevoir 8 fois 5040, ou 40320: & ainsi de suite pour les nombres suivans. Ainsi huit personnes peuvent avoir autour d'une table, 40320 arrangements différens: huit sons d'un octave de musique, sont susceptibles

de 40320 différentes combinaisons régulières ou irrégulières.

ARTICLE SECOND.

EXALTATION ET EXTRACTION DES GRANDEURS.

115. OBSERVATION. CET article a pour objet la *composition* & la *décomposition* des grandeurs, soit numériques, soit algébriques. La composition & la décomposition des grandeurs numériques, nous prépareront à entendre ce qui regarde la composition & la décomposition des grandeurs algébriques. La composition s'appelle *formation des puissances*. La décomposition est appelée *extraction des racines*.

116. DÉFINITION I. Un nombre quelconque, multiplié par lui-même, donne un produit. Ce produit s'appelle *quarré* : le nombre qui multiplié par lui-même a donné le produit, s'appelle *racine quarrée*. Par exemple $5 \times 5 = 25$: le nombre 25, considéré comme un produit de 5, est un quarré ; & le nombre 5 est la racine de ce quarré.

117. DÉFINITION II. Un nombre quelconque multiplié par lui-même, donne un produit ou un *quarré*. Ce produit ou ce quarré, multiplié par le nombre qui l'a formé, donne un nouveau produit qui s'appelle *cube*. Par exemple, $5 \times 5 = 25$; $25 \times 5 = 125$: le nombre 125, considéré comme un produit de 5 multiplié d'abord par lui-même, & multipliant ensuite son produit, est un cube ; & le nombre 5 est la *racine cubique* de ce nombre. De même $10 \times 10 = 100$; c'est un quarré : $10 \times 10 \times 10 = 1000$; c'est un cube. Dans l'un & dans l'autre cas, 10 est la racine, ou quarrée, ou cubique.

118. DÉFINITION III. *Tout nombre peut être appelé racine, si on ne le considère point comme produit par quelque autre nombre, ou par lui-même. Cette racine est appelée la première puissance, laquelle est un nombre quelconque multiplié par l'unité.*

Le produit d'une racine multipliée par elle-même, s'appelle le quarré, ou la *seconde puissance* de cette racine. Le produit d'un quarré par sa racine s'appelle le cube, ou la *troisième puissance* de cette racine. Le produit du cube par la racine, s'appelle la *quatrième puissance* de la racine. Le produit de la quatrième puissance par la racine, est la *cinquième puissance* : & ainsi de suite.

119. DÉFINITION IV. On appelle *quarré parfait*, un nombre qui est précisément & sans reste le produit d'une racine multipliée par elle-même : comme 4, qui est le quarré de 2 ; & 36, qui est le quarré de 6, sans reste. On appelle *quarré imparfait*, un nombre qui par-dessus un quarré parfait, contient encore un reste : comme 6, qui outre le quarré de 2, lequel est 4, renferme encore 2 par-dessus.

120. DÉFINITION V. De même on appelle *cube parfait*, un nombre qui est précisément & sans reste le produit d'un quarré par sa racine : comme 8 qui est cube de 2 ; comme 216 qui est cube de 6 ; aussi sans reste. On appelle *cube imparfait*, un nombre, qui outre un cube parfait, renferme encore un reste : comme 10, qui outre le cube de 2 qui est 8, renferme encore 2 : ou bien 250, qui outre le cube de 6 qui est 216, renferme encore 34 par-dessus.

La formation des puissances en fera entendre la décomposition : comme on le verra dans les trois paragraphes suivans.

121. DÉFINITION VI. Une surface dont les quatre angles sont droits & les quatre côtés égaux, est un *quarré* : telle est une face d'un dez à jouer.

Un solide terminé par six surfaces qui sont des quarrés, & dont les angles sont droits, est un *cube* : tel est un dez à jouer.

Une surface terminée par quatre angles droits & qui a deux côtés égaux & deux côtés inégaux, est un *rectangle* : telle est le plan ou la face d'une regle.

Un solide dont les faces sont un quarré ou un rectangle, est un *parallélopède* : telle est une solive équarrie ; telle est une moitié de dez coupée parallèlement à sa base.

PARAGRAPHE PREMIER.

FORMATION DU QUARRÉ.

122. *HYPOTHESE.* Soit une ligne AB, par le moyen de laquelle nous allons présenter & à l'esprit & à l'œil, toutes les propriétés du quarré, tout ce qui concerne sa composition & sa décomposition, qu'on pourra représenter indifféremment, ou par des nombres, ou par des lettres. (*fig. 1.*)

I°. Si je multiplie cette ligne AB, par elle-même ; j'aurai un quarré ABFG. Supposons qu'elle exprime 20 toises ou 20 dez à jouer : en multipliant par elle-même la ligne AB, j'aurai pour produit 20 rangées de toises ou de dez, exprimées par le quarré ABFG. $20 \times 20 = 400$.

II°. Si j'augmente la ligne AB, de la quantité BC ; la ligne AC multipliée par elle-même donnera pour produit le quarré ACNM. J'augmente donc le premier quarré ; 1°. de tout le rectangle FBCR : 2°. de tout le rectangle MGFP égal au précédent : 3°. de tout le petit quarré PFRN.

Supposons que BC exprime 5 toises ou 5 dez : en multipliant la ligne AC par elle-même, j'aurai aug-

menté le premier quarré; 1°. de cinq fois 20 rangées de toises ou de dez, pour le rectangle BR; 2°. de cinq fois 20 rangées de toises ou de dez, pour le rectangle MF; 3°. de cinq fois 5 rangées de toises ou de dez, pour le petit quarré NF.

III°. Si j'augmente encore la ligne AC, de la quantité CD; la ligne AD multipliée par elle-même formera le quarré ADST. J'augmente donc le quarré ACNM; 1°. de tout le rectangle NCDV: 2°. de tout le rectangle TMNO: 3°. de tout le petit quarré NOSV.

Supposons que CD exprime 2 toises ou 2 dez: en multipliant la ligne AD par elle-même, j'aurai augmenté le quarré ACNM; 1°. de deux fois 25 rangées de toises ou de dez, pour le rectangle CV: 2°. de deux fois 25 rangées de toises ou de dez, pour le rectangle MO égal au précédent: 3°. de deux fois 25 rangées de toises ou de dez, pour le petit quarré NS.

IV°. Si j'augmentoie encore la ligne AD, il est évident que les nouvelles augmentations se feroient comme celles que nous venons de développer.

123. COROLLAIRE I. *Le quarré d'une quantité complexe renferme donc des quantités qu'on peut suivre & observer dans leur formation. (fig. 1.)*

EXPLICATION. Nous appellerons a , toute quantité AB ou AC, qui est la racine d'un quarré trouvé & connu: nous appellerons b , toute quantité BC ou CD, qui augmente la racine d'un quarré précédent & déjà connu.

I°. Le quarré du premier terme $AB = a$, ne renferme que lui-même; favoir, le quarré ABFG: ce quarré est $= aa$.

II°. Le quarré des deux premiers termes $AB + BC = a + b$, renferme de plus le double du premier terme multiplié par le second, avec le quarré du

second ; savoir , les rectangles BR & GP avec le carré FN : ce surplus est $2ab + bb$.

III°. Le carré des trois premiers termes $AB + BC = a$, & $DC = b$, contient de plus le double des deux premiers termes multiplié par le troisième, avec le carré du troisième ; savoir , les rectangles CV & TN avec le carré NS : ce surplus est encore $2ab + bb$.

IV°. Le carré des quatre premiers termes $AB + BC + CD = a$, & $DE = b$, renfermera de plus le double des trois premiers termes multiplié par le quatrième, plus le carré du quatrième : ce surplus sera encore $2ab + bb$; & ainsi de suite à l'infini.

124. COROLLAIRE II. *Les carrés de toutes les quantités possibles, peuvent donc être représentés par cette formule générale $aa + 2ab + bb$.*

EXPLICATION. Dans cette formule, aa exprime le carré du premier terme : $2ab + bb$ exprime ce qu'on ajoute au carré connu, le terme suivant. Il est clair qu'après avoir pris la racine a du premier terme, la formule se réduit pour le terme suivant à celle-ci, $2ab + bb$; & que cette dernière formule revient encore à celle-ci : $2a + b \times b$.

Cette formule convient aux nombres, ainsi qu'aux lettres : car les nombres exprimés par plusieurs chiffres, peuvent être considérés comme des quantités complexes. Par exemple, 6342 est égal à $6000 + 300 + 40 + 2$; & par conséquent c'est une quantité complexe de quatre termes, qui donneroit, comme on le verra bientôt, deux chiffres à la racine.

125. COROLLAIRE III. *Quand on a bien compris la formation du carré, il est facile d'en entendre la décomposition : puisque la décomposition, ou l'extraction des racines, est l'opération inverse de la formation du carré par les mêmes racines. (fig. 1.)*

Il est clair qu'en prenant la racine AB , qui produit

le grand carré ; qu'en prenant ensuite la racine BC, qui ajoute trois rectangles au grand carré ; qu'en prenant enfin la racine CD, qui ajoute encore trois rectangles à la somme précédente, on aura la racine carrée de toute la grandeur ADST ; & ainsi du reste.

Nous allons placer ici une table, utile pour faire trouver tout à coup *le plus grand carré* des neuf premiers chiffres. Nous y joindrons quelques autres carrés, relatifs à quelques observations que nous ferons bientôt.

Racine.	Quarré.	Racine.	Quarré.
1.	1.	10.	100.
2.	4.	11.	121.
3.	9.	99.	9,801.
4.	16.	100.	10,000.
5.	25.	999.	998,001.
6.	36.	1,000.	1,000,000.
7.	49.	9,999.	99,980,001.
8.	64.	10,000.	100,000,000.
9.	81.	99,999.	9,999,800,001.

126. REMARQUE I. En jettant les yeux sur cette table des carrés, on verra & on observera :

I°. Qu'une racine carrée, composée d'un seul chiffre, a toujours pour carré au moins un chiffre, & jamais plus de deux.

II°. Qu'une racine carrée, composée de deux chiffres, a toujours pour carré au moins trois chiffres, & jamais plus de quatre.

III°. Qu'une racine carrée, composée de trois chiffres, a toujours pour carré au moins cinq chiffres, & jamais plus de six.

IV°. Qu'une racine carrée, composée de quatre chiffres, a toujours pour carré au moins sept chiffres, & jamais plus de huit.

V°. Qu'une racine quarrée, composée de cinq chiffres, a toujours pour quarré au moins neuf chiffres, & jamais plus de dix : & ainsi de suite à l'infini, de deux en deux.

127. REMARQUE II. On peut observer aussi dans cette table, que quand deux nombres ne diffèrent entre eux que d'une unité ; le quarré du petit nombre est moindre que le quarré du grand, de deux fois sa racine plus l'unité. Par exemple, soient ces deux nombres ou ces deux racines 10 & 11 : leurs quarrés seront 100 & 121. Le petit quarré est moindre que le grand, de 2 fois 10 + 1. De même, le quarré de 99 diffère du quarré de 100, de deux fois 99 & d'une unité, ou de 198 + 1.

On peut généraliser cette remarque & en faire une démonstration mathématique en cette manière. En nommant a le moindre nombre, le nombre plus grand d'une unité, sera $a + 1$; alors le premier quarré est aa ; & le second (100) est $aa + 2a + 1$. Il faut observer, à l'occasion de ce second quarré, que quand le multiplicateur est l'unité, les produits ne diffèrent pas des multiplicandes.

128. REMARQUE III. Comme l'extraction de la racine quarrée est d'un usage infiniment utile & très-fréquent dans toutes les parties des Mathématiques ; nous avons cru ne devoir rien négliger pour tâcher de donner sur cet objet, & une théorie plus lumineuse, & une méthode plus commode, que celles qu'on donne ordinairement. On a vu la théorie : voici la méthode.

I°. On partage d'abord, le nombre donné, en tranches de deux chiffres chacune, excepté la première à gauche qui peut n'en avoir qu'un : cette division en tranches doit commencer par la droite. On tire ensuite au-dessous du nombre donné, une ligne qu'on coupe par une perpendiculaire, comme

dans la division. *Il y aura à la racine, autant de chiffres, qu'il y a de tranches dans le nombre donné (126).* On placera successivement chaque chiffre de cette racine, à mesure qu'on le trouvera, à côté du nombre donné.

II°. Pour trouver cette racine, on emploiera la méthode suivante, qui paroîtra d'abord un peu obscure, mais dont l'obscurité cessera dès la seconde ou troisième fois qu'on la mettra en pratique. Cette méthode consiste à se servir de la formule que voici : $2a + b \times b$. (124.)

On va voir dans les problèmes suivants, comment cette méthode ou formule se met en pratique : on obscurciroit ceci, en voulant l'éclaircir autrement que par des exemples.

EXTRACTION DES RACINES QUARRÉES.

129. PROBLÈME I. *Trouver la racine quarrée du nombre 1296.*

SOLUTION. Ce nombre 1296 est un quarré parfait ou imparfait : on demande quelle est sa racine, ou quel est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne un produit égal à 1296. Ce quarré 1296 renferme quatre chiffres : sa racine en aura deux (126), qu'il faut chercher par la formule aa qui donnera le plus grand quarré du premier membre 12 ; & par la formule $2a + b \times b$, qui donnera le quarré du second membre, (124.)

I°. Je cherche quel est le plus grand quarré qui soit contenu dans le premier membre 12 ; & je vois que c'est 9. J'écris ce quarré 9 sous le premier membre ou sous la première tranche 12 ; & j'écris sa racine 3, à côté du nombre donné. Je soustrais ce quarré 9, du premier membre 12 ; & j'ai pour reste 3, que j'écris au-dessous. J'ai déjà la racine 3 de la plus grande partie du
nombre

Quarré.	$a \ b$
1 ^{er} Membre. 12, 96.	3 6 <i>Racine.</i>
9	$6 = 2 a : \text{Diviseur.}$
	$6 = + b$
2 ^{de} Membre. 39.6.	$6 = \times b$
39 6.	3 9 6 = <i>Produit.</i>
Reste. . . . (0.	
Preuve. 36 \times 36 = 1296.	

nombre donné : puisque j'ai la racine du premier chiffre & d'une partie du second ; & que le premier chiffre vaut plus que tous ceux qui le suivent. (16.)

Les trois unités restantes du premier membre 12, ne pouvant pas donner une unité de plus à la racine 3 ; je joins ces trois unités à la tranche suivante, avec laquelle elles vont faire un même tout, dont je vais chercher la racine quarrée par la formule $2a + b \times b$.

Cette formule, qui auroit également lieu pour les membres suivants, si le quarré ou nombre donné contenoit un plus grand nombre de tranches (124), sert à faire trouver relativement au membre quelconque auquel on l'applique, & un *quotient*, & un *produit*, & un *reste* : comme on va le voir ici, & dans les exemples suivants.

11°. Pour trouver la racine du second membre 396 ; j'appelle a , la racine trouvée 3 ; & je la prends 2 fois : ce qui me donne $6 = 2a$. Faisant ensuite abstraction du dernier chiffre du membre sur lequel j'opere, & séparant ce dernier chiffre des chiffres précédens par un point, je demande : en tout le reste 39, combien de fois $2a$ ou 6 ? Il y est 6 fois. Voilà le nombre ou le *quotient* 6, que nous appellerons b : après l'avoir

écrit au petit angle à côté du 3 ; il faut l'écrire aussi au-dessous de 2 a, en l'avancant d'un pas vers la droite. La somme des deux nombres $2a + b$, ainsi arrangés, est 66. Je multiplie 66 ou $2a + b$ par 6, qui est ici b , comme le marque la formule : & j'ai pour produit 396. Après quoi, écrivant ce produit sous le second membre, je fais la soustraction : il n'y a point de reste ; & l'opération est achevée. Ainsi la racine demandée est 36 ; c'est ici la racine d'un carré parfait.

130. REMARQUE I. Après cette opération, s'il reste quelque chose de la dernière tranche du nombre donné, on néglige ce reste ; n'étant pas possible de tirer la racine carrée exacte & précise, d'un nombre qui n'est pas un carré parfait. Par exemple, si le nombre donné eût été 1298, on auroit eu un reste 2, à la place du reste 0.

I°. Quand ce reste est égal à la racine trouvée, il pourroit augmenter la racine trouvée, d'une demi-unité à peu près (127). Quand ce reste est un peu plus petit ou un peu plus grand que la racine trouvée ; on voit assez aisément quelle est à peu près sa valeur relativement à la racine.

II°. Si on a besoin d'une très-grande précision dans la racine, ce qui est très-rare ; on peut trouver à infiniment peu près, la valeur de ce reste, par la méthode d'approximation, dont nous parlerons bientôt. (135.)

131. REMARQUE II. La démonstration & la preuve de cette opération, se font aisément appercevoir & sentir, dans les principes que nous avons précédemment posés & expliqués.

I°. La démonstration de cette opération se montre par elle-même. En suivant la méthode proposée $2a + b \times b$, il est évident que j'extrait la racine de toutes les parties qui forment le carré : donc j'extrait la racine de tout le carré.

II°. La preuve de cette opération se fait en multi-

pliant par elle-même la racine trouvée. Il est évident que le produit de la racine par elle-même, joint au reste, s'il y a eu quelque reste, doit être égal au nombre ou carré donné.

132. PROBLÈME II. *Trouver la racine quarrée de 425104.*

Quarré.		a	b	
I ^{er} Membre,	42, 51, 04	6	5	Racine.
	36	12	$= 2a$	
		5	$= +b$	
II ^e Membre.	65.1	5	$= \times b$	
	625	62	5	Produit.
		130	$= 2a$	
III ^e Membre.	260.4	2	$= +b$	
	2604	2	$= \times b$	
		2	604	Produit.
Reste.	(0			
Preuve.	$652 \times 652 = 425104.$			

SOLUTION. I^o. Après avoir divisé les chiffres de deux en deux, comme nous avons dit; voyez quel est le plus grand quarré renfermé dans la première tranche à gauche, qui est ici 42 : c'est 36; comme on le voit dans la table précédente. Ecrivez ce quarré 36 au-dessous de la première tranche 42, & sa racine 6 au petit angle, à côté du nombre; & soustrayant de 42 ce quarré 36, écrivez le reste qui est 6 au-dessous; & descendez la tranche suivante, qui est 51, à côté de 6 : ce nombre 651 sera le second membre, dont nous allons chercher la racine.

II^o. Nous appellerons toujours a , tout ce qui sera au petit angle : ainsi dans le cas présent $6 = a$. La formule $2a + b \times b$, signifie qu'il faut prendre 2 fois le nombre a ; l'ajouter à un autre nombre que nous

trouverons, & que nous appellerons b ; & multiplier la somme des deux, par le nombre b .

Ainsi a étant 6, je prends 2 fois 6, ou 12, pour avoir $2a$ que j'écris à part. Laisant ensuite un chiffre à la droite du second membre 651, lequel est ici 1, je demande: dans tout le reste qui est 65, combien de fois $2a$ ou 12? Il y est 5 fois. Voilà ce nombre ou ce *quotient* 5, que nous appellerons b : il faut l'écrire au-dessous de $2a$, en l'avancant d'un pas vers la droite. La somme de ces nombres $2a + b$, ainsi arrangés, sera 125. Je multiplie cette somme 125 ou $2a + b$, par 5 qui est b , comme la formule me le dit; & j'ai pour *produit* 625, qui sera $2a + b \times b$. Comme 625 ne surpasse pas 651, je conclus que je n'ai pas pris le quotient 5 ou b trop grand. Je mets donc ce *quotient* 5 à la racine à côté de 6; & je porte le *produit* 625 sous 651, pour le soustraire; & à côté du *reste*, qui est 26, je descends la tranche suivante: c'est le troisième membre 2604.

III°. On opérera sur ce troisième membre, comme on a opéré sur le second. Je reprends donc la formule $2a + b \times b$; & puisque 65 est a (car toujours ce qui est au petit angle est a , quand on commence une opération sur une nouvelle tranche, par le moyen de la formule), je prends 2 fois 65 pour avoir 130 $\equiv 2a$, que j'écris à part. Je laisse ensuite le dernier chiffre de ce troisième membre, qui est ici 4; & je demande: dans tout le reste qui est 260, combien de fois $2a$ ou 130? Il y est 2 fois. Voilà le *nombre* ou le *quotient* 2, que nous appellerons b dans cette opération. Je l'écris au-dessous de $2a$, en l'avancant d'un pas; & ayant fait la somme de ces deux nombres pour avoir $2a + b$ qui est 1302, je la multiplie par $b = 2$, selon la formule; & j'ai pour *produit* total 2604, qui est la formule entière exécutée, $2a + b \times b$, pour cette troisième tranche; & comme 2604 ne surpasse pas la

Somme de la tranche correspondante, le quotient n'a pas été trop grand. Je mets donc le nombre b qui est 2, au petit angle à côté de 65; & ayant soustrait 2604 de la tranche correspondante qui est 2604, il n'y a aucun reste. Je conclus que ce qui est au petit angle, savoir 652, est la racine du nombre donné, qui est un carré parfait.

IV°. On en feroit autant pour une quatrième, cinquième & sixième tranche, s'il y en avoit encore. La racine demandée est donc 652 : c'est encore ici la racine d'un carré parfait. La racine suivante sera la racine d'un carré imparfait.

133. PROBLÈME III. Trouver la racine carrée du nombre 6422739.

SOLUTION. On cherchera cette racine, par la même méthode qui a fait trouver les deux précédentes, en prenant d'abord la racine du plus grand carré contenu dans la première tranche 6; & en appliquant ensuite à toutes les tranches suivantes, la formule $2a + b \times b$.

Quarré.		a	b
I ^{er} Membre.	6, 42, 27, 39	2	534 Racine.
II ^o Membre.	4 24.2 225	4 = $2a$ 5 = $+b$ II ^o Membre; 5 = $\times b$	
III ^o Memb.	172.7 1509	225 produit.	
IV ^o Memb.	2183.9 20256	50 = $2a$ 3 = $+b$ III ^o Membre; 3 = $\times b$	
Reste.	1583.	1509 produit.	
Preuve.	25342534 = 6422739,	506 = $2a$ 4 = $+b$ IV ^o Membre; 4 = $\times b$	
Reste.	1583,	20256 produit.	
Somme. . . .	= 6422739, égale au carré donné.		

134. REMARQUES. I^o. Une des propriétés fondamentales de la Division, c'est de faire trouver la racine inconnue d'un produit, dont on a l'autre racine, en divisant le produit connu par la racine connue : le quotient est l'autre racine, savoir, ou le multiplicande, ou le multiplicateur. Si j'ai le produit 204, dont une racine donnée soit 4 ; la racine cherchée fera 51 : si la racine donnée étoit 16, la racine cherchée seroit 12, avec 12 unités de reste, que je joindrois au membre suivant.

Ainsi chaque fois que j'abaisse une nouvelle tranche à côté du reste du membre précédent, je ne fais attention qu'au reste & au premier chiffre de la tranche abaissée. J'intercale toujours un point entre les deux chiffres abaissés ; & prenant tout ce qui est avant le point pour dividende, je le divise par le diviseur 2 *a* pour avoir un quotient $+b$, qui ne peut jamais être plus grand que 9 (44. II^o.) Si j'ai pris le nombre *b* trop grand, en sorte qu'il me donne un produit plus grand que le membre sur lequel j'opere ; je diminue ce nombre *b*, d'une ou de plusieurs unités ; jusqu'à ce qu'il me donne un produit qui ne surpasse pas le membre dont il doit être soustrait, & qui en approche le plus qu'il se peut.

Si le nombre 2 *a*, qui doit servir de diviseur, se trouve plus grand que le nombre auquel il répond, je mets tout de suite zero à la racine ; & j'abaisse la tranche suivante du nombre donné, pour avoir le membre suivant, sur lequel j'opere à l'ordinaire.

II^o. Quand j'ai trouvé le nombre *b*, je l'écris dans un rang plus avancé d'un pas vers la droite : parce que le nombre 2 *a* ne répond qu'au chiffre qui précède le point, & que le nombre $+b$ qui est censé être la racine ou le produisant de tout ce nombre, doit répondre aussi au chiffre qui suit le point.

III^o. Le nombre donné n'est pas un carré parfait ; puisqu'outre le carré parfait du nombre 2534 ;

il contient encore 1583 unités de plus : il ne contient pas non plus le carré du nombre 2535 plus grand d'une unité. La vraie racine du nombre donné est donc entre les nombres 2534 & 2535 : elle est donc le nombre 2534, plus une partie d'une unité, laquelle partie d'unité ne peut s'exprimer exactement, ni par un nombre entier, ni par une fraction. Si le nombre donné exprimoit des pieds, la racine feroit 2534 pieds, plus une partie d'un pied, que l'on néglige communément dans la pratique.

IV°. Quoiqu'on ne puisse jamais atteindre & exprimer la valeur juste & précise de cette racine, on peut en approcher à l'infini : en sorte que le reste, ou ce qui manquera à la racine exacte & précise, soit moindre qu'un dixième, ou qu'un centième, ou qu'un millième d'unité : & ainsi de suite. C'est ce que l'on appelle *extraire la racine carrée par approximation*, & l'objet du problème suivant.

Mais la solution de ce problème suppose quelques connoissances sur la théorie des Fractions, dont nous parlerons ailleurs (191). Ainsi les personnes qui n'auroient aucune connoissance sur cette théorie des Fractions, doivent omettre pour le présent ce problème ; qui exige cependant d'être résolu ici.

135. PROBLÈME IV. *Extraire la racine carrée par approximation.*

SOLUTION. Soit le nombre donné 67, qui n'est pas un carré parfait, & dont on demande la racine. Sa racine est 8, plus une partie d'unité correspondante aux 3 unités qu'a le nombre 67 au-dessus du carré 64.

I°. Si on veut avoir la racine de ce nombre $67 = \frac{67}{1}$, en sorte que ce qui manquera à cette racine, soit moindre qu'un dixième d'unité ; j'ajoute deux zeros à $\frac{67}{1}$ (ce qui est la même chose que si je l'avois multiplié par 100), pour en faire une fraction $\frac{6700}{100}$ qui lui sera

fera égale (191). Or comme la racine de 100 est 10; il est sûr que si je tire la racine de 6700, ce qui viendra sera des *dixiemes*. Tirant donc cette racine selon la méthode ordinaire, je trouve $\frac{81}{10} = 8 + \frac{1}{10}$ pour la racine approchée du nombre 67; à laquelle racine il manquera moins d'un dixieme, pour être exacte; parce que le reste 139 ne vaut pas une unité de plus pour la racine; sans quoi, au lieu de $\frac{81}{10}$, on auroit $\frac{82}{10}$.

II°. Si on veut que le reste soit moindre qu'un centieme d'unité; j'ajoute à $\frac{67}{1}$, quatre zeros, (ce qui est la même chose que si je multipliois par 10000) pour en faire une fraction $\frac{670000}{10000}$; & comme la racine de 10000 est 100, il est encore sûr que si je tire la racine de 670000, ce qui viendra sera des *centiemes*. Ainsi j'aurai $\frac{818}{100} = 8 + \frac{18}{100}$ pour la racine approchée de 67; à qui il manquera moins d'un centieme pour être la vraie racine; parce que le reste 876 vaut moins qu'une unité de la racine 818.

III°. En général, il faut ajouter au nombre dont on veut extraire la racine par approximation, ou deux zeros, ou quatre, ou six, & ainsi de suite, toujours en nombre pair; & en extraire la racine, sous laquelle on mettra l'unité avec la moitié du nombre de zeros qu'on a ajoutés au nombre proposé; ce qui donnera une fraction qui sera la racine cherchée. Plus le nombre de zeros ajoutés sera grand, plus aussi on approchera de la vraie valeur de la racine.

IV°. Par ces principes, en supposant deux zeros ajoutés au nombre donné dans le troisieme problème précédent; le reste 1583, augmenté des deux zeros abaissés, deviendrait un *cinquieme membre* sur lequel on continueroit d'opérer selon la formule; & on trouveroit pour racine 25343 *dixiemes* = $2534 + \frac{3}{10}$. (53.)

PARAGRAPHE SECOND.

FORMATION DU CUBE.

136. HYPOTHESE. (*fig. 2.*) SOIT un cube TAGM-LSBA d'une grandeur quelconque, que nous nommerons le cube R: ce cube aura six faces égales à la surface ATSB. La ligne AB en est la *racine cubique*: cette ligne AB, élevée à son quarré, donne la surface ABST. Cette ligne $AB = AG$, multipliant une des faces du cube, donne sa profondeur ou sa solidité.

Cette racine cubique AB étant appelée a , on aura a pour la racine; aa pour le quarré ou une des faces; aaa pour la solidité de ce cube.

Il s'agit maintenant d'observer quelle augmentation donne à un cube quelconque déjà existant, une nouvelle grandeur BC, ajoutée à sa racine connue AB. Or c'est ce que nous allons faire ici, en examinant quelles seroient les quantités qu'acqueroit le cube R, si sa racine $AB = a$, étoit augmentée d'une quantité quelconque $BC = b$.

Soit donc le cube R, dont les trois dimensions; longueur, hauteur & profondeur, sont égales à AB, que je nomme a : ce cube est $= aaa$. Si j'augmente la racine AB de ce cube, de la quantité quelconque BC, que je nomme b ; il est clair que cette ligne ABC, élevée à son cube, donnera un cube ACDKHGAN, plus grand que le précédent. Le cube précédent sera alors augmenté de sept parallépipèdes (121), qui seront (*fig. 2.*):

I°. Le parallépipède BD, poussé jusques sous F, lequel aura la largeur & la hauteur du premier cube, & la profondeur BC: $= aa \times b$.

II°. Le parallépipède GH, poussé jusques sous K, qui aura la hauteur & la largeur du premier cube, &

une profondeur GI égale à BC : $\equiv aa \times b$.

III°. Le parallépipède X qui aura la largeur & la longueur du premier cube, & une profondeur VM égale à BC : $\equiv aa \times b$. Voilà déjà $3 aa \times b$, de la formule que nous allons bientôt employer.

IV°. Le parallépipède DPF, qui a une longueur égale à celle du premier cube, & une largeur & une profondeur égales à BC : $\equiv ab \times b$.

V°. Le parallépipède HVK, qui a les trois dimensions du précédent : $\equiv ab \times b$.

VI°. Le petit cube KF, qui a ses trois dimensions égales à BC : $\equiv bb \times b$.

VII°. Sous ce petit cube KF, un parallépipède qui a la hauteur du premier cube R, avec une largeur & une profondeur égales à BC : $\equiv ab \times b$. Voilà donc encore $3 ab + bb \times b$ de la formule.

Pour se rendre plus sensible cette théorie du cube, on pourra exécuter en cire ou en terre grasse, les deux cubes dont il est ici question.

Il est évident que si on augmentoit encore la ligne AC d'une nouvelle quantité quelconque CE ; cette augmentation produiroit sept nouveaux parallépipèdes semblables aux précédens, sur le cube augmenté ou sur le cube total AF. On voit naître cette nouvelle augmentation en CDFOE.

137. COROLLAIRE I. *Le cube d'une quantité complexe renferme donc des quantités qu'on peut suivre & observer dans leur formation.*

EXPLICATION. Si le cube est formé par deux quantités $a + b$, il renfermera, comme on vient de le voir, outre le cube aaa du premier terme, les quantités suivantes, $3 aa + 3 ab + bb \times b$.

Si le cube est formé par trois quantités ; après avoir trouvé le cube des deux premières, dont la racine cubique sera encore nommée a , on nommera encore b la

troisième quantité ; & on trouvera , comme on vient de l'observer , que le cube renfermera de plus , $3aa + 3ab + bb \times b$. Et ainsi de suite à l'infini.

138. COROLLAIRE II. *Quand on a bien conçu & saisi la formation du cube , il est facile d'en entendre la décomposition : puisque la décomposition , ou l'extraction des racines cubiques , est l'opération inverse de la formation du cube par les mêmes racines.*

Il est évident qu'en prenant la racine cubique d'un cube connu , & la racine cubique de tout ce qui est ajouté à ce premier cube connu , on aura la racine cubique du tout.

Nous allons placer ici une table , où se trouvent les cubes des neuf premiers chiffres : elle servira à faire connoître tout de suite le plus grand cube de la première tranche sur laquelle on va opérer dans l'extraction des racines cubiques. Les autres cubes que nous

Racine.	Quarré.	Cube.
1 . . .	1 . . .	1
2 . . .	4 . . .	8
3 . . .	9 . . .	27
4 . . .	16 . . .	64
5 . . .	25 . . .	125
6 . . .	36 . . .	216
7 . . .	49 . . .	343
8 . . .	64 . . .	512
9 . . .	81 . . .	729
10 . . .	100 . . .	1,000
99	970,299
100	1,000,000
999	997,002,999
1000	1,000,000,000
9999	999,700,029,999

7 joignons , sont relatifs à quelques observations que nous allons faire.

139. REMARQUE I. En jettant un coup d'œil sur cette table , on observera :

I°. Qu'une racine cubique , composée d'un seul chiffre , a toujours pour cube au moins un chiffre , & jamais plus de trois.

II°. Qu'une racine cubique , composée de deux chiffres , a toujours pour cube au moins quatre chiffres , & jamais plus de six.

III°. Qu'une racine cubique composée de trois chiffres , a toujours pour cube au moins sept chiffres , & jamais plus de neuf.

IV°. Qu'une racine cubique , composée de quatre chiffres , a toujours pour cube au moins dix chiffres , & jamais plus de douze ; & ainsi de suite , de trois en trois.

V°. On voit ici que la plupart des nombres doivent être des quarrés imparfaits : puisque dans tous les nombres au-dessous de 100 , il n'y a que 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100 , qui soient des quarrés parfaits dont on puisse extraire exactement & sans reste la racine quarrée.

On voit de même que la plupart des nombres sont des cubes imparfaits : puisque dans tous les nombres au-dessous de 1000 , il n'y a que 1 , 8 , 27 , 64 , 125 , 216 , 343 , 512 , 729 , 1000 , qui soient des cubes parfaits , dont on puisse extraire exactement & sans reste la racine cubique.

140. REMARQUE II. Delà la méthode de diviser en tranches , en commençant par la droite , le nombre donné dont on cherche la racine cubique. On cherche quel chiffre , élevé à son cube , produit chaque tranche ou la plus grande partie de chaque tranche , en commençant par la gauche où les tranches ont une plus grande valeur.

Après avoir trouvé en nombres ronds la racine cubique de la plus grande partie de chaque tranche; on joint le reste à la tranche suivante dont on cherche ensuite la racine cubique, en cherchant quel nombre, élevé à son cube, produit un nombre égal à cette tranche, ou très-approchant de cette tranche; dont on joindra le reste à la tranche suivante, pour la soumettre à la même opération.

141. REMARQUE III. *La racine cubique d'une tranche quelconque, ne peut jamais être plus grande que 9 : parce qu'une racine cubique plus grande que 9, même d'une seule unité, appartient à un nombre composé de plus de trois chiffres : or un nombre composé de plus de trois chiffres appartient nécessairement à une tranche qui précède celle sur laquelle on opere. (16.)*

142. REMARQUE IV. *Si deux nombres ne diffèrent que d'une unité; le cube du plus grand surpasse le cube du plus petit, de trois fois le carré de la racine du plus petit, plus trois fois cette racine, plus l'unité. Car nommant a le moindre nombre, le plus grand sera $a + 1$.*

Le cube de a est aaa . Le cube de $a + 1$, est $aaa + 3aa + 3a + 1$. Car d'abord $a + 1 \times a + 1$ donne le carré $aa + 2a + 1$. (127). Ensuite le carré $aa + 2a + 1 \times a + 1$, donne le cube $aaa + 3aa + 3a + 1$. (100 & 127).

143. REMARQUE V. Les nombres dont on cherche la racine cubique, sont ou des cubes parfaits, ou des cubes imparfaits (119).

I°. Quand ces nombres sont des *cubes parfaits*, on en trouve la racine exacte & précise, sans aucun reste dans la dernière tranche.

II°. Quand ces nombres sont des *cubes imparfaits*, on en trouve la racine approchée : mais il y a un reste plus ou moins grand dans la dernière tranche, lequel reste est insuffisant pour donner une unité de plus à la racine cubique. Pour que ce reste pût donner une unité de plus à cette racine, il faudroit qu'il valût

trois fois le carré de cette racine, plus trois fois cette racine, plus une unité (142). On verra par-là à fort peu près, quelle est la valeur de ce reste relativement à la racine : on le néglige communément.

Dans les carrés & dans les cubes imparfaits, la racine, soit carrée, soit cubique, est une grandeur incommensurable avec ces nombres (6) : on peut en approcher à l'infini (135 & 151); mais on ne peut jamais l'atteindre avec une parfaite précision.

144. REMARQUE VI. La méthode que nous allons donner pour extraire la racine cubique, a beaucoup de rapport avec celle que nous avons employée pour extraire la racine carrée. On sentira la facilité & la commodité de l'une & de l'autre méthode; en les comparant, si l'on veut, avec celles qu'on trouve dans différens auteurs, & qu'on pourroit leur substituer. Pour extraire la racine cubique d'un nombre donné :

I°. On divisera d'abord ce nombre en tranches, de trois en trois chiffres, en commençant par la droite; la première tranche à gauche peut n'avoir que deux chiffres, ou même qu'un seul. On tirera sous le nombre donné & divisé en tranches, une ligne qu'on coupera par une perpendiculaire, comme dans l'extraction de la racine carrée; & on placera à côté du nombre donné, chaque chiffre de la racine cubique, à mesure qu'on le trouvera. *Il y aura à la racine cubique, autant de chiffres, que le nombre donné aura de tranches ou de divisions* (139). Après ces préparatifs,

II°. On examinera quel est le plus grand cube contenu dans la première tranche (138), & on en prendra la racine cubique qu'on placera à côté du nombre donné. On extraira de la première tranche ce plus grand cube, & on joindra le reste à la tranche suivante : ce qui formera le second membre. Après quoi, on emploiera pour ce second nombre & pour tous les membres suivans, comme on le verra dans les problèmes que

nous allons résoudre, cette formule générale : $3aa + 3ab + bb \times b$, (137).

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

145. PROBLÈME I. *Trouver la racine cubique de 13824.*

SOLUTION. Le nombre donné 13824 est un cube parfait ou imparfait. Ce cube renferme cinq chiffres ou deux membres : la racine aura deux chiffres (139), qu'il faut chercher.

Cube.	13, 824	<i>ab</i>	Racine.
I ^{er} Membre.	8	12 = 3 <i>aa</i> ; Diviseur.	
		24 = 3 <i>ab</i>	
II ^e Membre.	58.24	16 = <i>bb</i>	
	58 24	1456 = somme	
		4 = $\times b$	
Reste,	(0)	5824 = produit.	

Preuve. $24 \times 24 \times 24 = 13824$.

1^o. Je cherche d'abord *le plus grand cube renfermé dans la première tranche 13* ; & je vois que c'est 8. J'écris ce cube 8 sous la première tranche ; & je place *la racine cubique 2*, à côté du nombre donné. Je soustrais ce cube 8 de la première tranche ; & j'ai pour *reste 5*, à côté duquel j'abaisse la tranche suivante 824.

J'ai déjà extrait la racine cubique d'une partie du premier membre : les cinq unités qui restent ne suffisant pas pour donner une unité de plus au premier chiffre de la racine ; je joins ce reste à la tranche suivante, avec laquelle il va faire un même tout, dont je vais chercher la racine cubique, par la formule $3aa + 3ab + bb \times b$.

Cette formule, qui auroit également lieu pour tous les membres suivans, si le cube donné avoit un plus grand nombre quelconque de tranches (137), sert à faire trouver, relativement au nombre quelconque auquel on l'applique, un *quotient*, un *produit*, un *reste* : comme on va le voir ici & dans les exemples suivans. Ainsi,

II°. J'appelle a la racine trouvée 2 : je la multiplie par elle même, pour avoir $aa = 4$: je la prends trois fois, pour avoir $12 = 3aa$, diviseur de 58.

Laisant ensuite deux chiffres à la droite du second membre, séparés par un point de tous ceux qui les précédent ; je demande : dans tout le reste 58, combien de fois 3 aa ou 12 ? Il y est 4 fois. Ce *quotient* 4 est le nombre que nous nommerons b . (134.)

Continuant d'exécuter la formule, je multiplie $a = 2$, par $b = 4$; & j'ai $8 = ab$: je prends trois fois ce nombre 8, pour avoir $24 = 3ab$; & j'écris ce nombre 24 au-dessous de 12 ou de 3 aa , en l'avancant d'un pas vers la droite. Je multiplie encore $b = 4$, par lui-même ; pour avoir $bb = 16$, que j'écris au-dessous de 24 ou de 3 ab en l'avancant encore d'un pas vers la droite.

Je fais la somme de tout cela ; & multipliant cette somme 1456 par $b = 4$, j'ai pour *produit* 5824, qui sera le résultat de $3aa + 3ab + bb \times b$.

Je porte ce produit 5824 sous le second membre ; & je le *soustrais* de ce second membre ; & après la soustraction faite, il n'y a aucun *reste*. L'opération est achevée ; & la racine demandée est 24 : c'est la racine d'un cube parfait.

146. REMARQUE I. Quand après l'opération, il reste quelque chose de la dernière tranche ; on néglige ce reste qui annonce que le cube donné n'est pas un cube parfait. Si ce reste du dernier membre valoit une fois & demi la racine trouvée 24, par exemple, plus une fois & demi le quarré de cette racine, plus une demie

unité ; il vaudroit simplement une demi-unité de plus à la racine, laquelle seroit $24 + \frac{1}{2}$. (142.)

147. REMARQUE II. La preuve & la démonstration de cette méthode, sont fondées sur les principes mêmes qui l'exposent.

I°. La preuve de cette opération, se fait en multipliant la racine par elle-même pour en avoir le quarré, & en multipliant ce quarré par la même racine pour en avoir le cube. Il est évident que ce dernier produit, ajouté au reste, s'il y a quelque reste, doit être égal au nombre donné : puisque ce nombre donné n'est pas différent des constitutifs dont il est formé.

II°. La démonstration de cette opération est établie sur la théorie de la formation & de la décomposition d'un cube quelconque, que nous avons exposée. En suivant la formule proposée $3aa + 3ab + bb \times b$, il est évident qu'on extrait la racine cubique de toutes les parties qui forment le cube : donc on extrait la racine cubique de tout le cube.

148. PROBLÈME II. Extraire la racine cubique du nombre 107,850,176.

SOLUTION. Cette racine aura trois chiffres : puisque le nombre donné a trois tranches (139). La méthode à suivre sera toujours représentée par la formule $3aa + 3ab + bb \times b$.

I°. Je cherche le plus grand cube renfermé dans la première division à gauche, qui est 107 : je vois que c'est 64, dont la racine cubique est 4 ; & je soustrais 64 de 107. Je descends à côté du reste 43, la division suivante 850 ; & je mets au petit angle la racine cubique de 64, qui est 4.

II°. Venant à la seconde division ou au second membre, j'appelle a ce qui est à la racine ou au petit angle ; & la formule étant $3aa + 3ab + bb \times b$, je commence par multiplier a qui est ici 4 par lui-même, pour avoir

Cube. 107, 850, 176	$a\ b$ 476 Racine.
I ^{er} Membre. 64	48 = 3 aa : Diviseur.
II ^e Membre 438, 50	96 = 3 ab II ^e Membre
398 23	64 = bb faux.
III ^e Memb. 40 271, 76	5824 Somme :
40 271 76	8 = $\times b$
Reste. (0	46592 Produit.
Preuve. 476 \times 476	48 = 3 aa II ^e Membre.
476 = 107850176.	84 = 3 ab
	49 = bb
	5824 Somme.
	7 = $\times b$
	39823 = Produit.
	6627 = 3 aa : Diviseur.
	846 = 3 ab : III ^e
	36 = bb : Membre.
	671, 196 : Somme.
	6 = $\times b$
	4027, 176 : Produit.

16, qui sera aa ; & je le prends trois fois pour avoir $48 = 3\ aa$, qui sera le *diviseur* de 438.

Laisant ensuite deux chiffres du second membre à la droite, c'est-à-dire, 50; je demande : dans tout le reste 438, combien de fois les 3 aa ou 48? Il y est 8 fois. Ce *quotient* 8 est le nombre que nous appellerons b .

Continuant donc d'exécuter la formule, je multiplie d'abord a qui est 4, par b qui est 8; & j'ai 32 qui est ab : je prends ensuite 3 fois 32, ou 96, pour avoir 3 ab que j'écris au-dessous de 3 aa , en l'avancant d'un pas, comme on voit ici. Je multiplie encore b qui est 8 par lui-même, pour avoir bb ou 64; & je l'écris dessous de 3 ab en l'avancant d'un pas vers la droite. Après quoi, ayant fait une somme de tout cela pour avoir 5824, qui sera $3\ aa + 3\ ab + bb$; je multiplie le tout par b ou 8, pour avoir la formule entière exé-

cutée qui est $3aa + 3ab + bb \times b$; & je trouve pour produit 46592, qui se trouve plus grand que les chiffres correspondans du second membre 43850: j'ai donc pris le quotient b trop grand, en prenant 8.

Je prends donc pour quotient b , le nombre 7; & ayant écrit $3aa$, qui est toujours comme ci-dessus 48, je multiplie a qui est 4, par 7; pour avoir 28 ou ab . Prenant ensuite 3 fois 28, ou 84, pour avoir $3ab$; j'écris 84 sous $3aa$ en l'avancant d'un pas. Je multiplie encore b , qui est 7, par lui-même; pour avoir bb ou 49, que j'écris sous $3ab$ en l'avancant d'un pas vers la droite. Je fais la somme de tout cela; & je la multiplie par 7, qui est b ; pour avoir 39823, qui sera $3aa + 3ab + bb \times b$. Je porte ce produit 39823, sous le membre correspondant, pour le soustraire; & ayant descendu la tranche suivante à côté du reste qui est 4027, & mis à la racine le b trouvé à cette opération, qui est 7; je viens à la troisième division ou au troisième membre.

III°. Je reprends la formule; & appellant a tout ce qui est à la racine, c'est-à-dire ici 47, je prends aa qui est 47×47 , ou 2209 que je prends 3 fois, pour avoir $3aa$, ou 6627 que j'écris à part. Laisant ensuite cinq chiffres à la droite (50), je demande: en 40 combien de fois 6? Il y est 6 fois. Ce quotient 6 sera le nombre b .

Je multiplie donc 47 qui est a , par 6 qui est b ; & j'ai 282: & le prenant 3 fois, j'ai 846 qui est $3ab$, que j'écris sous $3aa$ en l'avancant d'un pas. Je multiplie ensuite b par b , ou 6 par 6; pour avoir 36 ou bb , que j'écris sous $3ab$ en l'avancant d'un pas. La somme de ces nombres est $671196 = 3aa + 3ab + bb$. Je la multiplie par b qui est 6, pour avoir $3aa + 3ab + bb \times b$, qui est la formule ordinaire exécutée; & j'ai pour produit 4027176, qui soustrait du dernier membre, ne laisse aucun reste. Je mets donc à la racine, 6; & le nombre 476 est la racine cubique du nombre donné, lequel est un cube parfait,

149. PROBLÈME III. Extraire la racine cubique du nombre 5305472.

SOLUTION. Le nombre donné est un cube dont la racine aura trois chiffres (139). Après avoir pris le plus grand cube de la première tranche 5; on emploiera, comme dans les deux problèmes précédents, la formule $3aa + 3ab + bb \times b$.

Cube.	5,305,472	ab 174 Racine.
I ^{er} Membre.	1	$3 = 3aa$ Diviseur.
II ^e Membre.	43.05 39 13	$21 = 3ab$ II ^e $49 = bb$ Membre:
III ^e Membre.	3924.72 3550 24	559 Somme. $7 = \times b$ 3913 Produit:
Reste.	(37448)	$867 = 3aa$ Diviseur.
Preuve.		$204 = 3ab$ III ^e $16 = bb$ Membre.
174 \times 174 \times 174 = 5268024		88756 Somme.
qui joint avec le reste 37448		$4 = \times b$
égale le nombre		355024 Produit.
donné	5305472	

150. REMARQUES. I^o. Chaque fois que j'abaisse une nouvelle tranche, j'intercale un point entre le premier des chiffres abaissés & les deux suivants. Ce qui est avant le point est un *dividende*, dont le *diviseur* fera le nombre $3aa$: le *quotient* fera le nombre b , qu'il faut trouver (134) & ne point prendre trop grand.

II^o. Le nombre b , qui fait aussi la fonction de *multiplicateur*, doit être le produisant non-seulement des chiffres qui précèdent le point, mais encore des deux chiffres qui suivent le point. C'est pourquoi dans l'o-

pération $3ab + bb$, j'avance les chiffres d'abord d'un pas, ensuite d'un autre pas vers la droite : afin que tous les chiffres du produit soient placés dans des rangs correspondans aux chiffres du membre dont ils doivent être soustraits.

III°. Le nombre donné n'est pas un cube parfait : puisqu'outre le cube de 174, il contient par dessus 37448 unités, qui ne sont pas suffisantes pour donner une unité de plus à la racine. (142.)

IV°. Dans la pratique on néglige ce reste d'unités qui ne peuvent donner une unité à la racine ; où l'on se contente d'un à peu près. Mais si on vouloit avoir plus de précision, on peut approcher à l'infini de la vraie racine cubique : en sorte que ce qui manquera à la racine trouvée, soit moindre qu'un dixième, qu'un centième, qu'un millième d'unité, &c ainsi de suite.

151. PROBLÈME IV. *Extraire la racine cubique, par approximation.*

SOLUTION. Pour extraire la racine cubique par approximation, on opere comme pour la racine quarrée (135) : avec cette différence que l'on ajoute trois chiffres, pour rendre le reste dix fois moindre ; six chiffres pour le rendre cent fois moindre ; neuf chiffres pour le rendre mille fois moindre.

I°. Ainsi dans l'exemple du problème précédent, j'ajoute trois zeros au reste $37448 = \frac{37448}{1}$: ce qui est la même chose que si je le multipliois par 1000 ; & j'en fais une fraction $\frac{37448000}{1000}$, qui aura aussi pour dénominateur 1000 dont la racine cubique est 10. Je continue ensuite d'opérer sur le nombre augmenté, selon la formule ordinaire $3aa + 3ab + bb \times b$: la racine 1343 exprimera des dixièmes d'unité.

Le reste 183913 ne vaut pas un dixième d'unité à la racine : sans quoi la racine seroit 1744, au lieu de 1743 ; ce qui donneroit 174 unités + 4 dixièmes d'unité à la racine.

II°. Et si

IV ^e Membre. 374480.00	<i>Dixiemes.</i>
272640 87	$1743 = 174 + \frac{3}{10} \cdot (53)$
Reste, 183913	90828 = 3 <i>aa</i> : diviseur.
du	522 = 3 <i>ab</i>
nombre. 5305472000	9 = <i>bb</i>
	9088029 Somme.
V ^e	3 = $\times b$
Membre. 1835130.00	27264087 Produit.

II°. Et si on veut que ce qui manque à la racine soit moindre qu'un centieme d'unité, on ajoutera trois zeros au reste 183913; & alors 183913000 sera un *cinquieme membre*, dont on continuera à extraire la racine selon la formule précédente: la racine qu'on trouvera exprimera des *centiemes d'unité*; & ce qui restera de ce cinquieme membre, ne sera pas suffisant pour donner une unité de plus à la racine qui n'exprime que des centiemes d'unité.

III°. Il est clair qu'en ajoutant encore trois zeros au nouveau reste, dont on feroit un *fixieme membre*, on trouveroit une racine qui exprimeroit des *milliemes d'unité*, & à laquelle il ne manqueroit pas un millieme d'unité, pour être la racine exacte du nombre donné: & ainsi de suite à l'infini.

IV°. On trouvera de même par approximation, la racine cubique de 9, en telle sorte que ce qui manquera à cette racine soit moindre qu'un dix millieme de l'unité; en mettant douze zeros à la suite du nombre donné 9, & en extrayant simplement la racine cubique de ce nombre 9,000,000,000,000, selon la méthode des trois problèmes précédens. Cette racine cubique fera 20800 *dix milliemes* de l'unité, qui valent $2 + \frac{800}{10000}$: de sorte que, si un cube ren-

ferme exactement neuf pieds cubes de matiere , la racine cubique approchée de ce cube sera 2 pieds + 800 parties d'un pied divisé en dix mille parties ; & que le cube qui résultera de cette racine ne sera plus petit que le cube donné , que de la dix-millieme partie d'un pied cube de matiere. On voit par-là comment on peut approcher à l'infini de la vraie racine d'un cube imparfait

PARAGRAPHE TROISIEME.

EXALTATION ET EXTRACTION ALGÈBRIQUES.

152. OBSERVATION. Après ce que nous avons dit de la formation des puissances & de l'extraction des racines dans les nombres, on concevra aisément ce que nous avons à dire sur l'exaltation & sur l'extraction des grandeurs exprimées par des quantités algébriques : par exemple ,

I°. Que le *quarré d'une quantité unique* , telle que a , est le produit de cette quantité multipliée par elle-même , ou aa ; & que la *racine quarrée* de aa , est le quotient de aa divisé par a , c'est-à-dire a .

Par la même raison , le quarré d'un terme unique composé de plusieurs quantités , tel que abx , est $aabbxx$; & la racine quarrée de ce quarré $aabbxx$, est abx .

II°. Que le *cube d'une quantité unique* , telle que x , est le produit de cette quantité multipliée par elle-même & multipliant son produit , c'est-à-dire , xxx ; & que la *racine cubique* de ce cube , est le quotient du quarré divisé par la racine , c'est-à-dire x .

Par la même raison , le cube d'un terme unique abc , est $aaabbbccc$ ou $a^3b^3c^3$; & la racine cubique de ce cube , est abc .

III°. Que lorsqu'il n'est pas possible d'extraire la racine quarrée ou cubique d'une quantité algébrique ;

il faut se borner à indiquer cette racine , en mettant sous le signe radical (75) la quantité algébrique. Par exemple, la racine quarrée de a , est \sqrt{a} : la racine cubique de a , est $\sqrt[3]{a}$. Le chiffre 2 placé au-dessus du signe radical , marque que la grandeur quelconque placée sous ce signe , est élevée à sa seconde puissance , ou à son quarré , & qu'il en faut prendre la racine quarrée. Le chiffre 3 placé au-dessus du signe radical , désigne que la grandeur quelconque placée sous le signe , doit être regardée comme un cube dont il faut prendre la racine cubique. Quand le signe radical n'a pas de chiffre au-dessus de lui , il est censé avoir le chiffre 2 , & il signifie la racine quarrée de toute la grandeur qui le suit.

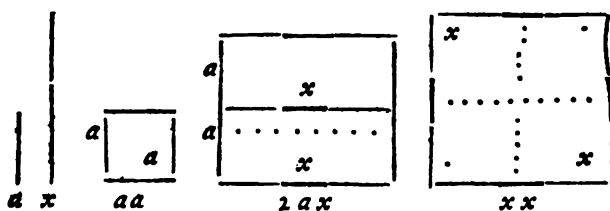
Ainsi la racine quarrée de ab , est \sqrt{ab} : la racine cubique de ab , est $\sqrt[3]{ab}$. De même la racine quarrée de $16 ab$, est $\sqrt{16 ab}$: la racine cubique de $64 ab$, est $\sqrt[3]{64 ab}$. Si on peut tirer la racine d'une partie de la quantité donnée, on le fait ; & on met le reste sous le signe radical. Par exemple , la racine quarrée de $16 ab$, est $4\sqrt{ab}$. De même la racine cubique de $64 ab$, est $4\sqrt[3]{ab}$.

IV°. Que le *quarré d'un binôme*, tel que $a + x$, est le produit de ce binôme multiplié par lui-même , ou $aa + ax + ax + xx$ (100) ; qui par la réduction devient $aa + 2 ax + xx$; & que la *racine quarrée* de ce quarré , est le quotient de ce quarré $aa + 2 ax + xx$, divisé par sa racine $a + x$. (153.)

V°. Que le *cube d'un binôme*, tel que $a + x$, est le produit de ce binôme multiplié par lui-même & multipliant son produit , ou $ada + 2 aax + axx + aax + xxx$ (100) ; qui par la réduction devient $aaa + 3 aax + axx + xxx$; & que la *racine cubique*

de ce cube, est le quotient de ce cube $aaa + 3 aax + 3 axx + xxx$, divisé par $a + x$. (154.)

VI°. Qu'on peut aisément faire sentir comment un binome quelconque $a + x$ s'élève au quarré, par le produit de ses racines ; & comment le quarré $aa + 2 ax + xx$ de ce binome, se décompose ensuite en ses racines $a + x$. Soit la ligne a & la ligne x , qu'il faille multiplier par la ligne a & par la ligne x . On aura d'abord $a \times a = aa$; ensuite $a \times x = ax$; ensuite $x \times a = ax$; enfin $x \times x = xx$. Le binome $a + x$, élevé à son quarré complet, renfermera donc trois termes, qui seront le quarré aa , les deux rectangles ax , le quarré xx ; ou indifféremment le quarré xx , les deux rectangles ax , le quarré aa : comme on le voit dans la figure ici tracée, qui représente l'exaltation d'un binome quelconque $a + x$, ou d'un des binomes dont nous parlerons dans la page suivante. Si le binome, au lieu d'être $a + x$, étoit $bcd + yz$; le premier terme seroit également représenté par la ligne plus ou moins longue a ; & le second, par la ligne x .



On voit aisément qu'en rapprochant & en assortissant ces trois figures ou ces trois produits $xx + 2ax + aa$, on en formera un quarré semblable au quarré AMNCA, que nous avons examiné ailleurs. (fig. 1.)

VII°. Que si au lieu du binome $a + x$, on avoit élevé au quarré le binome $a - x$; le quarré auroit eu également trois termes ; savoir, $aa - 2 ax + xx$, ou

le quarré aa , moins les deux rectangles ax , plus le quarré xx .

Et que si le binome élevé au quarré, eût été $a + \frac{x}{2}$; les produits auroient été $aa + \frac{ax}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{xx}{4}$; & en réduisant, $aa + ax + \frac{xx}{4}$.

Et que si le binome élevé au quarré, eût été $a + 1$; les produits ou les trois termes auroient été $aa + a + a + 1$; & en réduisant, $aa + 2a + 1$.

Et que si le binome élevé au quarré, eût été $a - \frac{1}{2}$; les produits ou les trois termes auroient été $aa - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$; & en réduisant, $aa - a + \frac{1}{4}$.

VIII°. Que le quarré complet d'un binome renferme toujours nécessairement *trois termes*, qui sont le quarré du premier terme, les deux produits du premier terme par le second, & le quarré du dernier terme. Que ces termes soient des quantités entières ou fractionnaires, positives ou négatives; la chose est indifférente au nombre des termes du binome élevé au quarré.

On nomme *quarré complet*, celui qui a tous ses termes; c'est-à-dire, si c'est un binome, celui qui renferme le quarré du premier terme, plus le double produit du premier terme par le second, plus le quarré du second. Le binome $a + b$ fera un quarré complet en cette maniere: $aa + 2ab + bb$. Otez ou le premier terme aa , ou le second terme $2ab$, ou le dernier terme bb : ce sera un *quarré incomplet*, qu'on pourra compléter, en lui ajoutant le terme qui lui manque.

IX°. Que dans le quarré d'un binome quelconque, il ne peut y avoir aucun quarré négatif. Car un binome est nécessairement composé ou de deux quantités positives, ou de deux quantités négatives, ou de deux quantités dont l'une est positive & l'autre négative: or, si on élève au quarré la quantité $+a + b$, ou

— $a - b$; les deux quarrés seront positifs ; & si on élève également au quarré la quantité $+ a - b$, ou $- a + b$, les deux quarrés seront également positifs. (100.)

X°. Que si on élève au cube un binome quelconque , par exemple , $a + x$; on aura d'abord $aaa + aax + aax + axx + aax + axx + axx + xxx$; & en réduisant , $aaa + 3 aax + 3 axx + xxx$.

De-là résulte cette vérité générale , que nous avons déjà développée ailleurs (136) ; savoir , que le cube d'un binome quelconque renferme , outre le cube du premier terme , *trois fois le produit du quarré du premier terme par le second , trois fois le produit du quarré du second terme par le premier , & le cube du second*.

REMARQUE. Il est assez rare qu'on puisse extraire exactement la racine quarrée ou cubique des quantités algébriques : parce que, pour que cette extraction ait lieu, il faut que les quantités sur lesquelles on opere, soient des quarrés ou des cubes complets, ou des quarrés & des cubes auxquels il ne manque aucun de leurs termes. Cependant, comme cette extraction est quelquefois possible, nous allons en donner la méthode dans les deux problèmes suivans.

PROBLÈME PREMIER.

153. *Extraire la racine quarrée d'un polynome algébrique.*

SOLUTION I. Soit donné le polynome $aa + 2 ax + xx$. Surquoi je raisonne ainsi. Puisque la quantité donnée est un polynome, il est clair que sa racine a plus d'un terme : supposons qu'elle en ait deux. Dans cette quantité $aa + 2 ax + xx$, il doit y avoir le quarré du premier terme, le quarré du second terme, & le produit du second terme par le double du premier. (152. VIII°.)

1°. Dans le polynome donné, je remarque d'abord un quarré aa : j'en prends la racine a , pour le premier

des termes que je cherche ; & je l'écris à côté du polynome donné. Après quoi , ayant élevé à son quarré ce premier terme a de la racine cherchée, je soustrais son quarré aa , du polynome donné ; & j'ai pour reste de ce polynome, $+ 2ax + xx$.

Je dis ensuite : dans ce reste $2ax + xx$, il doit y avoir un produit du double de a , par l'autre terme de la racine que je cherche. Je ne puis donc avoir cet

autre terme, qu'en divisant ce reste $2ax + xx$, par le double du terme trouvé a , ou par $2a$. Car la division sert à faire trouver la racine inconnue d'un produit dont on a l'autre racine, en divisant le produit connu par la racine connue : le quotient est l'autre racine ; savoir, ou le multiplicande, ou le multiplicateur. (134.)

Je commence donc la division de $2ax + xx$, par $2a$: le quotient du premier terme est x . Je pose ce quotient $+ x$ à la racine ; & je dis : si x est le second terme cherché ; son produit par $2a$, plus son quarré, doit être égal au reste $2ax + xx$. Je pose donc $+ x$, à côté de $2a$; & je multiplie $2a + x$ par le second terme trouvé x ; (car alors le produit est égal à la somme du produit de x par $2a$, & du quarré de x) : j'ai $2ax + xx$, que je soustrais du reste $2ax + xx$. Et comme il n'y a aucun reste ; je dis que la racine quarrée de $aa + 2ax + xx$, est $a + x$: parce que ,

Polynome donné.	Racine.
$aa + 2ax + xx$	$a + x$
$- aa$	
Reste. $+ 2ax + xx$	
$2a + x$.	
Quotient. $+ x$. Multiplicateur.	
Produit. $+ 2ax + xx$	
$- 2ax - xx$	
Reste. $0 \quad 0$	

par cette opération, on a décomposé cette quantité ; & qu'on en a déduit, sans excès & sans défaut, les parties dont elle étoit composée.

On voit aisément par-là comment il faudroit opérer, si le polynôme donné eût été $aa - 2ax + xx$: la racine cherchée seroit $a - x$; & pour la trouver, il suffiroit de changer dans l'exemple qu'on vient d'apporter, les $+$ en $-$.

- SOLUTION II. Si le polynôme donné eût été $xx - ax + \frac{1}{4}aa$; j'aurois trouvé de la même manière, & d'après les mêmes principes, la racine quarrée de ce polynôme. Car après

avoir pris la racine x du premier terme, j'ai pour reste $-ax + \frac{1}{4}aa$; & je cherche le quotient de ce

Polynôme donné.	Racine.
$+xx - ax + \frac{1}{4}aa$	$x - \frac{1}{2}a$
$-xx$	
Reste. $-1ax + \frac{1}{4}aa$	
$+2x - \frac{1}{2}a$	
Quotient. $-\frac{1}{2}a$.	Multiplieateur.
Produit. $-ax + \frac{1}{4}aa$.	
Reste. $0 \quad 0$	

reste, en le divisant par $2x$, & en disant : $+$ par $-$ donne moins ; le quotient que je cherche sera donc négatif. Le dividende ax n'a point de coefficient : il est donc censé avoir pour coefficient l'unité ; & divisant 1 par 2 , j'ai pour quotient $\frac{1}{2}$. Ensuite divisant ax par la racine x , j'ai pour quotient a ; & par ce qu'on vient de faire & de dire, ce quotient est $-\frac{1}{2}a$. (152. VII^o.)

Je mets ce quotient à la racine : je le place aussi à côté de $+2x$; & je multiplie $2x - \frac{1}{2}a$, par le second terme de la racine ; le produit doit être égal au reste. Je dis donc : d'abord $+$ par $-$ donne un produit négatif. Ensuite 2 par $\frac{1}{2} = 1$; enfin a par $x = ax$. Ainsi j'ai d'abord pour produit de $+2x$ par $-\frac{1}{2}a$, le premier terme $-1ax$, ou $-ax$.

Je dis de même, pour avoir le second terme du produit : d'abord, moins par moins donne $+$; en-

suite, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$: enfin $a \times a = aa$. Ainsi j'ai pour produit de $-\frac{1}{2}a$ par $-\frac{1}{2}a$, le second terme $+\frac{1}{4}aa$. Après quoi, ôtant du premier reste le produit trouvé, je n'ai aucun nouveau reste; & la racine du polynôme donné, est trouvée & exacte.

REMARQUE. Le polynôme $xx - ax + \frac{1}{4}aa$, dont nous venons d'extraire la racine quarrée, auroit pu être donné en cette manière $xx - \frac{2ax}{2} + \frac{aa}{4}$: ces deux polynômes sont en tout parfaitement égaux, ou plutôt ne sont qu'un même polynôme exprimé de deux manières. Quand on en cherche la racine quarrée, racine toujours indispensablement nécessaire pour la résolution des équations du second degré; on l'écrit comme nous avons fait dans la solution du problème: parce que cette manière simplifie & facilite l'extraction de la racine quarrée.

PROBLÈME II.

154. *Extraire la racine cubique d'un polynôme algébrique.*

SOLUTION. On trouvera la méthode & les règles pour extraire la racine cubique d'un polynôme, en raisonnant sur la nature des polynômes élevés au cube, comme nous venons de faire pour la racine quarrée. Soit le polynôme donné $8aaa + 12aab + 6abb + bbb$, dont il faille extraire la racine cubique. Je dis: la racine de cette quantité est un polynôme; puisque cette quantité a plus d'un terme. Supposons que ce soit un binôme: son cube, selon l'observation précédente (152. X^o.), sera composé du cube de chaque terme, & du triple produit du quarré de chaque terme par l'autre. Cela posé,

Je vois d'abord que le premier terme $8aaa$, est un cube. Je prends la racine cubique du coefficient 8;

K iv

cette racine est 2 ; je prends aussi la racine cubique de aaa ; cette racine est a : j'écris cette racine $2a$, à côté du polynôme donné ; & l'ayant élevée à son cube, je

soustrais ce cube, de la quantité donnée ; restent $12aab + 6abb + bbb$.

Je dis ensuite : dans ce reste, doit se

trouver 3

fois le produit du carré du premier terme $2a$ que je viens de trouver, par le second terme que je cherche. J'éleve donc $2a$ au carré, & j'ai $4aa$: je triple, ou je prends trois fois ce carré ; & j'ai $12aa$, par lesquels je commence à diviser le reste. En divisant $12aab$, par $12aa$, j'ai pour quotient $+b$.

Je pose $+b$ à la racine ; & je dis : si $+b$ est le second terme ; la somme de son produit par $12aa$, plus le produit de son carré par $6a$, plus son cube, doit être égal au reste marqué. Or cette somme est $12aab + 6aab + bbb$; somme précisément égale à ce reste, duquel elle doit être soustraite ; donc la racine cubique cherchée est $2a + b$.

On trouvera, d'après les mêmes principes & par la même méthode, la racine cubique d'un polynôme algébrique quelconque, qui fera un cube complet ; soit que ses termes soient tous positifs ; soit qu'ils se trouvent en partie négatifs : il faudra simplement changer à propos les signes $+$ & $-$, dans la soustraction, dans la multiplication, dans la division ; selon l'exigence de la quantité dont on cherche la racine cubique.

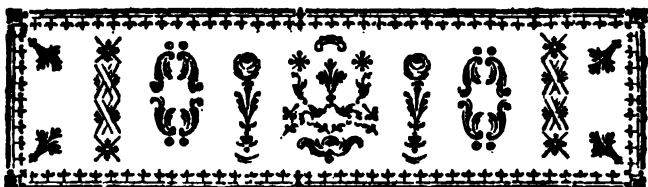
Polynome donné.		Racine.
$8aaa + 12aab + 6abb + bbb$		$2a + b$
$8aaa.$		
<hr/>		
Reste. $+ 12aab + 6abb + bbb.$		
Quotient. $+ b.$		
<hr/>		
Produit. $+ 12aab + 6abb + bbb :$		
$- 12aab - 6abb - bbb.$		
<hr/>		
Reste.	$q \quad q \quad q$	

On voit, par la solution de ces deux problèmes, que *la méthode* qu'il faut suivre pour extraire les racines quarrées ou cubiques des quantités algébriques, est la même pour le fond des choses, que celle que nous avons donnée ailleurs pour l'extraction des racines quarrées ou cubiques des quantités numériques. (129 & 145.)

Nous n'aurons pas besoin, soit dans notre Cours de Physique, soit dans ce Cours de Mathématiques, de connoissances plus étendues & plus développées en fait d'algèbre: rarement même aurons-nous occasion de faire usage de toutes celles que peut donner ce Traité, où nous nous flattons qu'on trouvera la plus grande clarté jointe à la plus grande concision.

On verra plus spécialement dans les deux Traités suivans, l'usage qu'on doit faire, & l'utilité qu'on peut tirer, de l'Algebre.





PRINCIPES
DU CALCUL
ET DE LA GÉOMÉTRIE,
O U
ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES:

TROISIÈME TRAITÉ.
LE CALCUL ANALOGIQUE, OU LES
PROPORTIONS.

L'ANALOGIE (*) est la *Science des Rapports* qui se trouvent entre les grandeurs. Les rapports des grandeurs peuvent être soumis au calcul, aussi bien que les grandeurs elles-mêmes : parce que ces rapports étant susceptibles de plus & de moins, d'augmentation & de diminution, peuvent admettre les mêmes combinaisons que les grandeurs elles-mêmes.

Le rapport d'une grandeur à une autre grandeur,

(*) ÉTYMOLOGIE. Analogie, ἀναλογία : rapport, conformité, ressemblance. De λόγος, *sermo*, *ratio* ; & de ἀνά, *inter*. Quasi *duo inter se relativa* ; seu *unum dicens ordinem ad aliud*.

s'appelle *Raison* : l'égalité de deux raisons s'appelle *Proportion* : une suite de raisons égales s'appelle *Progreſſion*.

Le calcul des raisons ſimples, le calcul des fractions, le calcul des raisons compoſées, le calcul des progreſſions ; telle ſera la matiere de ce Traité, dont on ſentira l'importance, quand on le verra répandre la lumiere ſur preſque toutes les ſciences Mathématiques & Phyſico-Mathématiques. La ſuite apprendra que l'ordre que nous ſuivons, n'eſt pas purement arbitraire,

ARTICLE PREMIER.

CALCUL DES RAISONS SIMPLES.

155. DÉFINITION. **U**NE *Raison en ſtyle mathématique*, eſt le rapport ou la comparaifon de deux quantités, pour en connoître, ſoit la différence, ſoit le quotient.

I°. Toutes les quantités homogenes ont entr'elles un rapport ou une raison : parce qu'elles ont toujours, ou une différence, ou un quotient. Par exemple, 6 & 8 ont une différence, qui eſt 2. De même, 12 & 4 ont un quotient, qui eſt 3. Cette différence ou ce quotient s'appelle *valeur* ou *expoſant* de la raison.

II°. Toute raison eſt compoſée de deux termes : car il ne peut y avoir de comparaifon qu'entre deux termes. Le premier s'appelle *antécédent* ; le ſecond s'appelle *conſéquent*.

III°. Toute raison eſt ou arithmétique ou géométrique. La *raison arithmétique* eſt celle où l'on cherche la différence qui ſe trouve entre l'antécédent & le conſéquent. La *raison géométrique* eſt celle où l'on

cherche combien de fois, ou comment l'antécédent contient le conséquent, ou une partie du conséquent.

IV°. On appelle *raison simple*, le rapport qui se trouve entre deux quantités simplement. On appelle *raison composée*, le produit de deux raisons simples multipliées l'une par l'autre, antécédent par antécédent, & conséquent par conséquent. Il ne s'agit maintenant que des raisons simples : nous traiterons d'abord des raisons géométriques, & ensuite des raisons arithmétiques.

PARAGRAPHE PREMIER.

RAISONS GÉOMÉTRIQUES.

156. DÉFINITION. **L**A *raison géométrique* est la manière dont une grandeur contient une autre grandeur, ou une partie de cette autre grandeur : la première est l'antécédent; la seconde est le conséquent. *La raison géométrique est donc le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent.* Par exemple, il y a un rapport ou une raison géométrique, entre 12 & 4 : ce rapport ou cette raison est 3 ; parce que 3 exprime combien de fois la première grandeur 12 contient la seconde grandeur 4. Ce quotient 3 est l'*exposant* de la raison : il exprime sa valeur.

I°. Il faut observer ici, qu'une grandeur peut en contenir une autre, ou en entier, ou en partie. Par exemple, 8 contient 2, quatre fois : mais 2 contient seulement une partie de 8, savoir le quart. Le rapport, ou la raison de 8 à 2, est 4 : le rapport, ou la raison de 2 à 8, est $\frac{1}{4}$. L'*exposant* de la première raison, est 4 : l'*exposant* de la seconde raison est $\frac{1}{4}$.

II°. Les raisons prennent différents noms, suivant le rapport de l'antécédent au conséquent. La raison de

2 à 1, s'appelle *raison double*; celle de 3 à 1, *raison triple*; celle de 4 à 1, ou de 12 à 3, *raison quadruple*; celle de 5 à 1, ou de 25 à 5, *raison quintuple*; celle de 3 à 2, *raison sesqui-altere*; celle de 1 à 1, ou de 12 à 12, *raison d'égalité*. Mais la raison de 1 à 2, s'appelle *raison sous-double*; celle de 1 à 3, *raison sous-triple*.

III°. La raison géométrique s'exprime en cette manière, 8 . 2; ou bien en cette manière $\frac{8}{2}$: ce qui signifie, 8 est à 2. De même, $a . b$, ou $\frac{a}{b}$, signifie a est à b .

157. COROLLAIRE I. L'exposant d'une raison géométrique étant le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent; il est clair que *le conséquent multiplié par l'exposant de la raison, doit être égal à l'antécédent*: puisque dans toute division, le produit du diviseur par le quotient, est égal au dividende (48). Ainsi dans la raison, 8 est à 2, dont l'exposant est 4; $2 \times 4 = 8$. De même dans la raison, 2 est à 8, dont l'exposant est $\frac{1}{4}$; $8 \times \frac{1}{4} = 2$. (67.)

158. COROLLAIRE II. Puisque dans une raison géométrique, l'antécédent est toujours égal au conséquent multiplié par l'exposant de la raison; si dans une raison géométrique quelconque on nomme a l'antécédent, b le conséquent, m l'exposant, il est évident qu'on aura toujours $a = bm$; & qu'on pourra toujours substituer à la grandeur a , son égale bm .

I°. Quand l'antécédent a est *plus grand* que son conséquent b , l'exposant m représente un entier sans reste, ou avec un reste; par exemple 2, ou 4, ou 10, ou 100, &c.

II°. Quand l'antécédent a est *plus petit* que son conséquent b , l'exposant m représente une fraction qui a pour numérateur l'unité; par exemple $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{10}$, ou $\frac{1}{100}$, & ainsi du reste.

III°. Quand l'antécédent a est *égal* à son conséquent

b , l'exposant m représente l'unité. Par exemple, dans la raison 10 est à 10, le quotient, ou l'exposant m , est égal à 1. (11. VII^o.)

159. COROLLAIRE III. *Quand deux raisons géométriques sont égales, leurs exposans sont égaux.* Par exemple, dans ces deux raisons égales, 9 est à 3, 21 est à 7, l'exposant m de la première est 3; l'exposant m de la seconde est aussi 3. De même dans ces deux raisons égales, 3 est à 9, 7 est à 21, l'exposant m de la première est $\frac{1}{3}$; l'exposant m de la seconde est aussi $\frac{1}{3}$.

160. COROLLAIRE IV. *Une raison géométrique est d'autant plus grande, que l'antécédent contient plus de fois son conséquent, ou une plus grande partie de son conséquent.*

EXPLICATION. Par exemple, cette raison 8 est à 2, est plus grande que celle-ci, 8 est à 4: de même cette raison 4 est à 8, est plus grande que celle-ci, 2 est à 8. D'où il suit,

I^o. Que le conséquent restant le même, la raison augmente à proportion que l'on augmente l'antécédent.

II^o. Que l'antécédent restant le même, la raison diminue à proportion qu'on augmente le conséquent.

161. DÉFINITION I. On distingue deux sortes de parties dans un tout; les parties aliquotes & les parties aliquantes.

I^o. Les *parties aliquotes* sont celles qui répétées un certain nombre de fois mesurent leur tout exactement; c'est-à-dire, sans reste & sans excès. Par exemple, 3 est partie aliquote de 12: parce qu'étant répété quatre fois, il mesure exactement 12; ou, ce qui est la même chose, parce qu'il est contenu quatre fois exactement dans 12.

II^o. Les *parties aliquantes* sont celles qui ne sont pas contenues exactement dans leur tout, & qui répétées un certain nombre de fois, l'excèdent, ou ne

l'atteignent pas entièrement. Par exemple, 5 est partie aliquante de 12 : parce qu'il y est contenu deux fois avec un reste qui est 2.

III°. Un nombre qui peut se diviser exactement & sans reste par un nombre plus petit, est un *multiple* de ce dernier nombre ; & le nombre diviseur est partie aliquote du nombre divisé. Ainsi 8 est un multiple de 4 & de 2 ; de même 12 est un multiple de 6, de 4, de 3, de 2, qui en sont les parties aliquotes. En général, *tout nombre entier est un multiple de l'unité* : parce que ce nombre, par exemple, 11 ou 99 ou 100, peut être divisé exactement & sans reste par l'unité, qui en est toujours partie aliquote. Mais *un nombre 8 ou 100 n'est pas un multiple de 3 ou de 7*, par exemple ; parce que ces nombres ne peuvent pas être divisés exactement & sans reste par 3 ou par 7 : ce nombre 3 est partie aliquante de 8 & de 100. Un nombre entier 4 a une infinité de multiples, 8, 12, 16, 20, 24, & ainsi de suite à l'infini.

IV°. En général, tout nombre entier qui n'est multiple d'aucun nombre entier plus grand que l'unité, s'appelle *nombre premier*. Voici les nombres premiers au dessous de cent : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

162. DÉFINITION II. Lorsque l'on compare les parties, soit aliquotes soit aliquantes, d'un tout avec celles d'un autre tout ; il y a des parties que l'on appelle *semblables*.

Les *parties semblables* sont celle qui sont contenues chacune de la même manière dans leur tout. Ainsi 5 & 7 sont des parties semblables de 15 & de 21 : parce que 5 est contenu trois fois dans son tout 15, comme 7 est contenu trois fois dans son tout 21. De même 2 & 4 sont des parties semblables de 5 & de 10, de 7 & de 14.

Nous allons poser & expliquer quelques principes , nécessaires pour l'intelligence de ce traité.

PRINCIPES SUR LES RAISONS.

163. PRINCIPÉ I. *Le rapport de deux grandeurs est égal au rapport qui est entre leurs moitiés , ou leurs tiers , ou leurs quarts , ou leurs cinquièmes , & ainsi de suite.*

DÉMONSTRATION. Ce principe est évident : puisque si la première des grandeurs contient trois fois l'autre ; on conçoit que la moitié de la première contiendra trois fois la moitié de la seconde ; que le quart de la première contiendra trois fois le quart de la seconde ; que le millièame de la première contiendra trois fois le millièame de la seconde ; & ainsi de suite à l'infini. C. Q. F. D.

164. PRINCIPÉ II. *Les produits sont entre eux comme les racines , lorsqu'elles ont été multipliées par la même quantité.*

EXPLICATION. Ce principe signifie que quand on multiplie deux grandeurs , comme 8 & 4 , par une troisième telle que 5 ; les produits 40 & 20 ont entre eux une raison égale à celles des deux premières grandeurs avant la multiplication : ou plus simplement , que les produits sont entre eux , comme les multipliques.

DÉMONSTRATION. Les deux racines 8 & 4 , converties en produits par leur commun multiplicateur 5 , sont devenues chacune cinq fois ce qu'elles étoient avant la multiplication : donc les deux produits auront entre eux les mêmes rapports qu'ont entre elles les cinq parties qui les composent. Donc si chacune des parties du premier produit , égale à sa racine , contient deux fois une partie du second produit égale aussi à sa racine ;

racine ; il est évident que tout le premier produit contiendra deux fois tout le second produit. On peut dire la même chose des tiers, des quarts, des centièmes, des millionièmes, &c de toute autre partie déterminée du premier produit relativement au second.

Si les deux racines avoient été multipliées par 30 ou par 100, les deux racines converties en produits seroient devenues ou trente ou cent fois ce qu'elles étoient avant la multiplication ; &c par conséquent les produits auroient été chacun ou trente fois ou cent fois plus grands. C. Q. F. D.

155. PRINCIPE III. *Lorsqu'on divise deux grandeurs par une troisieme ; les quotiens ont entre eux une raison égale à celle des grandeurs avant la division ; ou plus brièvement, les quotiens sont entre eux comme les dividendes.*

DÉMONSTRATION. C'est une suite du premier principe précédent ; puisque les quotiens de deux grandeurs divisées par une troisieme, sont des parties semblables de ces deux grandeurs. Par exemple, si le diviseur est 3, les quotiens sont des tiers : si le diviseur est 9, les quotiens sont des neuvièmes : si le diviseur est 100, les quotiens seront des centièmes. La raison ou le rapport qui est entre les deux grandeurs entières, reste donc égal à l'égard des quotiens, qui sont des parties semblables des deux grandeurs ou des deux dividendes. C. Q. F. D.

166. PRINCIPE IV. *Deux raisons sont égales entre elles, quand elles sont égales à une troisieme raison : puisque deux raisons sont représentées par leurs exposants (159) ; &c que ces exposants étant égaux chacun à l'exposant d'une troisieme raison, sont nécessairement égaux entre eux.*

1°. Par exemple, soient les deux raisons, a est à b ;

c est à d , dont les exposants m & n soient égaux chacun à l'exposant 3 de la raison 30 est à 10 : il est évident que les deux premières raisons, égales chacune à la troisième, sont égales entre elles.

III. Comme deux raisons égales forment une proportion, ainsi que nous l'observerons bientôt ; si on a deux raisons égales à une troisième raison, ces deux raisons formeront une proportion. Par exemple,

Si A est à B , comme M est à N

Si R est à S , comme M est à N ;

Donc A est à B , comme R est à S

Par exemple encore,

Si A est à B , comme MN est à mn ;

Si RR est à rr , comme MN est à mn ;

Donc RR est à rr , comme A est à B

167. PRINCIPÉ V. Quand deux raisons sont égales entre elles, si une troisième raison est égale à l'une des deux, elle est aussi égale à l'autre.

EXPLICATION. Soient ces deux raisons égales 3. 6; & 300. 600. Si la raison ab . cd est égale à la première raison, elle est aussi égale à la seconde ; puisqu'alors l'antécédent ab sera contenu deux fois dans son conséquent cd ; comme l'antécédent 3 est contenu deux fois dans son conséquent 6 ; comme l'antécédent 300 est contenu deux fois dans son conséquent 600.

168. PRINCIPÉ VI. Quand deux ou trois raisons sont égales entre elles, on peut substituer l'une à l'autre dans le calcul : puisqu'étant égales, elles ont chacune une même valeur.

169. PRINCIPÉ VII. Deux raisons sont égales entre elles, quand l'antécédent de la première est à son conséquent, comme l'antécédent de la seconde est à son conséquent.

EXPLICATION. Deux raisons sont donc toujours égales entre elles,

I°. Quand chaque antécédent contient son conséquent, ou est contenu dans son conséquent ; un égal nombre de fois exactement & sans reste. Par exemple ; 6 est à 3, comme 8 est à 4 : ou bien 5 est à 10, comme 7 est à 14 : ces raisons sont égales ; parce que les antécédens sont contenus dans leurs conséquens, ou contiennent leurs conséquens, un même nombre de fois exactement & sans reste.

II°. Quand chaque antécédent contient son conséquent ; ou est contenu dans son conséquent ; un égal nombre de fois avec des restes qui sont entre eux, comme sont entre eux les antécédens respectifs. Par exemple ; 5 est à 11, comme 10 est à 24. Chaque conséquent contient le même nombre de fois son antécédent ; & il y a dans chaque raison des restes 2 & 4, qui sont entre eux comme l'antécédent de la première raison est à l'antécédent de la seconde.

De même 16 est à 5 comme 48 est à 15. Chaque antécédent contient un même nombre de fois son conséquent ; & il y a dans chaque raison des restes 1 & 3, qui sont entre eux comme sont entre eux les antécédens respectifs des deux raisons. Le reste 1 est contenu dans le reste 3, autant de fois que l'antécédent dont 1 est le reste, est contenu dans l'antécédent dont 3 est le reste.

On pourroit également dire que les restes doivent être entre eux, comme sont entre eux les conséquens respectifs.

PARAGRAPHE SECONDE.

PROPORTIONS GÉOMÉTRIQUES.

170. DÉFINITION. Deux raisons égales forment une proportion. Ainsi une proportion n'est autre chose que l'égalité des deux raisons, ou la comparaison de deux raisons égales.

I°. La *proportion géométrique* est donc une comparaison de deux raisons géométriques égales. Par exemple, la raison géométrique de 15 à 5, étant égale à celle de 21 à 7; ces deux raisons forment une proportion géométrique que l'on marque souvent en cette manière, $\frac{15}{5} = \frac{21}{7}$; & plus ordinairement en celle-ci : 15 . 5 :: 21 . 7.

Lorsqu'il s'agit d'énoncer une proportion, comme celle que l'on a apportée pour exemple, on dit : 15 est à 5, comme 21 est à 7 : ou bien 15 & 5, 21 & 7 sont proportionnels. Soit encore cet exemple en lettres ; A . B :: C . D : l'on dit de même A est à B, comme C est à D ; ou bien A & B, C & D sont proportionnels.

II°. Dans une proportion il y a quatre termes ; savoir, l'antécédent & le conséquent de la première raison ; l'antécédent & le conséquent de la seconde raison. Le premier & le dernier terme s'appellent les *extrêmes* ; le second & le troisième s'appellent les *moyens*. Soit cette proportion, A . B :: C . D : les extrêmes sont A & D : les moyens sont B & C.

III°. Quelquefois le même terme est conséquent de la première raison, & antécédent de la seconde ; & alors ce terme s'appelle *moyen proportionnel*, & la proportion s'appelle *proportion continue*. Par exemple, 5 . 10 :: 10 . 20. A . B :: B . C.

IV°. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, est l'*égalité* du produit des extrêmes au produit des moyens. Il n'y a point de proposition dans toutes les mathématiques, d'un usage plus étendu : nous allons en faire le théorème suivant, l'un des plus beaux théorèmes de toutes les mathématiques.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

171. Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

DÉMONSTRATION. 1°. Soit en nombres une proportion quelconque , par exemple celle-ci : $8 : 4 :: 6 : 3$. Il s'agit de démontrer que le produit de 8 par 3 , qui sont les deux extrêmes , est & doit être toujours nécessairement égal au produit de 4 par 6 , qui sont les deux moyens. Pour cela ,

Si on multiplie 8 & 4 par 3 ; le produit de 4 fera la moitié du produit de 8 ; puisque 4 est la moitié de 8 (164). Mais si au lieu de multiplier 4 par 3 , on le multiplie par un nombre double de 3 ; le produit qui en viendra sera double du produit de 4 par 3 , & par conséquent égal au produit de 8 par 3. Or le second moyen 6 est nécessairement le double de 3 ; parce que le premier antécédent 8 étant le double de son conséquent 4 , il faut aussi que le second antécédent 6 soit le double de son conséquent 3 : autrement il n'y auroit pas de proportion. Donc le produit de 4 par 6 est égal au produit de 8 par 3 ; donc le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.

Il est évident que la même démonstration peut s'appliquer à toute autre proportion , en changeant seulement les termes de moitié & de double , selon que l'exige le rapport de l'antécédent au conséquent. Par exemple , dans cette proportion $2 : 6 :: 3 : 9$; si on multiplie 2 & 6 par un même nombre 9 ; le produit de 6 fera 3 fois plus grand que le produit de 2. Mais si au lieu de multiplier 6 par 9 , on le multiplie par un nombre qui soit nécessairement 3 fois plus petit ; le produit qui en résultera , sera trois fois plus petit que le précédent , & par conséquent égal au produit de 2 par 9.

II°. On peut généraliser ainsi cette démonstration. S'il y a proportion entre quatre grandeurs quelconques , l'exposant de la première raison est égal à l'exposant de la seconde : donc si $a : b :: c : d$; on aura $a = bm$, & $c = dm$. (153.)

On peut donc dans cette proportion , en place de

la grandeur a , mettre son égale bm ; & en place de la grandeur c , mettre son égale dm : & alors, au lieu de la proportion $a, b :: c, d$, on aura celle-ci, qui est précisément la même proportion exprimée en d'autres termes, $bm, b :: dm, d$.

Or dans cette dernière proportion, il est évident que le produit bdm des extrêmes, est égal au produit bdm des moyens, C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

172. *Lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre grandeurs sont proportionnelles.*

DÉMONSTRATION I. Soient les nombres 8, 4, 6, 3; dont le produit des extrêmes 8×3 , soit égal au produit des moyens 4×6 : nous allons démontrer que $8, 4 :: 6, 3$.

Le premier multiplicande 8 étant double du second multiplicande 4; il faut évidemment, pour que les produits soient égaux, que le multiplicateur de 4 soit double du multiplicateur de 8. Donc si les produits sont égaux, il faut que le premier multiplicande 8, soit au second multiplicande 4; comme le second multiplicateur 6, est au premier multiplicateur 3. Donc si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, il y a proportion entre les quatre grandeurs.

On démontrera la même chose toutes les fois que les deux produits seront égaux. Car pour lors si le premier multiplicande est triple du second, le second multiplicateur sera triple du premier: si le premier multiplicande est cent fois plus grand que le second, le second multiplicateur sera cent fois plus grand que le premier: si le premier multiplicande est dix fois ou mille fois plus petit que le second; le second multiplicateur sera dix fois ou mille fois plus petit que le

premier; & ainsi du reste. On entend par *second multiplicateur*, le troisième terme de la proportion qui multiplie le second; & par *premier multiplicateur*, le dernier terme qui multiplie le premier. C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION II. On peut généraliser ainsi cette démonstration. Si quatre grandeurs quelconques a, b, c, d , sont disposées de telle sorte que le produit des extrêmes ad , soit égal au produit des moyens bc ; ces quatre grandeurs sont nécessairement en proportion. Car si elles ne l'étoient pas, il faudroit que l'exposant de la raison $\frac{a}{b}$ des deux premières grandeurs, fut ou *plus grand* ou *plus petit* que l'exposant de la raison des deux dernières grandeurs: ce qui est impossible. Pour le faire voir, nommons m l'exposant de la première raison, & n l'exposant de la seconde: nous aurons $a = bm$; & $c = dn$ (158). Ainsi les quatre grandeurs $abcd$, seront bm, b, dn, d ; & alors le produit bdm des extrêmes, ne sera plus égal au produit bdn des moyens: ce qui est contre l'hypothèse. Donc si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; il faut que le rapport m des deux premières grandeurs, soit égal au rapport n des deux dernières. C. Q. F. D.

173. COROLLAIRE I. *Quand deux produits sont égaux, on peut toujours en tirer une proportion.*

EXPLICATION. Soient deux produits égaux quelconques $ad = bc$. Je dis qu'on aura $a : b :: c : d$, ou bien $a : c :: b : d$: ce qui est évident; puisque le produit des extrêmes, est égal au produit des moyens; & qu'il y a toujours proportion, quand ces produits sont égaux.

Divers changemens dans une Proportion.

174. COROLLAIRE II. *Puisqu'il y a toujours propor-*
L. IV

fairement proportion entre quatre grandeurs quelconques, toutes les fois que le produit des extrêmes se trouve égal au produit des moyens; il s'ensuit qu'il y aura encore proportion dans les grandeurs suivantes $8.4 :: 6.3$

I^o, Si l'on fait changer de place aux deux extrêmes, sans déranger les deux moyens. Si $8.4 :: 6.3$; donc $3.4 :: 6.8$.

II^o, Si l'on fait changer de place aux deux moyens, sans déplacer les deux extrêmes. Si $8.4 :: 6.3$; donc $8.6 :: 4.3$. Ce double changement s'appelle *alternando*.

III^o, Si l'on fait changer de place & aux deux extrêmes & aux deux moyens, en mettant dans l'une & dans l'autre raison l'antécédent à la place du conséquent, & le conséquent à la place de l'antécédent. Si $8.4 :: 6.3$; donc $4.8 :: 3.6$. Ce changement s'appelle *invertendo*.

IV^o, Si dans l'une & dans l'autre raison, l'on ajoute les conséquents aux antécédents, ou les antécédents aux conséquents. Si $8.4 :: 6.3$; donc $8 + 4.4 :: 6 + 3.3$; donc $8.4 + 8 :: 6.3 + 6$. Ce changement s'appelle *addendo* ou *componendo*.

V^o, Si dans l'une & dans l'autre raison l'on retranche les conséquents des antécédents, ou les antécédents des conséquents. Si $8.4 :: 6.3$; donc $8 - 4.4 :: 6 - 3.3$; donc $8.4 - 8 :: 6.3 - 6$. Ce changement s'appelle *subtrahendo* ou *dividendo*.

Il est inutile d'avertir &c de faire remarquer que les changemens qu'on fait dans une proportion quelconque en nombres $8.4 :: 6.3$, sans la détruire, peuvent également se faire dans une proportion en lettres $a, b :: c, d$: puisque les raisons sont les mêmes de part & d'autre. Il ne s'agit donc plus ici que de faire sentir les raisons de ces changemens dans la démonstration suivante.

DÉMONSTRATION. Etant démontré qu'il y a proportion entre quatre grandeurs, toutes les fois que les deux extrêmes multipliés l'un par l'autre, donnent le même produit que les deux moyens multipliés aussi l'un par l'autre :

I°. Il est évident qu'on peut faire dans une proportion les trois premiers changemens dont nous venons de parler, sans détruire la proportion : puisque dans ces changemens, les deux extrêmes restent toujours tellement arrangés, qu'ils doivent être multipliés l'un par l'autre, aussi bien que les deux moyens ; & qu'il est indifférent, quand on multiplie deux grandeurs, de multiplier la première par la seconde, ou la seconde par la première. (93.)

II°. La raison des deux derniers changemens n'est pas moins évidente & sensible : puisque dans ces changemens les multiplicandes ou les multiplicateurs de chaque raison étant augmentés ou diminués proportionnellement ; il est clair que les produits qui en résultent, en multipliant les extrêmes l'un par l'autre, & les moyens l'un par l'autre, doivent être égaux & dans le même rapport qu'auparavant. Or si les produits des extrêmes & des moyens sont égaux, & dans le même rapport qu'auparavant, il est évident que la proportion n'est point détruite. C. Q. F. D.

Usage des deux Théorèmes précédents.

175. **REMARQUE.** Ces deux théorèmes sont d'un usage infini dans le calcul, dans la géométrie, dans toutes les sciences physico-mathématiques, dans l'usage de la vie civile ; comme on le verra par la suite.

I°. Le premier théorème fait trouver le quatrième terme d'une proportion dont on connoît trois termes. Si je sais que quatre grandeurs sont proportionnelles ; quand j'en connois trois, je trouve toujours la qua-

estime inconnue, laquelle est ou un des extrêmes ou un des moyens. Je multiplie donc les deux termes connus l'un par l'autre, un extrême par un extrême, ou un moyen par l'autre moyen. Je divise ensuite le produit par l'autre terme connu, & le quotient exprime le terme inconnu qu'on cherchoit. A la place du terme inconnu on met un signe quelconque, s'est ordinairement la lettre x .

Par exemple, si j'ai la proportion $97 : 19 :: 64 : x$; je multiplie 19 par 64 : je divise le produit 1216 par 97; & je trouve que le terme inconnu est $12 + \frac{12}{97}$. J'ai donc la proportion toute connue. $97 : 19 :: 64 : 12 + \frac{12}{97}$.

II°. Le second théorème fait connoître si quatre grandeurs sont proportionnelles. Quand je doute si quatre grandeurs sont proportionnelles; je multiplie les deux extrêmes l'un par l'autre, & l'un par l'autre les deux moyens. Si le produit est égal, je sais qu'elles sont proportionnelles : si le produit n'est pas égal, je connois qu'elles ne sont pas proportionnelles.

III°. Les proportions servent à faire connoître le rapport des grandeurs. Il est évident, par exemple, qu'un pouce est à une lieue, comme deux pouces sont à deux lieues, comme dix pouces sont à dix lieues, comme mille pouces sont à mille lieues.

Il est évident que si j'ai une ligne de douze pouces, & une ligne de douze lieues à mesurer; quand je retrancherai la moitié de chacune, je retrancherai six pouces à l'une, & six lieues à l'autre : que si je les double toutes les deux, j'ajouterai à l'une douze pouces, & à l'autre douze lieues. Si j'ai donc cette proportion $A : B :: C : D$; & que A vaille dix pouces, B dix lieues, C vingt-cinq pouces, je conclurai que D vaut vingt-cinq lieues. Les proportions font connoître également le rapport des terns, des vitesses, des poids.

Au lieu de pouces que nous avons pris pour exemple

dans ce que nous venons de dire , on peut prendre quelque mesure déterminée que ce soit. On se sert communément d'une ligne ou d'une échelle qu'on divise en parties bien égales par le moyen du compas (411). Il est évident que deux degrés de cette échelle , sont à deux toises ; comme vingt degrés de cette échelle sont à vingt toises , comme mille degrés de cette échelle sont à mille toises ; & ainsi de suite. Ce que nous disons des toises , on peut le dire de toute autre mesure déterminée ; par exemple , des pieds , des pas géométriques , des rayons & des diamètres de la terre ,

RAISONS DIRECTES ET INVERSES.

176. DÉFINITION. Quatre grandeurs peuvent être ou en raison directe , ou en raison inverse.

I°. Quatre grandeurs sont en raison directe ; quand le premier terme est au second , comme le troisième est au quatrième. Par exemple , $12, 3 :: 8, 2$.

II°. Quatre grandeurs sont en raison inverse , ou réciproque , ou indirecte , (car c'est la même chose) ; quand le premier terme est au second , comme le quatrième est au troisième ; par exemple $12, 3 :: 2, 8$, en raison inverse.

III°. On voit par-là comment la raison inverse se convertit en raison directe. Il ne s'agit que de faire changer de place à deux termes de la proportion. Par exemple , si $A . B :: C , D$ en raison inverse ; c'est-à-dire que $A . B :: D . C$ en raison directe.

IV°. On fait par la théorie des combinaisons , que quatre grandeurs quelconques $abcd$, sont susceptibles de 24 arrangemens différens (113) ; & en supposant que ces quatre grandeurs , ainsi arrangées , soient en proportion géométrique , on trouvera que dans les 24 combinaisons ou arrangemens qu'on peut leur donner , il y en a 8 , où elles sont en raison directe ; & autres ,

où elles sont en raison inverse ; 8 autres enfin , où elles ne sont ni en raison directe, ni en raison inverse.

REGLE DE TROIS.

177. DÉFINITION. Etant donnés trois termes d'une proportion , on trouve toujours le quatrième , qui est ou un des extrêmes , ou un des moyens (175). Cette manière ou *cette méthode de trouver un quatrième terme proportionnel* , s'appelle la *regle de trois* : parce que par le moyen de trois termes connus , elle donne toujours le quatrième. Elle s'appelle aussi la *regle d'or* ; à cause de sa grande utilité dans les sciences & dans l'usage de la vie civile. Elle est quelquefois *directe* , quelquefois *inverse*.

Regle de Trois directe.

178. DÉFINITION. La *regle de trois est directe* ; lorsque dans l'état de la question , le quatrième terme inconnu x que l'on cherche , doit être d'autant plus grand ou plus petit par rapport au troisième ; que le second est plus grand ou plus petit par rapport au premier. Par exemple , $10 . 5 :: 30 . x$: cette regle de trois est directe ; parce que dans l'état de la question , les deux derniers termes sont entre eux dans le même ordre que les deux premiers.

Par exemple encore , supposé qu'on fasse cette question : si quinze ouvriers ont fait vingt toises d'ouvrage , combien quarante-cinq ouvriers en feront-ils dans le même tems ? On voit que ces quatre termes sont en raison directe ; voici comment on les arrange : . . .

15 ouvriers . 20 toises :: 45 ouvriers . x toises : ou
15 ouvriers . 45 ouvriers :: 20 toises . x toises.

Cette dernière disposition est plus naturelle ; parce qu'on y compare les termes homogènes l'un avec

l'autre. Pour avoir le quatrieme terme ; je multiplie les deux moyens l'un par l'autre : le produit est 900. Je divise 900 par le premier extrême 15 ; le quotient 60 sera le quatrieme terme cherché.

Quand on peut voir tout de suite le rapport du premier terme au second terme ; il n'est pas nécessaire de faire la multiplication & la division pour trouver le terme inconnu de la proportion. Dans le dernier exemple proposé , je vois que le premier antécédent 15 ouvriers , est le tiers de son conséquent 45 ouvriers : je conclus que le second antécédent 20 toises sera aussi le tiers de son conséquent x ; & par conséquent que x sera trois fois 20 toises = 60 toises.

Regle de Trois inverse.

179. DÉFINITION. La regle de trois est inverse ; lorsque par l'état de la question on voit que le quatrieme terme inconnu doit être ou d'autant plus grand par rapport au troisieme , que le second est plus petit par rapport au premier ; ou d'autant plus petit par rapport au troisieme , que le second est plus grand par rapport au premier. Telle seroit cette question : trois ouvriers ont fait un certain ouvrage en dix heures : six ouvriers en combien de tems l'auroient-ils fait ?

Pour s'assurer si l'état de la question exprime une raison directe ou une raison indirecte , il faut mettre les termes homogenes avec les homogenes , savoir , les ouvriers avec les ouvriers , les heures avec les heures en cette maniere : 3 ouvriers . 6 ouvriers :: 10 heures . x heures

Or , l'on voit que les deux derniers termes ne sont point dans le même ordre que les deux premiers ; ou que le quatrieme terme n'est pas plus grand que le troisieme , de même que le second est plus grand que le premier. Car six ouvriers doivent faire le même ouvrage en moins de tems , que ne l'ont fait trois ou-

griers. Pour conserver la proportion juste, il faut donc placer au troisieme rang le terme inconnu x en cette maniere :

3 ouvriers . 6 ouvriers :: x heures : 10 heures.

Cette regle s'appelle *inverse*, ou *réciproque*, ou *indirecte* : parce que dans la proportion telle qu'elle a été d'abord donnée, les deux derniers termes homogenes sont entre eux dans un ordre renversé des deux premiers.

Usage de la Regle de Trois.

180. REMARQUE. La *regle de trois* est le flambeau du calcul & de la géométrie. Un seul exemple suffira pour en montrer l'usage & l'utilité dans la géométrie. Quand il est démontré que deux figures, par exemple, deux triangles ont leurs côtés correspondans proportionnels; trois côtés mesurés & connus font connoître le quatrieme qu'il seroit impossible de connoître & de mesurer sans la regle de trois. (*fig. 45.*)

I°. Si je fais que les deux triangles *abc*, *ABC*, sont semblables & ont leurs côtés correspondans proportionnels; je fais cette proportion ou cette regle de trois : la base *ab* que je mesure, est à la base *AB* que je mesure; comme le côté *ac* que je mesure, est au côté *AC*, qu'il me seroit impossible de mesurer. Supposons que la base *ab* contienne 86 lignes, la base *AB* 86 toises, le côté *ac* 359 lignes :

J'aurai 86 lignes . 86 toises :: 359 lignes . x toises :
ou *alternando*, 86 lignes . 359 lignes :: 86 toises . x toises.

Après avoir multiplié les deux moyens l'un par l'autre; je divise le produit par le premier extrême connu : le quotient me donne la mesure précise du côté inconnu *AC* qu'il falloit trouver.

II°. On trouvera de même & par la même méthode l'autre côté inconnu du grand triangle, savoir *BC*, qu'il seroit impossible de mesurer sans la regle de

trois. Je fais pour cela cette proportion ou cette regle de trois : la base *ab* que je mesure , est à la base *AB* que je mesure ; comme le côté *bc* que je mesure , est au côté *BC* qu'il me seroit impossible de mesurer. Supposons encore que la base *ab* contienne 86 parties de l'échelle des parties égales (141), la base *AB* 86 toises , le côté *bc* 497 parties de la même échelle : J'aurai *ab* , *AB* :: *bc* . *BC* Et en chiffres , . 86 . 86 :: 497 . *x* ou *alternando* , . 86 : 497 :: 186 . *x* = 497 toises.

III°. Si les chiffres étoient différens dans les deux raisons de la dernière proportion , après la multiplication & la division , le quotient exprimera la mesure du côté inconnu.

PARAGRAPHE TROISIEME.

RAISONS ARITHMETIQUES.

181. DÉFINITION: **L**A *raison arithmétique* est la différence dont l'antécédent surpasse le conséquent , ou est surpassé par le conséquent.

I°. C'est par la soustraction que l'on connoît de combien une grandeur surpasse une autre. C'est pourquoi on connoît la valeur d'une *raison arithmétique* , en ôtant le conséquent de l'antécédent , ou l'antécédent du conséquent. Par exemple , on connoît la valeur de la *raison arithmétique* 6 à 2 , en ôtant 2 de 6 : la différence , ou la valeur de cette raison , est 4.

II°. Deux *raisons arithmétiques* , égales entre elles , forment une *proportion arithmétique* : voici comment on l'exprime , soit en chiffres , 6 . 2 : 12 . 8 ; soit en lettres , *a* . *b* : *c* . *d*.

III°. Le premier & le dernier terme de la *proportion arithmétique* , sont les *extrêmes* : le second & le troisième sont les *moyens*.

THÉORÈME I.

182. Dans une proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

DÉMONSTRATION. I°. Soit la proportion arithmétique $5 : 8 : 9 : 12$. Je dis que la somme des extrêmes $5 + 12$, est égale à celle des moyens $8 + 9$. Pour saisir & démontrer cette égalité, considérez que si le premier extrême 5, est surpassé de 3 par le premier moyen 8; aussi le second extrême 12 surpassé nécessairement le second moyen 9, de la même quantité 3 : sans quoi il n'y auroit pas de proportion arithmétique. Donc le défaut du premier extrême est compensé par l'excès du second : donc la somme des extrêmes $5 + 12$, doit être égale à la somme des moyens $8 + 9$.

II°. Il est évident que le même raisonnement peut être appliqué à toute autre exemple de proportion arithmétique, dont les conséquens surpasseroient également les antécédens. Il est évident encore que ce seroit la même chose, si les antécédens surpassoient également les conséquens : car pour lors l'excès du premier extrême compenseroit le défaut de l'autre extrême.

III°. Il n'est pas moins évident que le même raisonnement peut être également appliqué à une proportion arithmétique exprimée en lettres. Si $a : b : c : d$; donc $a + d = b + c$: sans quoi il n'y auroit pas de proportion arithmétique entre les quatre grandeurs. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

183. La proposition inverse du théorème précédent, est encore vraie : si la somme des extrêmes est égale

égale à la somme des moyens, les quatre grandeurs sont en proportion arithmétique.

DÉMONSTRATION. Par exemple, si $a + d = b + c$; il faut que $a : b :: c : d$. Car la somme $a + d$ étant égale à cette autre somme $b + c$:

I°. Il est évident que si b surpasse a de la quantité x ; il faut aussi que d , surpasse c de la même quantité x : sans quoi la somme $a + d$ ne seroit pas égale à la somme $b + c$. Ainsi on aura la proportion $a : b :: c : d$; puisque le conséquent b surpasse son antécédent, de la même quantité dont le conséquent d surpasse son antécédent.

II°. Il est évident de même que si b est surpassé par a de la quantité x ; il faut aussi que d soit surpassé par c de la même quantité x : sans quoi la somme $a + d$ ne seroit pas égale à la somme $b + c$. Ainsi on aura encore la proportion $a : b :: c : d$; puisque le conséquent b est surpassé par son antécédent, de la même quantité dont le conséquent d est surpassé par son antécédent. C. Q. F. D.

184. COROLLAIRE. Dans une proportion arithmétique, on peut faire changer de place aux deux extrêmes, ou aux deux moyens, sans détruire la proportion : puisque dans ces changemens, les quatre termes restent toujours tellement arrangés, qu'un extrême fait somme avec l'autre extrême; & qu'un moyen fait somme avec l'autre moyen. Si $a : b :: c : d$; donc $d : b :: c : a$; donc $a : c :: b : d$; donc encore $b : a :: d : c$; donc encore $a + b : b : c + d : d$. Donc encore $a - b : b : c - d : d$; & ainsi du reste.

185. DÉFINITION. Dans une proportion arithmétique, on appelle moyen proportionnel arithmétique, un terme qui est conséquent de la première raison, & antécédent de la seconde. Ainsi dans cette proportion arithmétique $6 : 9 :: 9 : 12$; le nombre 9 est moyen proportionnel arithmétique.

Cette proportion s'appelle *proportion continue* ; & on la marque communément en cette manière $\div 6 . 9 . 12$. De même dans cette autre *proportion continue arithmétique* $\div 9 . 6 . 3$; le nombre 6 est moyen proportionnel ; & pris deux fois , il égale la somme des deux autres termes $9 + 3$.

ARTICLE SECOND.

CALCUL DES FRACTIONS.

186. OBSERVATION. **L**a science des fractions est d'une nécessité indispensable dans le calcul , dans la géométrie , dans la physique , dans l'usage de la vie civile : parce qu'il arrive très-fréquemment que les grandeurs dont on est obligé de chercher les rapports , ne sont pas exprimées par des nombres ronds ou entiers ; & qu'on a souvent besoin de connoître la valeur de leurs restes. Cette partie du calcul a beaucoup de rapport avec la division arithmétique & algébrique , & avec la théorie des raisons & des proportions géométriques dont nous venons de traiter.

187. DÉFINITION. Une *fraction* est une quantité qui exprime le rapport ou la raison d'une partie à son tout : le numérateur , marqué au-dessus , exprime la partie ou le nombre des parties ; le dénominateur , marqué au-dessous , exprime le tout divisé en ses parties. Ainsi , une fraction , une raison géométrique , une division , sont trois points de vue différents , qui appartiennent à une même chose.

1°. Une fraction est réellement une raison géométrique & une division. Ce qui s'appelle antécédent & conséquent dans une raison géométrique ; dividende & diviseur dans une division numérique ou algébrique.

s'appelle *numérateur & dénominateur* dans une fraction (13). C'est pourquoi une fraction, telle que $\frac{2}{4}$, peut se représenter comme une raison géométrique $2 \cdot 4$; & réciproquement, une raison géométrique $2 \cdot 4$, peut s'exprimer par une division ou par une fraction $\frac{2}{4}$.

II°. Pour se former une *idée exacte d'une fraction*, il faut faire attention qu'un nombre entier quelconque 24, exprime combien une quantité contient de parties égales, dont chacune est appelée une unité : quelle que soit la *nature de cette unité*, qui peut être ou une ligne ou une toise ou un pied ou une livre ou une once ou une heure, & ainsi du reste. Par exemple, 24 pieds expriment une grandeur qui contient 24 parties, dont chacune est une unité, laquelle est ici un pied. Mais il n'y a aucune unité, c'est-à-dire, aucune partie de la quantité assignée en nombres, qu'on ne puisse concevoir composée elle-même d'un certain nombre de parties égales plus petites : chacune ou quelques-unes de ces parties, forment une portion ou une fraction de cette unité. Par exemple, étant donnée à mesurer une étendue de dix à onze pieds ; je puis trouver 10 pieds, plus 3 parties d'un pied égal à douze pouces : ces trois parties formeront une fraction en cette manière, 10 pieds $+$ $\frac{3}{12}$ d'un pied. S'il s'agissoit de toises, on auroit 10 toises $+$ $\frac{3}{6}$ d'une toise : parce que l'unité de la toise divisée en pieds, est 6 pieds.

III°. Une *fraction proprement dite* est toujours une quantité moindre que l'unité : parce que dans une fraction proprement dite, le numérateur doit toujours être plus petit que le dénominateur, ou que l'unité divisée en ses parties. Cependant il arrive assez souvent qu'on rencontre des *expressions en forme de fraction*, où le numérateur est égal au dénominateur, ou même plus grand que le dénominateur.

VALEUR D'UNE FRACTION.

188. OBSERVATION. I°. Quand le numérateur est égal au dénominateur, la fraction est égale à l'unité. Par exemple, $\frac{1}{1} = 1$: parce qu'un tout, égal à toutes ses parties prises ensemble, est toujours contenu une fois dans lui-même, ou dans toutes ses parties prises ensemble.

II°. Quand le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction vaut plus que l'unité. Par exemple, la fraction vaut deux, si le numérateur est double du dénominateur : la fraction vaut quatre, si le numérateur est quadruple du dénominateur ; & ainsi de suite. Par conséquent, $\frac{2}{1} = 2$; $\frac{4}{1} = 4$; $\frac{6}{2} = 3$; $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{24}{4} = 6$; $\frac{100}{40} = 2\frac{5}{2}$.

III°. Quand le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction vaut moins que l'unité. Par exemple, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$; $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$; $\frac{1}{11} = \frac{1}{11}$.

189. REMARQUE. Comme la valeur ou l'exposant d'une raison géométrique, est le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent ; de même la valeur ou l'exposant d'une fraction, est le quotient du numérateur divisé par le dénominateur. D'où il suit,

I°. Que lorsque deux fractions ont le même dénominateur ; la plus grande est celle dont le numérateur est plus grand : parce qu'alors la fraction approche plus de l'unité, ou surpasse plus l'unité.

II°. Que lorsque deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle dont le dénominateur est plus petit.

Soient ces deux fractions $\frac{2}{10}$ & $\frac{3}{10}$, qui ont le même dénominateur : la première fraction est plus grande que la seconde. Car la première $\frac{2}{10}$ est plus petite que le tout, ou que l'unité, seulement d'un dixième ; puisqu'il faut que $\frac{10}{10} = 1$: au lieu que la seconde $\frac{3}{10}$ est plus petite

que le tout ou que l'unité, de deux dixièmes.

Soient encore les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{2}$ qui ont le même numérateur. La première $\frac{2}{3}$ est plus grande que la seconde $\frac{1}{2}$; parce que la première vaut deux tiers de l'unité; au lieu que la seconde ne vaut que la moitié de l'unité.

Valeurs comparées, de deux fractions.

190. COROLLAIRE. Il suit des principes que nous venons de poser & de développer :

I°. Que quand deux fractions ont le même dénominateur, les valeurs des fractions sont entr'elles comme les numérateurs. Les fractions $\frac{1}{10}$ & $\frac{4}{10}$ sont entr'elles comme 1 & 4.

II°. Que Quand deux fractions ont le même numérateur, les valeurs des fractions sont entr'elles en raison réciproque ou inverse des dénominateurs. La fraction $\frac{1}{10}$ est à la fraction $\frac{1}{12}$, comme 12 est à 10. La fraction $\frac{1}{4}$ est à la fraction $\frac{1}{8}$, comme 8 est à 4. La fraction $\frac{1}{r}$ est à la fraction $\frac{1}{R}$, comme R est à r. La fraction $\frac{1}{rr}$ est à la fraction $\frac{1}{RR}$, comme RR est à rr (*).

III°. Que quand deux fractions ont différens numérateurs & différens dénominateurs, les valeurs des deux fractions sont entr'elles comme leurs quotiens. La fraction $\frac{2}{3}$, est à la fraction $\frac{6}{12}$; comme le quotient de la première $\frac{2}{3}$, est au quotient de la seconde $\frac{1}{2}$.

(*) Par exemple, que r vaille 4; & que R vaille 12. La fraction $\frac{1}{r}$ sera $\frac{1}{4}$: la fraction $\frac{1}{R}$ sera $\frac{1}{12}$: ces deux fractions sont entr'elles, comme 12 est à 4. La fraction $\frac{1}{rr}$ sera $\frac{1}{16}$: la fraction $\frac{1}{RR}$ sera $\frac{1}{144}$: la première fraction est à la seconde, comme 144 est à 16.

T H É O R È M E.

191. Une fraction, multipliée ou divisée par un même nombre quelconque, ne change point de valeur.

DÉMONSTRATION. I°. Soit une somme quelconque, par exemple 100 écus, sur laquelle j'aie une moitié ou $\frac{1}{2}$. En multipliant par un nombre quelconque la fraction qui exprime la moitié qui m'appartient, on ne changera pas la valeur de la fraction. Multipliez les deux termes de la fraction $\frac{1}{2}$ par 5 : le produit sera $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Multipliez la même fraction $\frac{1}{2}$ par 50 : le produit sera $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Multipliez encore la même fraction $\frac{1}{2}$ par 1000 : le produit sera $\frac{1000}{2000} = \frac{1}{2}$.

II°. Soit la même somme ou une autre somme quelconque sur laquelle j'aie $\frac{1}{4000}$, qui exprime un quart de la somme. En divisant par un nombre quelconque la fraction qui exprime la partie de la somme qui m'appartient; on ne changera pas la valeur de la fraction. Par exemple, divisez la fraction $\frac{1}{4000}$, c'est-à-dire le numérateur, & ensuite le numérateur, par 2 : le quotient sera $\frac{1}{8000} = \frac{1}{4000}$. Divisez la même fraction $\frac{1}{8000}$ par 200 : le quotient sera $\frac{1}{1600000} = \frac{1}{8000}$. Divisez encore la même fraction $\frac{1}{1600000}$ par 1000 : le quotient sera $\frac{1}{1600000000} = \frac{1}{1600000}$. C. Q. F. D.

192. COROLLAIRE. Il résulte de-là, qu'il y a une infinité de fractions de même valeur, quoique exprimées en termes différens.

Les fractions sont susceptibles des mêmes opérations que l'on fait sur les nombres entiers : mais pour être soumises au calcul, elles ont quelquefois besoin d'être préparées par deux opérations préliminaires, qui sont la transformation & la réduction.

TRANSFORMATION DES FRACTIONS.

193. DÉFINITION. La transformation des fractions

consiste à faire le changement d'une fraction en une autre fraction, ou d'un entier en une fraction, ou d'une fraction en un entier.

194. PROBLÈME I. *Transformer une fraction, en une autre fraction de même valeur.*

SOLUTION. On peut transformer une fraction en une autre fraction de même valeur :

I°. En multipliant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction. Par exemple, en multipliant par 2. l'un & l'autre terme de la fraction $\frac{1}{2}$; on aura $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{5}{10}$; & ainsi de suite: lesquelles fractions, sous différentes expressions, conservent la même valeur. (192.)

II°. En divisant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction, lorsque cette division peut se faire sans reste. Par exemple, en divisant par 2 l'un & l'autre terme de la fraction $\frac{2}{4}$, on aura $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{6}{12}$: ces fractions sont toutes de même valeur.

195. REMARQUE. Cette dernière opération réduit la fraction à une expression plus simple; & pour cette raison, s'appelle *réduction des fractions à leurs plus simples termes*. Sur quoi voici quelques observations à faire.

I°. Pour réduire une fraction à l'expression la plus simple, divisez l'antécédent & le conséquent par un nombre qui divise l'un & l'autre sans reste, par exemple par 2, autant de fois que les deux termes pourront être divisés par 2: ensuite par 3 ou par 5, autant de fois que la fraction déjà réduite à de moindres termes, pourra être divisée sans reste par 3 ou par 5: & ainsi de suite.

En général, pour réduire une fraction, à ses moindres termes, il faut diviser le numérateur & le dénominateur de la fraction par leur plus grand commun

diviseur ; c'est-à-dire , par le plus grand nombre qui puisse diviser sans reste l'un & l'autre terme de la fraction.

II°. Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités , il faut diviser la plus grande par la plus petite ; & si la division est juste & sans reste , la plus petite quantité est le plus grand commun diviseur cherché. Mais s'il se trouve un reste , on doit (négligeant le quotient) diviser la plus petite quantité par ce reste ; & si la division est juste & sans reste , ce sera le plus grand commun diviseur. Mais s'il se trouve un second reste , il faut diviser le premier reste par le second , & continuer toujours de même à diviser (en négligeant les quotiens) le reste précédent par le reste suivant ; & celui qui divisera justement le reste précédent , sera le plus grand commun diviseur cherché. Car les deux quantités données seront toujours des produits exacts de ce dernier reste : parce que celui-ci répété un certain nombre de fois , égalera chacune des deux quantités ; qui seront des multiples de ce reste.

Par exemple , si je veux trouver le plus grand commun diviseur de 96 & 44 , je divise le plus grand nombre par le plus petit : j'ai pour quotient 2 , que je néglige ; & pour reste 8 ; par lequel je divise 44. Dans cette seconde division , j'ai pour quotient 5 , que je néglige ; & pour reste 4 , par lequel je divise le reste précédent 8 : ce dernier diviseur 4 divise son dividende 8 sans reste. Ce nombre 4 est le plus grand commun diviseur des nombres 96 & 44. De même 5 est le plus grand commun diviseur des nombres 25 & 20.

III°. S'il arrive que le dernier reste soit 1 , c'est une marque que ces deux nombres n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité ; & ces nombres sont appelés *nombres premiers* : c'est le nom qu'on donne aux nombres qui ne sont divisibles exactement &

sans reste, que par eux-mêmes, & par l'unité. Tels sont les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, &c. (161.)

Or toutes les fois que dans une fraction le numérateur & le dénominateur seront des nombres premiers, elle ne pourra pas être réduite à de plus simples termes : parce que dans ce cas, le numérateur & le dénominateur n'auront point d'autre diviseur commun que l'unité.

196. PROBLÈME II. *Transformer un entier, en une fraction de même valeur.*

SOLUTION. On transforme un entier en une fraction de même valeur, en multipliant l'entier par le dénominateur que l'on veut lui donner. Par exemple, si l'on veut réduire 4 en fraction, on aura $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5}$: & ainsi de suite. Il est évident que chacune de ces fractions est égale en valeur au nombre entier 4.

De même, si on veut mettre en fraction la quantité entière r , on aura $r = \frac{r}{1} = \frac{r}{r} = \frac{r^2}{r^2} = \frac{r^3}{r^3}$: parce que l'entier r étant multiplié & divisé par une même quantité ; la division détruit ce qu'avoit fait la multiplication, & réciproquement. Ainsi la valeur de r , sous toutes ces expressions, reste la même.

197. PROBLÈME III. *Transformer une fraction, en un entier de même valeur.*

SOLUTION. On transforme une fraction en un entier d'égale valeur, en divisant le numérateur par le dénominateur, lorsque la division peut se faire sans reste. Par exemple, $\frac{12}{3} = 4$: de même, $\frac{100}{10} = 10$: de même encore, $\frac{a}{a} = a^0$, ou 1.

Si la division ne peut pas se faire exactement & sans reste, comme dans cette fraction $\frac{1}{2}$; la valeur de

286 LE CALCUL ANALOGIQUE.

cette fraction sera l'entier 4, plus le reste 2 du numérateur à qui il faudra laisser le même dénominateur 3 : ainsi $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$.

RÉDUCTION DES FRACTIONS.

198. DÉFINITION. La réduction des fractions consiste à leur donner ou un dénominateur commun, ou un dénominateur quelconque.

199. PROBLÈME I. Réduire des fractions à un dénominateur commun.

SOLUTION. 1°. S'il n'y a que deux fractions à réduire au même dénominateur ; cette réduction se fait en multipliant les deux termes de chaque fraction, par le dénominateur de l'autre fraction. Par exemple, ces deux fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ seront réduites au même dénominateur 12 ; si on multiplie dans la première 1 & 3 par 4 ; & dans la seconde 1 & 4 par 3. Car $\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$: ensuite $\frac{3 \times 1}{4 \times 1} = \frac{3}{12}$.

Il est évident que ces fractions, réduites au même dénominateur, n'ont point changé de valeur. Dans la première, le numérateur & le dénominateur ont été multipliés par une même quantité 4 : dans la seconde, le numérateur & le dénominateur ont été multipliés par une même quantité 3 : donc la valeur des deux fractions n'a point été changée. (191.)

Pour réduire en une fraction seule, un entier joint à une fraction, par exemple, $6 + \frac{1}{4}$; il faut multiplier le nombre entier par le dénominateur de la fraction, ajouter le numérateur de la fraction à ce produit ; & de la somme faire le numérateur de la fraction cherchée qui conservera le dénominateur de la première fraction. Ainsi $6 + \frac{1}{4}$ se réduit à la fraction $\frac{25}{4}$: de même $3 + \frac{1}{2}$ se réduit à $\frac{7}{2}$: de même encore

13 + $\frac{2}{10}$ revient à $\frac{162}{10}$: de même enfin $1 + \frac{4}{10}$ donne la fraction unique $\frac{14}{10}$. Cette réduction est très-souvent nécessaire dans le calcul des fractions : quand on a à multiplier ou à diviser un entier & une fraction, par un entier & une fraction ; il faut commencer par réduire le multiplicande en une fraction unique d'une part, & le multiplicateur en une autre fraction unique de l'autre.

11°. S'il y a plus de deux fractions à réduire au même dénominateur ; cette réduction se fait en multipliant le numérateur & le dénominateur de chacune, par le produit des dénominateurs des autres fractions. Soient les trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, à réduire au même dénominateur. Je multiplie d'abord les deux termes de la première fraction ou $\frac{1}{2}$, par le produit 15 des dénominateurs 3 & 5 ; & j'ai cette fraction transformée en son égale $\frac{15}{30}$. Je multiplie ensuite les deux termes de la seconde fraction $\frac{2}{3}$ par le produit 30 des dénominateurs 6 & 5 ; & j'ai cette fraction transformée en son égale $\frac{40}{30}$. Je multiplie enfin les deux termes de la troisième fraction $\frac{4}{5}$ par le produit 18 des deux dénominateurs 6 & 3 ; & j'ai cette fraction transformée en son égale $\frac{72}{30}$. On trouvera donc en suivant la règle prescrite, les trois fractions réduites $\frac{15}{30}$, $\frac{40}{30}$, $\frac{72}{30}$.

On suit la même méthode pour les fractions littérales. Par exemple, les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, réduites au même dénominateur, sont $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$. De même les trois fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ & $\frac{m}{n}$, réduites au même dénominateur, sont $\frac{adn}{bdn}$ & $\frac{cdn}{bdn}$ & $\frac{mbn}{nbd}$.

200. PROBLÈME II. Réduire une fraction à un dénominateur quelconque ; ou évaluer une fraction.

SOLUTION. Pour réduire une fraction à un dénomi-

nateur quelconque , par exemple la fraction $\frac{4}{12}$ au dénominateur 6 , il faut :

1°. Multiplier l'un & l'autre terme de la fraction par le dénominateur donné 6 : ce qui donne $\frac{24}{72}$.

II°. Diviser l'un & l'autre terme de la nouvelle fraction $\frac{24}{72}$; par le dénominateur 12 de la fraction : ce qui donnera la fraction réduite $\frac{2}{6}$, dont le dénominateur est devenu 6.

Cette réduction s'appelle *évaluation* , & sert à évaluer les fractions en parties connues ; par exemple , les parties ou fractions de toises , en pieds ou en parties sixiemes , qui sont des parties connues ; car le pied est $\frac{1}{6}$ de la toise : ce qui se fait en réduisant la fraction de toise au dénominateur 6.

De même si on a les fractions $\frac{1}{12}$ d'une heure , ou $\frac{17}{44}$ d'une somme de livres ; on évalue ces deux fractions , en réduisant la première au dénominateur 60 minutes , & la seconde au dénominateur 20 sols , qui sont des parties connues de l'heure & de la livre.

Il est évident qu'en faisant cette double opération , on ne change pas la valeur des fractions : parce que dans ces transformations , on ne fait que multiplier ou diviser par une même quantité ; ce qui ne change pas la valeur des fractions. (191.)

ADDITION DES FRACTIONS.

201. REGLE I. *Pour ajouter ensemble des fractions qui ont un même dénominateur ; il faut prendre la somme des numérateurs , & donner à cette somme le dénominateur commun des fractions.* Par exemple , il est évident que $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{7}{8} + \frac{8}{8} = \frac{18}{8}$: que $\frac{6}{10} + \frac{12}{10} = \frac{18}{10}$.

202. REGLE II. *Pour ajouter ensemble des fractions qui ont des dénominateurs différens , il faut les réduire à un même dénominateur ; & prendre la somme de tous les numérateurs des fractions réduites , pour en faire*

ADDITION ET SOUSTRACTION DES FRACTIONS. 189

de numérateur d'une nouvelle fraction qui ait pour dénominateur, le dénominateur des fractions réduites. Alors cette règle revient à la précédente. Par exemple, pour ajouter ensemble les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, je les réduis à celles-ci $\frac{16}{24}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{18}{24}$ (199) : la somme des numérateurs est 46 : j'ai donc la fraction $\frac{46}{24}$; & en la réduisant à l'expression la plus simple, $1 + \frac{11}{12}$.

SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

203. REGLE I. Pour soustraire une fraction, d'une autre fraction de même dénominateur ; il faut prendre la différence des numérateurs, & en faire le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun. Par exemple, si on veut soustraire $\frac{7}{10}$ de $\frac{11}{10}$; il est clair qu'on aura $\frac{4}{10}$.

204. REGLE II. Pour soustraire une fraction, d'une autre fraction de différent dénominateur ; il faut les réduire l'une & l'autre au même dénominateur, prendre la différence entre les numérateurs des fractions réduites, & en faire le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun. Par exemple, s'il faut soustraire $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$: réduisez ces deux fractions à celles-ci, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$: il est clair que la différence est $\frac{1}{12}$.

205. REMARQUE. Si la fraction de la quantité à soustraire est plus grande, ou s'il faut ôter une fraction d'un nombre entier ; alors il faut réduire en fraction une unité de ce nombre entier. Par exemple, pour ôter $3 + \frac{1}{3}$, de $6 + \frac{1}{4}$; je réduis la quantité $6 + \frac{1}{4}$, à la quantité $5 + \frac{5}{4}$: & réduisant ensuite $\frac{5}{4}$ & $\frac{1}{3}$ au même dénominateur, j'ai $\frac{25}{12}$ & $\frac{4}{12}$. J'ôte $\frac{4}{12}$ de $\frac{25}{12}$, restent $\frac{21}{12}$. J'ôte enfin 3 de 5, restent 2 : en sorte que la différence cherchée est $2 + \frac{7}{12}$.

MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

206. DÉFINITION. Dans la multiplication des frac-

zions , il s'agit ou de multiplier une fraction par un entier , ou une fraction par une fraction , ou un entier par une fraction , ou un entier & une fraction par un entier & une fraction.

207. REGLE I. *Pour multiplier une fraction par un entier , il faut multiplier seulement le numérateur de la fraction par l'entier.* Par exemple , pour multiplier $\frac{3}{4}$ par 4 , multipliez le numérateur 3 par 4 ; & laissant le même dénominateur , vous aurez la fraction $\frac{12}{4}$, qui est le produit de $\frac{3}{4}$ par 4.

La raison en est , qu'en multipliant $\frac{3}{4}$ par 4 , on cherche une fraction quatre fois plus grande : or en multipliant le seul numérateur par 4 , on rend la fraction quatre fois plus grande ; puisque les fractions $\frac{3}{4}$ & $\frac{12}{4}$ qui ont le même dénominateur , sont entre elles comme les numérateurs. (190.)

On peut aussi réduire l'entier en fraction , en lui donnant l'unité pour dénominateur , & alors cette règle reviendra à la suivante.

208. REGLE II. *Pour multiplier une fraction par une autre fraction , il faut multiplier les deux numérateurs l'un par l'autre , & les deux dénominateurs aussi l'un par l'autre.* Par exemple , pour multiplier les deux fractions $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{8}$ l'une par l'autre , multipliez 3 par 4 , & 5 par 8 : vous aurez pour produits $\frac{12}{40}$, qui seront les fractions multipliées l'une par l'autre.

Pour saisir la raison de cette règle , faites attention que pour multiplier la première fraction $\frac{3}{4}$ par le nombre entier 4 , il faut multiplier seulement le numérateur 3 par 4 ; & on aura la fraction $\frac{12}{4}$, qui est le véritable produit : comme nous venons de le démontrer. Mais le produit de $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{8}$ doit être huit fois plus petit que $\frac{12}{4}$; puisque le multiplicateur $\frac{4}{8}$ ou 4 divisé par 8 , est huit fois plus petit que le multiplicateur entier 4 : il faut donc rendre la fraction $\frac{12}{4}$, huit

MULTIPLICATION ET DIVISION DES FRACTIONS. 198

fois plus petite. Or pour rendre la fraction $\frac{12}{7}$ huit fois plus petite, il n'y a qu'à multiplier son dénominateur par 8 : on aura la fraction $\frac{12}{56}$, huit fois plus petite que la fraction $\frac{12}{7}$; parce que deux fractions qui ont le même numérateur, sont entre elles en raison inverse des dénominateurs. (190.)

209. REGLE III. *Pour multiplier un entier par une fraction, il faut réduire l'entier en fraction ; & alors ce cas revient au cas précédent.* Par exemple, pour multiplier 7 par $\frac{6}{10}$; transformez l'entier 7 en $\frac{7}{1}$, & multipliez l'un par l'autre les deux entécédens & les deux conséquens des deux fractions : vous aurez pour produit $\frac{42}{10}$, qui seront les deux fractions multipliées l'une par l'autre.

Pour multiplier un entier & une fraction, par un entier & une fraction ; il faut réduire le multiplicande à une fraction unique ; le multiplicateur à une autre fraction unique (199) : alors on multipliera ces deux fractions l'une par l'autre, selon la règle précédente. (208.)

DIVISION DES FRACTIONS.

210. DÉFINITION. Dans la division des fractions ; il s'agit ou de diviser une fraction par un entier, ou une fraction par une fraction, ou un entier par une fraction, ou un entier & une fraction par un entier & une fraction. La division des fractions est l'opération inverse de la multiplication.

211. REGLE I. *Pour diviser une fraction par un entier,*

1°. Si le numérateur de la fraction peut être divisé exactement & sans reste par l'entier, *il faut diviser ce numérateur par l'entier ; & laisser à la fraction son dénominateur.* Par exemple, pour diviser $\frac{6}{7}$ par 3, il faut diviser 6 par 3 : on aura $\frac{2}{7}$, qui est la fraction

divisée par 3, ou rendue trois fois plus petite. Car $\frac{6}{\frac{2}{12}} \cdot \frac{2}{12} :: 6 \cdot 3$. (190.)

II°. Mais si le numérateur de la fraction ne peut pas être divisé exactement par l'entier, *il faut multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier ; en laissant à la fraction son même numérateur*. Par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par 4, il faut multiplier 3 par 4 : on aura $\frac{2}{12}$, quotient de la fraction $\frac{2}{3}$ qu'il falloit diviser par 4.

La raison de cette seconde méthode est qu'en divisant une fraction par 4, on cherche à rendre la fraction quatre fois plus petite ; & qu'on la rend quatre fois plus petite, en lui laissant le même numérateur, & en rendant quatre fois plus grand son dénominateur : parce que la valeur des fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{2}{12}$ qui ont le même numérateur, est en raison inverse des dénominateurs. (190.)

III°. On peut aussi *réduire l'entier en fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur ; & alors cette règle reviendra à la suivante*. Par exemple, $\frac{2}{3}$ divisé par $\frac{4}{1} = \frac{2}{12}$.

212. REGLE II. *Pour diviser une fraction par une autre fraction, il faut les multiplier en croix ; c'est-à-dire, qu'il faut multiplier le numérateur de la première, par le dénominateur de la seconde ; & le dénominateur de la première par le numérateur de la seconde*. Par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$; multipliez 2 par 5, & 3 par 4 : les produits $\frac{10}{12}$ seront le quotient cherché.

Voici la raison de cette méthode. Si on avoit à diviser $\frac{2}{3}$ par un entier 4, on auroit pour quotient $\frac{2}{12}$: comme il a été démontré dans l'exemple précédent. Mais on ne divise pas par 4 ; puisqu'on divise par un nombre cinq fois plus petit $\frac{4}{5}$: il faut donc que le quotient soit cinq fois plus grand que $\frac{2}{12}$.

Or

MULTIPLICATION ET DIVISION DES FRACTIONS. 193

Or on rend ce quotient cinq fois plus grand, en multipliant le numérateur 2 de la première fraction, par le dénominateur 5 de la seconde : puisque les dénominateurs étant les mêmes, deux fractions $\frac{2}{12}$ & $\frac{10}{12}$ sont entre elles, comme les numérateurs. (190.)

213. REGLE III. Pour diviser un entier par une fraction, il faut réduire l'entier en une fraction qui ait pour dénominateur l'unité : & alors cette division revient à la division précédente. 10 ou $\frac{10}{1}$ divisé par $\frac{7}{12} = \frac{120}{7}$.

De même a ou $\frac{a}{1}$ divisé par $\frac{a}{b} = \frac{ba}{a}$.

Pour diviser un entier & une fraction, par un entier & une fraction ; il faut réduire le dividende à une fraction unique ; le diviseur à une autre fraction unique (199) : alors on divisera les deux fractions ainsi simplifiées, selon la seconde règle précédente. (212.)

EXALTATION ET EXTRACTION DES FRACTIONS.

214. REGLE I°. Pour avoir le carré d'une fraction ; il faut élever le numérateur & le dénominateur chacun à son carré. Par exemple, le carré de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{4}$: le carré de $\frac{3}{4}$ est $\frac{9}{16}$. De même le carré de $\frac{a}{x}$ est $\frac{aa}{xx}$.

II°. Pour avoir le cube d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur, chacun à son cube. Le cube de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{8}$: le cube de $\frac{4}{10}$ est $\frac{64}{1000}$. La raison de ces opérations est évidente, après ce que nous avons dit de la multiplication des fractions.

III°. L'exaltation des fractions à une puissance quelconque, se fait en élevant le numérateur & le dénominateur à la puissance proposée.

IV°. Par la raison contraire, l'extraction des fractions se fait en prenant la racine, tant du numérateur,


que du dénominateur. Par exemple, $\frac{1}{2}$ est la racine quarrée de $\frac{1}{4}$; & la racine cubique de $\frac{1}{8}$.

V°. Lorsqu'il n'est pas possible d'extraire la racine juste, on se contente de l'indiquer par le signe radical. Par exemple, la racine quarrée de $\frac{1}{3}$ est $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

215. COROLLAIRE I. *Les fractions décroissent dans l'exaltation, & croissent dans l'extraction* : c'est-à-dire, que dans les fractions, la racine est plus grande que la puissance; au lieu que dans les nombres entiers, la racine est plus petite que la puissance.

EXPLICATION. Dans un nombre entier 2, par exemple, la racine 2 est *plus petite* que sa seconde puissance ou son quarré 4; que sa troisième puissance ou son cube 8. Mais dans un nombre fractionnaire $\frac{1}{2}$, par exemple; la fraction $\frac{1}{2}$ est *plus grande* que son quarré $\frac{1}{4}$; que son cube $\frac{1}{8}$: comme il est évident. De même la fraction $\frac{2}{3}$ est plus grande que son quarré $\frac{4}{9}$ & que son cube $\frac{8}{27}$. De même encore la fraction $\frac{a}{b}$ est plus grande que son quarré $\frac{aa}{bb}$, & que son cube $\frac{aaa}{bbb}$.

216. COROLLAIRE II. *Un nombre entier ne peut avoir pour racine une fraction.* Car une fraction racine est toujours plus grande que sa puissance, comme on vient de le démontrer: or dans les nombres entiers, la puissance au contraire est toujours plus grande que la racine.

Mais il faut observer que dans le cas de ces deux corollaires, la fraction doit être une *vraie fraction*, une fraction proprement dite, qui exprime une ou plusieurs parties de l'unité: par conséquent il faut que le numérateur soit  petit que le dénominateur. Par exemple, $\frac{1}{2}$ sont une unité $+\frac{1}{2}$: ainsi $\frac{1}{2}$ est la vraie fraction. (187.)

On voit ici pourquoi on ne peut jamais trouver exactement la racine quarrée ou cubique d'un nombre

entier 2 ou 10 ou 67, qui n'est pas un carré ou un cube parfait, produit par un nombre entier.

ARTICLE TROISIEME.

CALCUL DES RAISONS COMPOSÉES.

217. DÉFINITION. **U**NE *Raison composée* est le produit de deux ou de plusieurs raisons simples. Par exemple, $\frac{ac}{bd}$ est la raison composée des raisons simples $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. De même, la raison $\frac{ace}{bdf}$ est la raison composée des trois raisons simples $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. Par exemple encore en nombres, ces deux raisons simples $\frac{2}{4}$, $\frac{7}{8}$, multipliées l'une par l'autre, antécédent par antécédent, & conséquent par conséquent, donneront cette raison composée $\frac{14}{32}$.

De même dans ces trois raisons simples, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{11}$ si on multiplie le premier antécédent par le second, & le produit des deux premiers antécédens par le troisième; & qu'on multiplie de même les conséquens; on aura cette raison composée $\frac{56}{110}$.

Raisons doublées.

218. DÉFINITION. Les raisons simples, qui forment la raison composée, peuvent être égales ou inégales. Quand les deux raisons composantes sont inégales, la raison qui en résulte, est appelée simplement *raison composée*: quand les deux raisons composantes sont égales; la raison qui en résulte est appelée *raison doublée*.

Ainsi la *raison doublée* est le produit de deux rai-

sons égaux, dont les antécédens ont été multipliés l'un par l'autre, aussi bien que les deux conséquens. Par exemple, si $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$; $\frac{12}{24}$ est une raison doublée.

S'il n'y a qu'une seule raison composante, par exemple $\frac{a}{b}$, la raison doublée de cette raison simple est formée du carré de l'antécédent & du carré du conséquent. Ainsi $\frac{aa}{bb}$ est la raison doublée de $\frac{a}{b}$; de même $\frac{16}{36}$ est la raison doublée de $\frac{4}{9}$.

On voit ici qu'une raison doublée est tout autre chose qu'une raison double (156); comme on va voir qu'une raison triplée est fort différente d'une raison triple.

Raisons triplées.

219. DÉFINITION. La raison triplée est le produit de trois raisons égales. Si $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$; multipliez les deux premiers antécédens l'un par l'autre, & le produit des deux premiers antécédens par le troisième antécédent; multipliez de même les trois conséquens; vous aurez la raison triplée $\frac{24}{72}$. De même si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; la raison $\frac{ace}{bdf}$ est triplée.

S'il n'y a qu'une raison composante, la raison triplée de cette raison simple est formée du cube de l'antécédent, & du cube du conséquent. Par exemple $\frac{aaa}{bbb}$ est la raison triplée de $\frac{a}{b}$. De même en nombres, $\frac{64}{216}$ est la raison triplée de la raison $\frac{4}{9}$.

Il suit de ces définitions, que toute raison doublée ou triplée, est une raison composée; mais que toute raison composée n'est pas doublée ou triplée. Les raisons doublées sont d'un grand usage dans la mesure des surfaces; & les raisons triplées, dans la mesure des solides.

Il s'agit, dans les quatre théorèmes suivans, d'ap-

prendre à évaluer les sommes , les produits , les quotients , les rapports , des raisons simples & composées.

THÉORÈME I.

220. Si l'on multiplie ou si l'on divise deux quantités , par une même troisième quantité ; les produits ou les quotients auront entre eux la même raison , qu'avoient les multiplicandes ou les dividendes.

DÉMONSTRATION. Cette proposition a été déjà démontrée ailleurs (163 & 165). En voici une nouvelle démonstration en lettres.

I°. Si l'on multiplie les racines a, b , par une même troisième quantité m ; les produits am, bm , seront dans le même rapport que les racines a, b : c'est-à-dire , qu'on aura la proportion $am . bm :: a . b$. Car le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ; $abm = abm$.

II°. Il en sera de même , si l'on divise deux quantités a, b , par une même troisième quantité m . Car il est évident que $\frac{a}{m} , \frac{b}{m} :: a . b$; à cause de $\frac{ab}{m} = \frac{ab}{m}$ (207) ; que $\frac{12}{3} : \frac{24}{3} :: 12 . 36$: & ainsi du reste (106). C. Q. F. D.

221. COROLLAIRE. De ce théorème ainsi généralisé découlent plusieurs vérités qui ont déjà été établies en divers endroits de cet ouvrage , & que nous allons présenter ici sous un même point de vue. Il en résulte :

I°. Que les tous sont entre eux , comme leurs parties semblables : c'est-à-dire , comme leurs moitiés , comme leurs tiers , comme leurs centièmes ; & que les parties semblables , savoir , les moitiés , les quarts , les centièmes , sont entre elles comme leurs tous.

II°. Que les produits qui ont une racine commune , sont entre eux comme les racines inégales. Par exemple , les produits am, bm , qui ont une racine commune m ,

sont entre eux comme les racines inégales a & b ; puisque si l'on efface les termes communs m & m , il reste a & b . (106.)

III°. Qu'on peut dans une proportion multiplier ou diviser les deux antécédens ou bien les deux conséquens par une même quantité , sans détruire la proportion. Par exemple , on peut multiplier un des termes de chaque raison par la quantité quelconque m . Si $a . b :: c . d$; donc $am . b :: cm . d$; car puisque $ad = bc$; donc $adm = bcm$.

On peut de même diviser un des termes de chaque raison par la quantité quelconque m . Si $a . b :: c . d$; donc $\frac{a}{m} . b :: \frac{c}{m} . d$; puisqu'en effaçant dans les deux antécédens la quantité qui leur est commune , il reste simplement a & c . (106.)

THEOREME II.

222. Dans une suite de raisons égales , la somme des antécédens est à la somme des conséquens , comme un seul antécédent est à son conséquent.

DÉMONSTRATION. Soient les raisons égales $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7}$; la somme des antécédens $6 + 8 + 10 + 14 = 38$, est à la somme des conséquens $3 + 4 + 5 + 7 = 19$; comme un antécédent quelconque 6 est à son conséquent 3.

Car on peut concevoir l'antécédent total 38 , partagé dans les mêmes parties qui étoient séparées avant l'addition : de même on peut concevoir le conséquent total 19 , partagé dans les mêmes parties qui étoient séparées avant l'addition. Or chaque partie de l'antécédent total , contient deux fois chaque partie correspondante de son conséquent ; donc l'antécédent total qui est la somme des antécédens particuliers , contient deux fois le conséquent total qui est la somme

des conséquens particuliers : donc la somme des antécédens est à la somme des conséquens , comme un seul antécédent est à son conséquent.

On peut démontrer par le même raisonnement , que si chacun des antécédens particuliers est contenu cent fois dans son conséquent , la somme des antécédens sera contenue cent fois dans la somme des conséquens. Et ainsi du reste. C. Q. F. D.

223. COROLLAIRE. Dans une suite de raisons égales, quand on connoît le rapport d'un antécédent à son conséquent ; on connoît le rapport de la somme de tous les antécédens, à la somme de tous les conséquens : puisque ces deux sommes font deux tous composés d'un même nombre de parties semblables, qui sont entre elles comme leurs tous ; & que l'on connoît le rapport de deux de ces parties semblables.

THEOREME III.

224. Si l'on multiplie chaque terme d'une proportion, par les termes correspondans d'une autre proportion ; les produits seront en proportion.

DÉMONSTRATION. Soient les deux proportions quelconques $a . b :: c . d$; & $r . s :: t . v$. Il s'agit de démontrer que si on multiplie a par r , b par s , c par t , d par v ; les produits seront encore en proportion. Pour le démontrer,

1°. Je nomme m l'exposant de la première proportion $a . b :: c . d$; & j'ai $a = bm$, & $c = dm$ (158). Il est clair qu'en place de la grandeur a , je puis mettre son égale bm ; & qu'en place de la grandeur c je puis mettre aussi son égale dm : & alors au lieu de la proportion $a . b :: c . d$; j'aurai son égale $bm . b :: dm . d$, qui est précisément la même proportion exprimée en d'autres termes,

II°. Je nomme n l'exposant de la seconde propor-

tion $r . s :: t . v$, lequel exposant peut être différent de celui de la première; & j'ai $r = sn$, & $t = vn$ (158). Il est clair encore qu'en place de la grandeur r , je puis mettre son égale sn ; & qu'en place de la grandeur t , je puis mettre aussi son égale vn : & alors au lieu de la proportion $r . s :: t . v$; j'aurai son égale en tout $sn . s :: vn . v$.

Propor- tions.	$a , b :: c , d = bm , b :: dm . d .$ $r . s :: t , v = sn . s :: vn . v ,$
-------------------	--

Produit.	$ar , bs :: ct , dv = bmsn . bs :: dmvn , dv$
----------	---

III^e. Il y a proportion entre quatre grandeurs, quand le produit des extrêmes est égal au produit des moyens (172); or dans les quatre dernières grandeurs, le produit $bdmnsu$ des extrêmes est évidemment égal au produit $bdmnsu$ des moyens. Donc il y a proportion entre ces quatre grandeurs.

Mais les quatre grandeurs qui les précèdent, leur sont précisément égales, chacune à chacune: donc il y a aussi proportion entre ces quatre grandeurs, qui sont le produit de la première proportion par les termes correspondans de la seconde. C. Q. F. D.

225, COROLLAIRE I. Lorsque quatre grandeurs sont en proportion; si on les élève chacune à leur quarré ou à leur cube, ces quarrés ou ces cubes seront en proportion.

DÉMONSTRATION. I^o. Quand on élève à leurs quarrés quatre grandeurs quelconques a , b , c , d ; on fait la même chose que si on multiplioit les termes de la proportion $a . b :: c . d$, par les termes d'une autre proportion $a , b :: c , d$. Or en ce cas les produits sont en

Propor- tions.	$a . b :: c . d$ $a , b :: c . d$
Quarrés.	$aa , bb :: cc , dd$
Racines.	$a , b :: c , d$
Cubes.	$aaa , bbb :: ccc , ddd$

proportion ; comme on vient de le démontrer : donc les quarrés , qui ne sont autre chose que ces produits , sont aussi en proportion.

II°. Maintenant si on multiplie les quarrés par les racines , on multiplie les quatre termes d'une proportion par les termes correspondans d'une autre proportion ; or dans ce cas les produits , qui ne sont autre chose que les cubes , sont en proportion ; selon le théorème précédent. Donc lorsque quatre grandeurs sont en proportion , leurs quarrés & leurs cubes sont aussi en proportion.

III°. Mais il faut observer ici que la proportion des quarrés , n'est pas celle des racines ; & que la proportion des cubes n'est pas celle des quarrés ou des racines. La raison des racines est tantôt plus grande & tantôt plus petite que celle des quarrés & des cubes ; comme on le voit ici en nombres.

Racines.	Quarrés.	Cubes.
1, 2 :: 3, 6 . . .	1, 4 :: 9, 36 . . .	1, 8 :: 27, 216.
2, 1 :: 6, 3 . . .	4, 1 :: 36, 9 . . .	8, 1 :: 216, 27.

226. COROLLAIRE II. Si quatre grandeurs sont en proportion ; leurs doubles , leurs triples , toutes les grandeurs qui les contiennent un même nombre de fois , sont encore en proportion : puisqu'en prenant leurs doubles ou leurs triples ou leurs quadruples , & ainsi du reste , c'est comme si on les multiplioit par une même grandeur , par 2 , ou par 3 , ou par 4 , & ainsi du reste : ce qui ne change pas leur raison ou leur rapport. (220.)

THÉORÈME IV.

227. Si l'on divise chaque terme d'une proportion , par les termes correspondans d'une autre proportion ; les quotiens seront en proportion.

DÉMONSTRATION. Soient deux proportions quel-

conques, dont les exposans soient m & n , comme dans le théorème précédent.

Proportions.	$a . b :: c . d = bm . b :: dm . d$ $r . s :: t . v = sn . s :: vn . v.$
Quotient.	$\frac{a}{r} . \frac{b}{s} :: \frac{c}{t} . \frac{d}{v} = \frac{bm}{sn} . \frac{b}{s} :: \frac{dm}{vn} . \frac{d}{v}.$

Si dans la dernière proportion, on divise l'antécédent de chaque raison par son conséquent; l'exposant est de part & d'autre $\frac{m}{n}$: donc la première raison est égale à la seconde (159). Par conséquent, dans cette dernière proportion, le premier antécédent est à son conséquent, comme le second antécédent est à son conséquent; ainsi il y a proportion entre les quatre grandeurs.

Mais les quatre grandeurs $\frac{a}{r}, \frac{b}{s}, \frac{c}{t}, \frac{d}{v}$, sont égales aux quatre grandeurs correspondantes de la proportion qui les suit: donc, puisque les quatre dernières grandeurs sont en proportion, les quatre premières sont aussi en proportion. Or ces quatre premières grandeurs sont les quotiens des termes correspondans de deux proportions, divisés l'un par l'autre; donc ces quotiens sont en proportion. C. Q. F. D.

228. COROLLAIRE I. *Lorsque quatre grandeurs sont en proportion, leurs racines quarrées & cubiques sont aussi en proportion.*

DÉMONSTRATION. Puisque les quarrés étant en proportion, les racines le sont aussi: (225.)

1^o. Si on regarde les termes d'une proportion quelconque $a . b :: c . d$, comme des grandeurs quarrées; il est clair que leurs racines quarrées seront en proportion. On aura par conséquent, $\sqrt{a} . \sqrt{b} :: \sqrt{c} . \sqrt{d}$.

II°. Si on regarde les termes de la même proportion quelconque $a.b::c.d$, comme des grandeurs cubiques; il est clair que leurs racines cubiques, qui ont multiplié leurs racines quarrées, seront encore en proportion (225). On aura par conséquent $\sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c} . \sqrt[3]{d}$.

III°. Mais il faut observer ici, comme dans le premier corollaire précédent (225), que la raison des cubes n'est pas celle des racines quarrées; & que la raison des racines quarrées n'est pas celle des racines cubiques. Ces trois proportions sont différentes entre elles, sans cesser d'être de vraies proportions. C'est ainsi que ces trois proportions sont différentes entre elles : $2.4::6.12$: ensuite $3.10::6.20$: ensuite $10.3::20.6$: mais quoique différentes; elles sont chacune une vraie proportion (172).

229. COROLLAIRE II. Si quatre grandeurs sont en proportion, leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, toutes leurs parties semblables, sont encore en proportion : puisqu'en prenant leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, toutes les grandeurs quelconques qu'elles contiennent un même nombre de fois; c'est comme si on les divisoit chacune par une même grandeur, par 2 ou par 3 ou par 4, & ainsi du reste : ce qui ne change pas leur raison ou leur rapport, (220.)

ARTICLE QUATRIEME.

CALCUL DES PROGRESSIONS.

230. DÉFINITION. ON appelle *progression*, une suite de raisons égales, dans laquelle chaque terme est en même tems *conséquent* de la raison précédente, &

bres naturels par des étoiles rangées en colonnes ; savoir, $+ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, & ainsi de suite. Pour compléter le rectangle en rétrogradant, il faudra placer sur les colonnes qui précèdent la dernière 7, par exemple, un égal nombre d'étoiles ; savoir, $+ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$: & alors la dernière colonne, en rétrogradant, tombera sur la colonne 0.

Or on auroit la somme entière des étoiles qui formeroient ce rectangle 0770 ; en multipliant la hauteur 7, par la largeur 8 qui exprime de plus la colonne 00, qu'il faut ajouter en rétrogradant : donc on aura la somme des étoiles croissante selon la suite des nombres naturels, en prenant la moitié du produit qui naît du dernier terme multiplié par un terme plus grand d'une unité que ce dernier terme ; puisque cette somme est égale à la moitié du produit & du rectangle. C. Q. F. D.

232. COROLLAIRE. *Quand la suite des nombres naturels commence par l'unité ; la somme de tous les termes est égale à la moitié du produit du dernier terme multiplié par un nombre plus grand d'une unité que ce dernier terme. Par exemple,*

Si cette suite renferme six termes $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$; la somme de tous ces termes est la moitié du produit du dernier terme 6, par 7 plus grand d'une unité.

Si cette suite renferme 336 termes ; la somme de tous ces termes est la moitié du produit du dernier terme 336, par 337 plus grand d'une unité. $336 \times 337 = 113232$: la moitié de ce dernier nombre est la somme de tous les termes de la suite des nombres naturels qui commence par l'unité & dont le dernier terme est 336 ; & cette moitié ou cette somme est 56616.

demande, n'en prévoyant pas d'abord toute l'étendue. Mais après un coup d'œil sur un calcul assez simple, suivi pendant quelques momens dans son progrès, il apperçut bientôt que la demande de Sessa n'étoit & ne pouvoit être au fond qu'un ingénieux badinage, destiné à opérer une piquante surprise; & que l'immense région des Indes produiroit à peine en huit ou dix mille ans, la quantité de bled qu'il avoit promise. Car en supposant que 72 grains de bled pèsent *un gros* ou un huitieme d'once (7. V°.), & que le *muid de bled* dans l'Inde pèsât 36 de nos quintaux; on trouvera qu'à la vingt-cinquieme case, il seroit dû à Sessa deux fois 16,777,216 grains de bled, qui réduits en gros, en onces, en livres (52), font un peu plus d'un muid de 36 quintaux; & qu'à la cinquantieme case, il lui auroit été dû plus de 16,777,216 muids semblables; & qu'en poussant cette progression jusqu'à la soixante-quatrieme case, la somme des muids de bled eût été immense.

233. PROBLÈME II. *Trouver la valeur de la suite finie des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c.*

SOLUTION. Soit une suite finie de nombres impairs, qui commence par l'unité; & que chaque terme exprime un nombre fixe d'étoiles, que vous puissiez arranger en quarrés, si la chose est possible.

Sur le premier terme 1, placez une étoile correspondante à ce terme. Sur le second terme 3 de cette suite, placez deux des étoiles correspondantes à ce terme: il vous en restera une pour mettre sur le premier terme; & vous aurez un quarré. Sur le troisieme terme 5 de cette suite, placez trois des étoiles cor-

.
o	o	o	o	*	.
o	o	o	*	*	.
o	o	*	*	*	.
o	*	*	*	*	.
*	*	*	*	*	.
<hr/>					
1, 3, 5, 7, 9, 11					
<hr/>					
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6					

respondantes à ce terme : il vous en restera deux à placer, l'une sur le second & l'autre sur le premier terme ; & vous aurez encore un carré. Sur le quatrième terme 7 de cette suite, placez quatre étoiles : il vous en restera trois à placer sur les trois termes précédens ; & vous aurez encore un carré. Sur le cinquième terme 9 de cette suite, placez cinq étoiles : il vous en restera 4 à reprendre sur les quatre termes précédens ; & vous aurez encore un carré ; & ainsi de suite à l'infini.

D'où il résulte qu'en connoissant le nombre des termes d'une suite quelconque, on aura toujours la somme, en prenant le produit du dernier terme multiplié par lui-même. Par exemple, la somme de tous les termes, à compter depuis le quatrième terme inclusivement, est le carré de 4 ou 16. De même, la somme de tous les termes, à compter depuis le sixième terme inclusivement, est le carré de 6 ou 36 ; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

THÉORÈME.

234. Dans toute progression géométrique, le premier terme est au troisième, comme le carré du premier est au carré du second ; & le premier terme est au quatrième, comme le cube du premier est au cube du second.

DÉMONSTRATION. Soit la progression géométrique quelconque $\div a . b . c . d . e . f . g$, dans laquelle le premier terme a est au second terme b , comme ce second terme b est au troisième c ; comme ce troisième terme c est au quatrième terme d ; & ainsi de suite : toutes ces raisons sont égales, par la supposition. Le premier terme a est une fois lui-même : il peut donc toujours être représenté par l'unité, soit qu'il se trouve plus grand, soit qu'il se trouve plus petit que son conséquent b . Après ces observations,

1°. Je

I°. Je dis que $a . c :: aa . bb$. Car si le premier terme a , qu'on peut toujours supposer $= 1$, contient par exemple 3 fois le second $b = \frac{1}{3}$, & le second 3 fois le troisième $c = \frac{1}{9}$; il est évident que le premier contiendra 3 fois 3 $= 9$ fois, le troisième. Or le carré aa du premier terme contiendra aussi 9 fois le carré bb du second : puisque $1 \times 1 = 1$, & que $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

La même démonstration auroit également lieu, si le premier terme étoit, par exemple, 4 fois plus petit que le second. Car par l'hypothèse on auroit $\frac{1}{4} . 1 :: 1 . 4$: donc le carré du premier $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, est au carré du second $1 \times 1 = 1$, comme $\frac{1}{4}$ est à 4; & par conséquent comme 1 est à 16.

Si la raison du premier terme au second étoit un incommensurable en nombres; par exemple, si le premier terme a contenoit deux fois & un peu plus le second terme b , & que cet *un peu plus*, ce *reste sourd*, ne pût être exprimé par aucun nombre entier ou fractionnaire (6); la même démonstration auroit également lieu : parce qu'alors le troisième terme c , contiendrait deux fois avec un semblable *reste sourd*, le quatrième terme d ; & ainsi du reste de la progression.

II°. Je dis que $a . d :: aaa . bbb$. Car si le premier terme a que je puis encore supposer $= 1$, est contenu 4 fois dans le second $b = 4$, & que le second soit contenu 4 fois dans le troisième $c = 16$; il est évident que le quatrième terme d sera 64; & que le premier terme sera contenu 64 fois dans le quatrième : or le cube du premier terme $1 \times 1 \times 1 = 1$, sera aussi contenu 64 fois dans le cube du second $4 \times 4 \times 4 = 64$. C. Q. F. D.

235. REMARQUE. On démontreroit de même & par le même raisonnement, que le carré d'un terme quelconque d'une progression géométrique, par exemple, du douzième que nous appellerons m , est au carré de celui qui le suit immédiatement; comme le terme m est au troisième depuis m inclusivement :

& que le cube du terme m est au cube du terme suivant, comme ce terme m est au quatrième depuis m inclusivement.

236. COROLLAIRE. Il suit de-là que dans une progression géométrique $\div 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64$ & ainsi de suite; la raison du premier terme au troisième, est *doublée* de la raison qui est entre le premier & le second; & que la raison du premier terme au quatrième est *triplée* de la raison qui est entre le premier & le second. On peut prendre pour premier terme dans cette progression, ou le nombre 1, ou le nombre 4, & ainsi de suite: alors le second terme est celui qui suit le nombre qu'on prend pour premier terme.

PARAGRAPHE SECOND.

PROGRESSIONS INFINIES.

237. LEMME. *LA grandeur est par son essence susceptible de plus & de moins. Donc elle ne perd rien de son essence en recevant ce plus & ce moins: donc elle est encore grandeur, après l'avoir reçu: donc elle est encore également susceptible de plus & de moins; donc elle en est toujours susceptible; donc elle l'est sans fin ou à l'infini.*

I°. Par exemple, dans la suite croissante des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, & ainsi de suite sans fin, la grandeur *croît évidemment à l'infini*. Car à quelque grand nombre que l'on conçoive élevé un terme de cette suite, on ne voit pas pour cela que l'on soit plus près de la fin: ce qui ne peut convenir à une suite dont le nombre des termes seroit fini.

II°. De même dans la suite décroissante de l'unité, $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$, & ainsi de suite, la

grandeur divisée ou diminuée n'est pas anéantie : donc elle est encore grandeur après toute division ou diminution possible. Or la division est possible à l'infini : donc la grandeur est susceptible de division & de diminution à l'infini. C. Q. F. D.

238. REMARQUE. I^o. Quoiqu'il n'y ait rien d'infini en nature dans l'univers, à l'exception de l'Être incréé & créateur ; il y a cependant une foule de grandeurs que les mathématiques considèrent comme infinies ; à cause du rapport comme infiniment grand qu'elles ont avec d'autres grandeurs auxquelles on les compare. Par exemple, la longueur d'une toise est comme infiniment grande, par rapport à un point mathématique : parce qu'il ne faut rien moins qu'une infinité de points mathématiques, pour former la longueur d'une toise. Ensuite la longueur d'une toise est comme infiniment petite, par rapport à la distance des étoiles : parce qu'il faut un nombre immense, un nombre comme infini de toises, pour égaler cette distance des étoiles.

II^o. En général les mathématiques regardent comme *infiniment petite*, toute quantité qu'on peut ajouter ou retrancher à une autre, sans qu'on soit censé augmenter ou diminuer celle-ci : elles regardent comme *infiniment grande*, la quantité qui est censée n'être ni diminuée par une telle soustraction, ni augmentée par une telle addition. Par exemple, une ligne composée d'une infinité de points, ne sera censée ni plus grande ni plus petite, quand on lui aura ajouté ou retranché quelques centaines ou quelques millions de points : c'est un *infini du premier ordre*. Une surface composée d'une infinité de lignes, ne sera réputée ni plus grande ni plus petite, quand on lui aura ajouté quelques centaines ou quelques millions de points ou de lignes : c'est un *infini du second ordre*. Un solide composé d'une infinité de surfaces appliquées les unes aux autres, ne sera censé ni plus grand ni

plus petit, quand on lui aura ajouté ou retranché quelques centaines ou quelques millions de lignes ou de surfaces : c'est un *infini du troisieme ordre*. Nous ne dirons rien des infinis d'un ordre supérieur, par exemple, de l'infini du quatrieme ordre, qui est le produit du cube par sa racine infinie.

III°. Les mathématiques regardent encore assez souvent *comme infiniment petite*, toute quantité qu'on peut négliger sans erreur sensible. Par exemple, une ou deux toises sont regardées comme nulles ou comme infiniment petites, dans la longueur du rayon terrestre : une once est une-quantité comme infiniment petite, dans un poids de douze ou quinze cents quintaux ; & ainsi du reste. Cette dernière maniere d'envisager les grandeurs, n'est pas exactement vraie dans toute la rigueur géométrique : mais elle a toute la vérité qu'on peut attendre & desirer dans l'état physique des choses ; & c'est ainsi qu'envisagent les grandeurs les plus exacts géometres, tels que Wolff, par exemple, dans son excellent cours de mathématiques, tome I, page 418.

INFINIS, INFINIMENT PETITS.

239. DÉFINITION I. On appelle *quantité infinie*, une quantité qui a reçu tous les accroissemens possibles.

I°. Une quantité infinie, qui n'est ni multipliée ni divisée par aucune autre quantité infinie, est un *infini du premier ordre* : elle s'exprime ainsi ∞ .

II°. Une quantité infinie, multipliée par une quantité infinie, est un *infini du second ordre* ; & s'exprime par ∞^2 .

III°. Un *infini du second ordre*, multiplié par une quantité infinie, est un *infini du troisieme ordre* ; & s'exprime par ∞^3 .

Il est clair qu'on peut faire l'addition & la soustraction, la multiplication & la division, sur des quantités infinies, comme sur des quantités finies. Par exemple, $\infty + \infty + \infty = 3\infty$. De même $3\infty + 2\infty = 5\infty$. De même $2\infty^2 \times 3\infty = 6\infty^3$. De même $\infty \times \infty^2 = \infty^3$. De même ∞^2 divisé par $\infty = \infty$. De même encore ∞ divisé par 2, $= \frac{\infty}{2}$; & ∞^2 divisé par 3 $= \frac{\infty^2}{3}$.

240. DÉFINITION II. On appelle quantité *infiniment petite*, une quantité qui a reçu tous ses décroissements finis possibles, elle s'exprime par $\frac{1}{\infty}$.

Une quantité infiniment petite, multipliée par un infiniment petit, est un *infiniment petit du second ordre*; & s'exprime ainsi $\frac{1}{\infty^2}$: multipliée par un *infiniment petit* du second ordre, elle devient un *infiniment petit du troisième ordre*; & se marque ainsi $\frac{1}{\infty^3}$.

PRINCIPES SUR LES INFINIS.

241. PRINCIPÉ I. Une quantité finie, ajoutée ou déduite d'une quantité infinie, ne la rend ni plus grande ni plus petite: c'est-à-dire, qu'une quantité finie est nulle, par rapport à une quantité infinie, & peut être négligée dans le calcul; parce qu'elle est par rapport à l'infini, comme zéro par rapport à l'unité. Ainsi $\infty + 2$ ou $\infty - 2 = \infty$.

242. PRINCIPÉ II. Un infini d'un ordre inférieur est nul, par rapport à l'infini d'un ordre supérieur. Car l'infini d'un ordre inférieur est par rapport à l'infini d'un ordre supérieur, ce que le fini est par rapport à l'infini. Ainsi $\infty^2 + \infty = \infty^2$: de même $\infty^3 + \infty^2 = \infty^3$.

243. PRINCIPÉ III. Une quantité infinie multipliée par une autre quantité infinie, devient un infini d'un ordre supérieur, dont l'ordre sera exprimé par la somme des exposans. Par exemple, $\infty^2 \times \infty^3 = \infty^5$: de même $\infty \times \infty = \infty^2$.

244. PRINCIPLE IV, *Une quantité infinie divisée par une quantité infinie, devient un infini d'un ordre inférieur, dont l'ordre sera marqué par la différence des exposans.* Par exemple, $\frac{\infty^4}{\infty} = \infty^3$; $\frac{\infty^2}{\infty^2} = \infty^0 = 1$.

245. PRINCIPLE V, *Il faut dire la même chose des quantités infiniment petites.* Un infiniment petit du troisième ordre est nul par rapport à un infiniment petit du second ordre; & un infiniment petit du second ordre est nul par rapport à un infiniment petit du premier ordre: un infiniment petit du second ordre, multiplié par un infiniment petit du second ordre, devient un infiniment petit du premier ordre; & ainsi du reste.

246. REMARQUE. Cette théorie des infinis sert à *sommer des suites*; par exemple, la suite infinie des nombres naturels, la suite infinie de leurs quarrés, la suite infinie de leurs cubes,

La somme infinie des unités peut être représentée par une *ligne infinie*, ou par une ligne composée d'une infinité de points. La somme infinie des nombres naturels peut être représentée par un *triangle infini*, ou par un triangle rectangle composé d'une infinité de lignes croissantes comme cette suite, depuis le sommet jusqu'à la base. La suite infinie des quarrés des nombres naturels peut être représentée par une *pyramide infinie*, ou par une pyramide quadrangulaire composée d'une infinité de quarrés appliqués les uns sur les autres & décroissans comme cette suite, depuis le sommet jusqu'à la base. On concevra aisément dans la suite, comment on peut appliquer cette théorie à la Géométrie.

DIVERS THÉORÈMES.

247. THÉORÈME I. *La somme des unités prise une infinité de fois, est un infini du premier ordre; ou est ∞ .*

DÉMONSTRATION. L'unité prise une infinité de fois, est une quantité qui a reçu tous les accroissements finis possibles : donc elle est devenue infinie.

28. THÉORÈME II. La somme des termes de la progression infinie des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. . . . ∞ , est un infini du second ordre, & est $\frac{\infty^2}{2}$.

DÉMONSTRATION. Cette progression exprimée en points, formera un triangle dont la dernière colonne sera infinie en nombre, & dont la surface sera la moitié d'un carré dont les quatre côtés seroient égaux à cette dernière colonne infinie. (231 & 246.)

249. THÉORÈME III. La somme des termes de la progression infinie des nombres carrés, 1, 4, 9, 16, 25, 36. . . . ∞^2 , est un infini du troisième ordre, & est $\frac{\infty^3}{3}$.

DÉMONSTRATION I^o. Dans la suite des nombres naturels du corollaire précédent, concevez chaque terme élevé à son carré : vous aurez la progression infinie des nombres carrés dont il est ici question.

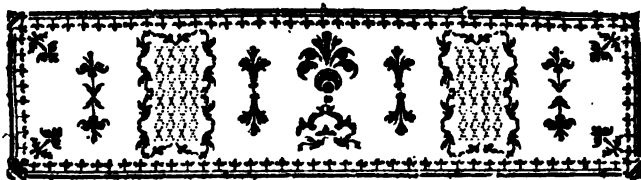
II^o. Concevez chaque terme carré de cette progression des nombres naturels, exprimé en points : le premier terme 1 sera un point ; le second terme 2 sera une surface carrée de 4 points ; le troisième terme 3, une surface carrée de 9 points ; le dernier terme ∞ , une surface carrée d'une infinité de points. Si toutes ces surfaces appliquées les unes aux autres étoient égales à la dernière, il est évident que le nombre des points qui les composent, formeroit un cube infini ; & par conséquent $= \infty^3$. (fig. 74.)

III^o. Mais toutes ces surfaces carrées allant en croissant depuis la première $= 1$ point, jusqu'à la dernière $= \infty^2$; il est évident que la somme des

points qui les composent , au lieu d'un cube AB, ne forme qu'une pyramide quadrangulaire AGCFD, qui a pour base la dernière surface infinie DF (246). Or le cube en question est égal à trois pyramides, égales à cette pyramide (595) ; donc cette pyramide n'est que le tiers du cube, donc elle est $\frac{\infty}{3}$.

Tels sont les principes ou les élémens du calcul de l'Infini ; calcul dont les modernes Géomètres ont fait un si brillant usage, sur-tout dans la Géométrie transcendante. C'est par-là que nous terminerons ce traité des Raisons & des Proportions , pour passer à celui des Équations.





PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE, OU ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES.

QUATRIÈME TRAITÉ.

LE CALCUL ANALYTIQUE.

250. DÉFINITION I. *L'ANALYSE* est une science qui apprend à découvrir & à connoître les *quantités inconnues*, par le moyen des rapports qu'elles ont avec les quantités connues. L'analyse diffère de l'analogie, en ce que l'analogie apprend à connoître & à évaluer les rapports des grandeurs ; au lieu que l'analyse par le moyen de ces rapports qu'elle suppose évalués & connus, du moins en partie, passe à la recherche des grandeurs inconnues. (1.)

251. DÉFINITION II. On parvient à la découverte de la vérité par deux sortes de voies ou de méthodes ; l'une s'appelle *synthèse* & l'autre s'appelle *analyse*. L'une & l'autre a pour objet, ou la démonstration de

quelque théorème , ou la solution de quelque problème. Soit qu'il faille démontrer un théorème , soit qu'il s'agisse de résoudre un problème :

I°. La *synthèse* commence par les principes les plus simples & les plus connus ; & s'élève par un enchaînement de vérités bien connues & bien liées , jusqu'à ce qu'elle parvienne à la connoissance de ce qui fait l'objet de sa recherche. Dans la méthode synthétique , on assemble , on joint & on lie en quelque sorte , plusieurs vérités ; de la liaison desquelles il résulte une *vérité nouvelle* , qui est la démonstration du théorème ou la solution du problème. C'est de-là que lui vient son nom de *synthèse* ou de méthode de composition : car *synthèse* , en grec *σύνθεσις* , signifie composition : de *σύν* , *cum* ; & de *θεσις* , *positio* ; ou de *τίθημι* , *pono*.

Cette méthode s'appelle *méthode de doctrine* : parce que l'on s'en sert communément , pour enseigner aux autres les vérités que l'on fait.

II°. L'*analyse* au contraire commence par prendre pour vrai , ce qui est en question ; ou regarde comme résolu , le problème qu'il s'agit de résoudre. De-là elle tire des conséquences , qui en découlent ; & de celles-ci , de nouvelles : jusqu'à ce quelle soit parvenue à quelque chose de manifestement vrai ou faux , si c'est un théorème ; de possible ou d'impossible à exécuter , si c'est un problème. La nature de cette dernière conséquence décide de la vérité ou de la possibilité de la proposition qu'on examine. Dans la méthode analytique , on décompose une proposition encore incertaine en ses parties , toutes nécessairement vraies & liées ensemble , si la proposition est vraie ; toutes fausses & répugnantes , si elle est fausse. De-là lui est venu le nom d'*analyse* , du mot grec *ἀνάλυσις* , qui signifie dissolution , décomposition : de *ἀπό* , *dis-* *solvo* ; & de la préposition *ἀνά* , *per* , *inter* ; de-

composition d'un tout en ses parties.

Cette méthode s'appelle aussi *méthode d'invention* ; parce que l'on découvre par la méthode analytique , bien des vérités qu'il seroit souvent impossible de découvrir par la méthode synthétique. On verra par la suite de ce traité , comment , en résolvant par l'analyse des problèmes particuliers , on découvre les *propriétés générales de la grandeur* ; & comment ces propriétés , une fois découvertes & démontrées , deviennent des théorèmes ou des corollaires , qui sont des sources générales de lumière.

III°. Quoique la synthèse & l'analyse paroissent si différentes l'une de l'autre ; cependant leurs principes sont les mêmes : savoir , que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble : que les quantités égales , qui ont eu des augmentations ou des diminutions égales , restent égales : que si deux quantités a & x sont égales entre elles , on peut prendre indifféremment l'une pour l'autre , ou substituer l'une à l'autre : & ainsi du reste. Dans la méthode synthétique , on va du simple au composé , du connu à l'inconnu , du tronc aux rameaux. Dans la méthode analytique , on va du composé au simple , de l'inconnu au connu , des rameaux au tronc. Les points de départ sont différents ; mais la route & le terme sont au fond les mêmes.

IV°. L'analyse étoit en usage chez les anciens géomètres ; mais chez eux elle étoit fort différente de ce qu'elle est aujourd'hui. L'analyse ancienne , l'analyse employée par les Archimède , par les Euclide , par les Apollonius , consistoit à décomposer un tout en ses différentes parties , en ses différentes racines , en ses différentes puissances ; à envisager comme intuitivement les différents rapports des parties entre elles , des parties avec le tout , du tout & des parties avec les racines & les puissances quelconques d'une grandeur donnée ; & à chercher à travers un très-long & très-

pénible enchaînement de raisonnemens explicitement développés, ou *quelque vérité particulière* ; ou *quelque propriété générale* de la grandeur ; & c'est ce qui rendoit cette analyse si difficile, pour ne pas dire impossible, dans des questions d'un certain ordre plus relevé & plus compliqué. Si l'on ne peut suivre qu'avec peine cette interminable suite de raisonnemens développés ; à plus forte raison ne peut-on les former sans une extrême contention d'esprit, sans des efforts extraordinaires de mémoire & d'imagination. Le premier pas à faire, pour mettre l'analyse en état de surmonter ces difficultés, étoit donc d'en changer la forme, & de décharger l'esprit de ce fardeau accablant de raisonnemens. Rien de plus heureux en effet, que l'idée qu'on a eue dans ces derniers siècles, avant & après Descartes, de réduire ces raisonnemens, par le secours de l'algebre, en une sorte de *procédés techniques* (*), de *formules algébriques*, qui sont comme des tableaux sensibles & abrégés de l'opération réduite en une espece d'art mécanique ; & qui, après les premiers pas, n'exigent presque aucun travail d'esprit. L'arithmétique nous en offre un exemple sensible. Car qu'est ce qu'une opération arithmétique, sinon un procédé mécanique pour la plupart des hommes ; mais qui est cependant le tableau & l'équivalent des opérations laborieuses auxquelles l'esprit seroit réduit sans ce secours ? De même, l'analyse algébrique, soit qu'elle opere sur des grandeurs discrètes, soit qu'elle ait pour objet des lignes & des surfaces, susceptibles des mêmes calculs que les grandeurs discrètes (74), n'est autre chose qu'une suite de raisonnemens écrits en abrégé ; & qui, sans contention & presque mécaniquement, conduisent au

(*) ÉTYMOLOGIE. Technique, c'est-à-dire machinal, artificiel : de ΤΕΧΝΗ, *Artificium*, *opus*, aut *methodus simplicis artificis*.

même but que si l'esprit les avoit successivement formés ou suivis l'un après l'autre.

V°. L'analyse fut inventée par Platon, environ 370 ans avant l'ère chrétienne : elle a été perfectionnée, appliquée à de nouveaux objets & à de nouvelles recherches, & pour ainsi dire, créée de nouveau dans le dernier siècle, par l'immortel Descartes. Platon, en inventant l'ancienne analyse fit prendre à la géométrie une face nouvelle : Descartes, par la liaison qu'il établit entre la géométrie & l'analyse algébrique, y a opéré à son tour une heureuse révolution. La découverte de l'analyse donna naissance à diverses théories sublimes, qui tirèrent la géométrie de cet état de médiocrité où elle avoit été jusqu'alors : la géométrie a tiré dans ces derniers tems, les mêmes avantages de son alliance avec l'analyse algébrique ; & aidée de ce secours, elle s'est soumise une multitude d'objets, auxquels elle n'avoit encore pu atteindre. De même que Platon prépara par sa découverte, celles des Archimèdes, des Euclides, des Apollonius de Perge ; on peut dire que Descartes a jeté les fondemens de celles qui illustrent aujourd'hui les modernes géomètres. C'est par Descartes qu'ont été, pour ainsi dire, électrisés les Newton en Angleterre, les Leibnitz en Allemagne, les Bernouilly en Suisse, les de L'Hôpital en France, tous les célèbres analystes du siècle dernier & du siècle présent dans les différentes contrées de l'Europe.

Ce que Christophe Colomb a été pour la moderne navigation, Descartes l'a été pour la moderne géométrie. Il a ouvert & frayé la route, que les autres n'ont plus eu qu'à suivre, à applanir, à étendre : de sorte qu'on peut dire de Descartes en genre de génie, ce que dit du brave Judas Machabée en genre de vaillance l'histoire sainte : & *transfretavit primus ! . . . & viderunt eum Viri, & transferunt post eum.*

PARAGRAPHE PREMIER.

IDÉE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

252. DÉFINITION I. **L**E moyen dont se sert l'analyse pour découvrir les quantités inconnues, est la *double expression* d'une même quantité. La double expression d'une même quantité, s'appelle *équation*. Par exemple, la quantité huit peut être représentée par l'expression 8, ou par celle de $5 + 3$ égale à la première; d'où naît l'équation $8 = 5 + 3$, dans laquelle les quantités jointes par le signe $=$ s'appellent *membres*.

Tous les termes qui se trouvent à la gauche du signe, s'appellent *premier membre*; &c. tous ceux qui sont à la droite, s'appellent *second membre*. L'usage des équations est fort étendu: on peut par leur moyen résoudre avec une extrême facilité une infinité de *questions* ou *problèmes*, que l'on n'auroit osé espérer de résoudre sans cet art merveilleux.

253. REMARQUE. Dans tout problème, il y a des grandeurs connues & des grandeurs inconnues. On représente ordinairement les *grandeurs connues*, par les premières lettres de l'alphabet a, b, c, d ; les *grandeurs inconnues*, par les dernières lettres x, y, z ; les *quantités égales*, par les mêmes lettres.

Il arrive cependant assez souvent qu'on emploie les lettres initiales des noms, pour marquer les grandeurs connues ou inconnues, que ces noms signifient: ainsi le mouvement se marque par m , la vitesse par v , le tems par t , le poids par p , la force motrice par f : &c. ainsi du reste.

254. DÉFINITION II. Les équations sont de *différens degrés*, sçavoir du premier, du second, du troisième, du quatrième, &c. ainsi de suite; selon que l'inconnue est élevée à la première, à la seconde, à la troisième, à la quatrième puissance.

Le degré de l'équation, quand il y a plusieurs inconnues, se prend du terme où l'inconnue est élevée à la plus haute puissance. L'équation $x + y = aa$, est du premier degré. L'équation $x + yy = a$, ou $x - yy = a$, est du second degré. L'équation $xxx + xx - 3x = ab$, est du troisième degré : & ainsi du reste.

Nous nous attacherons principalement dans ce traité, à résoudre les équations du premier degré, que l'on appelle aussi *équation simples* : ce qui facilitera la résolution des *équation du second degré*, dont nous donnerons aussi les principes & les règles (298). La théorie des équations du premier degré suffit pour la solution de tous les problèmes de la géométrie élémentaire : celle des équations du second degré suffit dans la géométrie transcendante, dans toute la partie bornée aux sections coniques : ainsi nous ne pousserons pas plus loin cette théorie.

255. DÉFINITION III. Pour résoudre un problème, ou pour découvrir les quantités inconnues par le moyen des quantités connues, il faut nécessairement qu'il y ait des rapports donnés entre les connues & les inconnues : ces rapports s'appellent *conditions du problème* ; & c'est à ces rapports ou à ces conditions qu'il faut faire la plus grande attention ; parce que c'est toujours de-là que dépend la solution des problèmes. Ces rapports ou ces conditions s'appellent aussi *les données du problème*.

On voit ici que *proposer un problème*, c'est demander qu'on trouve la valeur d'une ou de plusieurs inconnues, Le problème est résolu, quand on a trouvé cette valeur ; ou quand on démontre qu'il est impossible de la trouver : ce qui arrive lorsque les rapports donnés renferment quelque contradiction.

256. DÉFINITION IV. Parmi les problèmes, il y en a de déterminés & d'indéterminés. On appelle *pro-*

blème déterminé, celui dans lequel il y a autant de conditions ou de rapports, qu'il y a de quantités inconnues. On appelle *problème indéterminé*, celui où il y a moins de rapports ou de conditions, que de quantités inconnues. Le problème déterminé du premier degré, n'est susceptible que d'une seule solution : il est susceptible de deux solutions, s'il est du second degré. Le problème indéterminé est susceptible de plusieurs solutions. Deux exemples vont faire sentir la différence de ces deux espèces de problèmes.

I°. Soit proposé ce problème : *couper le nombre 14 en deux parties, dont l'une soit triple de l'autre*. Les deux nombres ou les deux parties que l'on cherche, seront 18 & 6 : il n'y a que ces deux nombres qui satisfassent aux conditions du problème. Ce problème est un problème déterminé.

II°. Soit proposé cet autre problème : *deux hommes ont partagé une somme d'écus, & la part de l'un est le tiers de la part de l'autre : qu'elles sont ces deux parts ?* Ces deux parts peuvent être 2 & 6, qui égaleront la somme 8 ; ou bien 4 & 12 = 16, ou bien une infinité d'autres nombres : car il n'y a point de nombre, qui joint à son triple, ne fasse une somme totale dont la grandeur n'a été déterminée ni en elle même ni en aucune de ses parties. Ce problème est un problème indéterminé.

La science des équations consiste en deux choses ; à composer ou à former l'équation, & à décomposer ou à résoudre l'équation : nous allons parler de l'une & de l'autre.

FORMATION ET RÉOLUTION DES ÉQUATIONS.

257. DÉFINITION I. La formation des équations, consiste à exprimer algébriquement le problème : c'est-à-dire, à exprimer en *style algébrique* les quantités &
les

les rapports des quantités, qui dans l'état de la question sont énoncés en style ordinaire.

Il n'y a point de règles à donner sur la formation des équations : tout dépend de l'attention & de la sagacité de l'esprit, qui doit saisir & réduire les rapports donnés dans le problème.

258. DÉFINITION II. La *résolution des équations*, consiste à prendre & à trouver la valeur de chaque inconnue. Cette valeur se connoît, par les rapports que chaque quantité inconnue a avec des quantités toutes connues. Ces rapports sont enveloppés dans l'équation ; à cause de la pluralité des inconnues & de leur mélange, soit entre elles, soit avec les quantités connues. Il s'agit de développer & de dégager ces rapports ; & c'est en quoi consiste en grande partie, l'art de l'analyse.

I°. *Trouver la valeur d'une inconnue*, c'est la réduire à être seule un membre d'une équation, dont l'autre membre soit composé de quantités toutes connues. Par exemple, si $x = 12 + 10 - 18$; la valeur de l'inconnue x devient connue, & elle est égale à 14.

II°. *Prendre la valeur d'une inconnue*, c'est faire en sorte que cette inconnue fasse seule un membre d'une équation ; de quelques quantités connues ou inconnues que soit formé l'autre membre égal de la même équation. Par exemple, si $x = a + y$; en prenant $a + y$ pour x , ou x pour $a + y$, on prendra la valeur de l'inconnue : quoique la valeur de cette inconnue ne soit pas encore trouvée.

III°. Lorsque l'on a formé les équations qui renferment les conditions ou les rapports du problème, il faut les préparer pour la solution. Cette préparation consiste en *différentes transformations* qui les simplifient & qui les rendent plus faciles à résoudre. Ces transformations se font par le moyen de la transposition, de la multiplication, de la division, de l'exal-

tion, de l'extraction des racines. L'usage apprendra quelle est, dans chaque problème proposé, celle de ces cinq ou six principales opérations, qu'il faut actuellement mettre en œuvre, pour le résoudre.

TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS.

259. DÉFINITION. Ces *transformations* se font ou par voie d'addition, en ajoutant une même quantité aux deux membres; ou par voie de soustraction, en ôtant aux deux membres une même quantité; ou par voie de multiplication, en multipliant par une même quantité les deux membres; ou par voie de division, en divisant les deux membres par une même quantité; ou par voie d'extraction, en extrayant la racine des quantités qui forment l'un & l'autre membre. Nous allons parler de ces diverses transformations, qui doivent toujours être telles que l'on ne change jamais l'égalité entre les deux membres: ainsi il ne faut rien faire dans l'un, que l'on ne fasse précisément la même chose dans l'autre.

Il est évident que tous ces changemens ou transformations ne détruiront point l'équation ou l'égalité entre les deux membres: puisque dans tous ces changemens ou transformations, toujours on retranche ou l'on ajoute des quantités égales, à des quantités qui étoient égales. En voici des exemples.

260. EXEMPLE I. On dégage une inconnue, par voie d'addition. Si j'ai l'équation $x - b = ac$; je puis, sans détruire l'égalité, ajouter la quantité b de part & d'autre: il viendra $x - b + b = ac + b$; & en réduisant (90), j'aurai $x = ac + b$.

De-là on déduit cette règle: dans une équation, on peut faire passer une quantité négative d'un membre à l'autre, en changeant son signe — en +.

261. EXEMPLE II. On dégage une inconnue, par

voie de soustraction. Si j'ai l'équation $x + b = ac$, je puis retrancher de part & d'autre la quantité b ; & j'aurai $a + b - b = ac - b$; & en réduisant, j'aurai $x = ac - b$.

De-là on déduit cette règle : dans une équation, on peut faire passer une quantité positive d'un membre dans l'autre, en changeant son signe $+$ en $-$.

Dégager une inconnue par addition ou par soustraction, s'appelle transposer : soit que par la transposition, on fasse passer la quantité positive ou négative du premier membre dans le second, ou du second dans le premier. Par-là, on peut rendre positif, un membre qui étoit négatif; ou négatif, un membre qui étoit positif. Par exemple, si j'ai l'équation $+a = +10$; je puis, sans détruire l'égalité, retrancher deux fois sa valeur à chaque membre, ou mettre dans chaque membre deux fois l'opposé de sa valeur; & alors l'équation $+a = +10$, deviendra $+a - a = +10 - 10 - 10$; & en effaçant dans chaque membre de cette dernière équation les termes qui se détruisent, j'aurai $-a = -10$.

De même & par la même théorie de la transposition, on aura les transformations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{Si } +10 - 6 = +4; & \text{Si } +8 + 12 = 30 - 10; \\ \text{Donc } -10 + 6 = -4. & \text{Donc } -8 - 12 = 30 - 10. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{Si } +10 + 4 = +14; & \text{Si } +xx - ax = +da - b; \\ \text{Donc } -10 - 4 = -14. & \text{Donc } -xx + ax = -ad + b. \end{array}$$

262. EXEMPLE III. On dégage une inconnue, par voie de multiplication. Si j'ai l'équation $\frac{x}{a} = b$, je puis multiplier les deux membres par le dénominateur a (207); & il viendra $\frac{ax}{a} = ab$; & en réduisant (106), on aura $x = ab$.

De-là découle cette règle : dans une équation on peut faire évanouir une fraction qui s'y trouve, en multipliant

par son dénominateur tous les autres termes de l'équation.

263. EXEMPLE IV. On dégage une inconnue, par voie de division. Si j'ai l'équation $ab + cc = bx$, je puis, sans détruire l'égalité, diviser l'un & l'autre membre par une même quantité b ; & j'aurai $\frac{ab}{b} + \frac{cc}{b} = \frac{bx}{b}$; & en réduisant (106), j'aurai $a + \frac{cc}{b} = x$. Par ce moyen les deux quantités a & x ont été dégagées de la quantité b qui les multiplioit.

De-là on déduit encore cette règle : dans une équation, on peut dégager une quantité d'une autre quantité qui la multiplie, en divisant tous les autres termes de l'équation, par la quantité qui fait la fonction de multiplicateur.

264. EXEMPLE V. On dégage une inconnue, par voie d'exaltation. Si j'ai l'équation $\sqrt{x} = a$, j'éleve l'un & l'autre membre au carré, & j'aurai $x = aa$. Car $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$: puisque la racine, en se multipliant elle-même, donne le carré de sa valeur.

265. EXEMPLE VI. On dégage une inconnue, par voie d'extraction des racines. Si j'ai l'équation $xx = aa$, j'extrais la racine carrée dans l'un & dans l'autre membre; & j'ai $x = a$. De même si j'ai $x^3 = a$; en extrayant de part & d'autre la racine cubique, j'aurai $x = \sqrt[3]{a}$.

Nous donnerons ailleurs un plus ample développement sur les transformations qu'il faut faire subir aux équations du second degré, pour en extraire la racine carrée, algébrique & numérique (298). Cette théorie, nécessaire pour la résolution des équations du second degré, ne l'est pas pour la résolution des équations simples dont il sera uniquement question dans le paragraphe suivant.

SUBSTITUTION DES ÉQUATIONS.

266. DÉFINITION. La *substitution analytique* consiste à mettre dans une équation, une quantité égale à la place d'une autre quantité égale, par où l'on vient à bout de réduire deux inconnues à une seule inconnue; & ensuite, à réduire successivement plusieurs inconnues à une seule inconnue. Par exemple,

I°. Soient les deux équations $x + y = a$, & $x = 3y$. Dans la première équation, où il y a deux inconnues, je puis faire évanouir l'inconnue x , en mettant à sa place son égale $3y$; & alors cette première équation deviendra $3y + y = a$: il n'y aura donc plus dans la première équation transformée, qu'une seule inconnue y .

Si	$x + y = a$;
Si	$x = 3y$;
Donc	$3y + y = a$.

De même soient les deux équations $x + y = a$, & $x - y = b$, dans chacune desquelles se trouvent deux inconnues. Je fais évanouir l'inconnue x dans la seconde équation, en prenant la valeur de x dans la première équation, par le moyen de la transposition (261); & en mettant cette valeur $a - y$, dans la seconde équation à la place de x : ce qui donnera pour cette seconde équation $a - y - y = b$. Dans la seconde équation ainsi transformée par le moyen de la substitution, il n'y a plus qu'une seule inconnue y . L'inconnue x a disparu,

Si	$x + y = a$
Si	$x - y = b$
Donc	$a - y - y = b$

II°. Soient données ces trois équations, $x + y + z = a$; ensuite $x + y - z = b$; enfin $x - y + z = c$; dans chacune desquelles se trouvent trois inconnues. On fera évanouir deux inconnues dans chacune, par la substitution; en cette manière.

Prenez dans la première équation, la valeur de x ; & par la transposition, vous aurez $x = a - y - z$. Mettez cette valeur $a - y - z$, à la place de x , dans les deux équations suivantes : vous aurez pour seconde équation transformée,

$$x + y + z = a$$

$$x + y - z = b$$

$$x - y + z = c.$$

$$a - y - z + y - z = b$$

$$a - y - z - y + z = c.$$

$$a - b = 2z; \text{ \& } a - c = 2y.$$

$a - y - z + y - z = b$; & pour troisième équation transformée, $a - y - z - y + z = c$. Ces deux équations deviennent par la réduction, l'une $a - 2z = b$; l'autre $a - 2y = c$; & dans l'une & dans l'autre, il n'y a plus qu'une inconnue.

Si on veut maintenant réduire la première équation $x + y + z = a$, à n'avoir que l'inconnue x ; il faut prendre la valeur de y & la valeur de z dans les deux équations transformées & réduites, on aura d'abord, en transposant, $a - b = 2z$, & $a - c = 2y$; ensuite, en divisant par 2, ... $\frac{a-b}{2} = z$, & $\frac{a-c}{2} = y$; enfin, en substituant ces valeurs dans la première équation, $x + \frac{a-c}{2} + \frac{a-b}{2} = a$.

Le grand art de l'analyse consiste à réduire toutes les inconnues à une seule inconnue, que l'on égale ensuite à toutes les connues; & par-là l'inconnue devient connue. S'il y a deux équations, & par conséquent deux inconnues, il faut réduire les deux inconnues à une seule inconnue, par le moyen de la substitution. S'il y a trois équations, & par conséquent trois inconnues, il faut réduire d'abord les trois inconnues à deux, ensuite les deux à une. On voit par-là ce qu'il faudroit faire, s'il y avoit plus de trois inconnues.

Nous allons bientôt éclaircir tout ce que nous avons

dit, par quelques exemples ou par la solution de quelques problèmes. Mais il faut pour cela réduire en précis, les règles de l'analyse : afin qu'elles restent plus facilement imprimées dans l'esprit, & qu'elles dirigent sa marche dans la solution des problèmes.

REGLES DE L'ANALYSE.

267. COROLLAIRE. *Pour résoudre un problème d'analyse, il faut nécessairement :*

I°. Exprimer en style algébrique, les différentes conditions du problème.

II°. Réduire toutes les inconnues à une seule inconnue ; afin de pouvoir substituer une inconnue à une autre inconnue.

III°. Porter la valeur trouvée de l'inconnue, dans toutes les équations où se trouve cette même inconnue.

On verra dans les problèmes suivans, comment ces règles se réduisent en pratique par le moyen de la transformation, de la substitution, & de l'expression algébrique.

PARAGRAPHE SECOND.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS SIMPLES.

PROBLÈME I.

268. *PIERRE & Paul ont dépensé ensemble 1000 écus ; mais la dépense de Pierre est trois fois plus grande que celle de Paul : combien ont-il dépensé chacun ?*

SOLUTION. I°. Ce problème renferme deux inconnues, savoir, la dépense de Pierre que j'appelle x , &
 P

Problème exprimé en paroles.	Problème exprimé algébriquement.
On demande deux dépenses, ... dont la somme est $1000 = a$.. & dont l'une x , est triple de l'autre.	$x, y.$ $x + y = a$ $x = 3y.$

la *dépense de Paul* que j'appelle y : il renferme aussi une quantité connue, savoir, les 1000 écus que j'appelle a : on voit aussi que le problème renferme deux conditions,

La *première condition* est, en style ordinaire, que la dépense de Pierre & de Paul, prises ensemble, font 1000 écus : ce qui s'exprime algébriquement par l'équation $x + y = a$.

La *seconde condition* est, en style ordinaire, que la dépense de Pierre est triple de celle de Paul ; donc x est triple de y ; & par conséquent pour rendre y égal à x ; il faut multiplier y par 3, ou prendre trois fois y . La seconde condition s'exprimera donc en style algébrique par l'équation $x = 3y$.

II° Le problème étant mis en équations, il s'agit de réduire les deux inconnues à une seule inconnue, & les deux équations à une seule équation, par le moyen de la substitution. Pour cela, j'observe dans la seconde équation, que x est égal à $3y$: d'où je conclus que je puis mettre dans la première équation, $3y$ à la place de x ; & que dans ce cas je n'aurai qu'une équation & qu'une inconnue, savoir, $3y + y = a$:

donc $a = 3y + y$;

& en réduisant, $a = 4y$;

& en divisant par 4, $y = \frac{a}{4} = \frac{1000}{4} = 250$.

III°. La valeur de y étant toute connue, je la mets à la place de y dans toutes les équations où se trouve y ,

Ainsi je mets 250, qui est la valeur de y , à la place de y dans l'équation $x = 3y$; & je trouve $x = 3 \times 250 = 750$: donc la valeur de x est toute connue, & l'équation est résolue: Ainsi la dépense de Pierre est 750 écus, & celle de Paul 250 écus.

PROBLÈME II.

269. Une armée a été défaite : le quart est resté sur le champ de bataille ; les deux cinquièmes ont été faits prisonniers ; le reste 14000 hommes a pris la fuite ; de combien d'hommes étoit l'armée avant la bataille ?

SOLUTION. Ce problème ne renferme qu'une seule inconnue, savoir le nombre d'hommes qui composoit l'armée. Pour trouver cette inconnue,

I°. J'appelle a les 14000 hommes : j'appelle x le nombre total de l'armée, que je cherche. Ensuite je dis : le quart de x , plus les deux cinquièmes de x , plus 14000, sont égaux à toute l'armée ; & en style algébrique, $\frac{x}{4} + \frac{2x}{5} + a = x$.

II°. Comme il n'y a qu'une espèce d'inconnue, savoir x ; la seconde règle, ou la substitution, n'a point lieu dans cette équation.

III°. Je fais évanouir la première fraction $\frac{x}{4}$, en multipliant tous les termes de l'équation par le dénominateur 4 (207) : je trouve l'équation suivante, $x + \frac{8x}{5} + 4a = 4x$.

Je fais évanouir de même l'autre fraction $\frac{8x}{5}$, en multipliant tous les termes par le dénominateur 5 :

il vient $5x + 8x + 20a = 20x$:

& en réduisant, $13x + 20a = 20x$;

& en transposant, $20a = 20x - 13x$;

& en réduisant encore, $20a = 7x$.

IV°. Or $a = 14000$: donc $20a = 280000$: donc $7x = 20a = 280000$: ainsi $7x = 280000$.

Mais l'armée est x & non $7x$: donc pour avoir le nombre de l'armée, je divise par 7 le nombre $280000 = 7x$: le quotient 40000 exprimera le nombre d'hommes dont l'armée étoit composée. $x = 40000$.

Ce nombre satisfait aux conditions du problème : puisqu'en ajoutant les nombres marqués dans le problème, on trouve que la somme totale de ces nombres est égale à 40000 . Voici ces nombres marqués par le problème . . . 10000 . . . quart de 40000 .

+ 16000 deux cinquièmes de 40000 .

+ 14000 . . . reste de l'armée.

Total $40000 = x$ ou à l'armée.

P R O B L È M E I I I.

270. *La somme & la différence de deux grandeurs étant données ou connues, trouver qu'elles sont ces deux grandeurs.*

Ce problème peut se résoudre & en lignes & en nombres : nous allons le résoudre en l'une & en l'autre manière. (*fig. 9.*)

SOLUTION I. Soient deux lignes inégales AD & DB, qui exprimeront deux quantités quelconques : que leur somme soit 40 pieds & leur différence 8 pieds. Partagez la ligne totale en deux parties égales au point M ; & décrivez du point M une demi-circonférence Dd, qui ait pour rayon MD, égal à la moitié de la différence des deux grandeurs données. Par l'hypothèse, AM est égale à MB ; & l'une & l'autre sont égales à 20 pieds. De ces deux quantités égales retranchez les deux quantités égales DM, Md : les restes AD & Bd seront égaux. La différence des deux lignes est donc DMd = 8 pieds, dont la moitié est DM = 4 pieds.

Cela posé, il est évident que la plus grande ligne

BD est la moitié BM de la ligne totale, plus la moitié MD de la différence; & que la plus petite ligne AD est la moitié AM de la ligne totale, moins la moitié DM de la différence. Donc $BD = 10 + 4$, & $AD = 10 - 4$.

SOLUTION II. Soit la somme donnée des deux nombres inconnus 40, & leur différence 8. J'appelle x , le plus grand nombre: j'appelle y , le nombre plus petit: j'appelle a , la somme 40 des deux nombres: j'appelle b , la différence 8 des deux mêmes nombres. Par la nature du problème, j'ai deux équations qui renferment chacune deux inconnues; savoir, l'équation $x + y = a$, & l'équation $x - y = b$. Je dois donc employer la substitution, pour avoir la valeur d'une des deux inconnues, par exemple, de l'inconnue y : afin de faire disparaître l'inconnue x .

Problème exprimé
algébriquement.

$$x + y = a.$$

$$x - y = b.$$

Pour cela je dis: puisque $x + y = a$;
donc en transposant, . . . $x = a - y$;
& en mettant cette grandeur $a - y$, à la place de son égale x dans la seconde équation du problème, j'aurai . . . $a - y - y = b$;
& en réduisant, . . . $a - 2y = b$;
& en transposant, . . . $a - b = 2y$;
& en divisant par 2, . . . $\frac{a-b}{2} = y$.

Après ces opérations, la valeur de la quantité y est toute connue: puisqu'elle est égale à la grandeur a , moins la grandeur b , divisées par 2; ou à $\frac{40-8}{2} = 16$.

L'autre quantité x devient aussi connue; puisque $x + y = 40$: donc si de 40, on retranche $y = 16 - 4$; reste $x = 10 + 4 = 14$.

Par une semblable opération on peut faire évanouir y , pour avoir la valeur de x : on trouvera $\frac{a+b}{2} = x$.

271. COROLLAIRE. On voit par la solution de ce problème, & par l'équation qui en résulte, $y = \frac{a-b}{2}$, ou $x = \frac{a+b}{2}$, que la plus grande des deux quantités inégales, est toujours égale à la moitié de la somme de ces quantités, plus à la moitié de la différence: & que la plus petite est égale à la moitié de la somme, moins la moitié de la différence. Telle est la vérité générale, tel est le théorème, que découvrir & démontrer la solution de ce problème.

272. REMARQUE. On pourra d'après les principes que nous avons établis, & d'après l'application que nous venons d'en faire dans les problèmes précédens, se proposer & résoudre, si l'on veut, différens problèmes dans le goût des suivans, dont nous ne ferons qu'indiquer la solution pour servir d'exemple.

1°. Pierre & Jean avoient ensemble 36 livres $= a$; & ils ont perdu ensemble 10 livres $= b$: Pierre a perdu le tiers, & Jean le cinquième de ce qu'ils avoient. On demande ce que chacun avoit avant le jeu, & ce que chacun a perdu?

Ce problème semble d'abord renfermer quatre inconnues, quoi qu'il n'y en ait réellement que deux. Car lorsque l'on connoîtra la somme x que Pierre avoit avant le jeu; le tiers de cette somme sera sa perte, laquelle par conséquent ne fait pas une quantité inconnue. De même, quand on connoîtra la somme y de Jean, les deux cinquièmes de cette perte ne seront plus une quantité inconnue. Par où l'on voit que le nombre des inconnues ne dépend pas du nombre des demandes qu'on fait dans un problème; mais qu'il faut

$$\begin{array}{l} x + y = a \text{ ou } 36. \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = b \text{ ou } 10. \end{array}$$

voir, avant de déterminer le nombre des inconnues, si la solution d'une demande ne donne pas la solution d'une autre.

Après avoir délivré de fractions la seconde équation (262); on aura $5x + 3y = 15b$: & alors si en transposant, on prend $x = a - y$ dans la première équation, pour substituer cette valeur $a - y$ dans la seconde équation simplifiée & transformée $5x + 3y = 15b$; on aura $5a - 5y + 3y = 15b$, dans laquelle équation il n'y a plus qu'une inconnue. Après quoi, en réduisant d'abord, & en transposant ensuite, on aura $2y = 5a - 15b$; & en divisant par 2, on aura enfin $y = \frac{5a - 15b}{2}$.

Cette dernière équation suffit pour la solution du problème: car en faisant les additions, les soustractions, les divisions, les substitutions, marquées par la formule de cette dernière équation; on trouvera $y = 15$ livres. Jean avoit donc 15 livres; & il en a perdu 3, qui sont le cinquième de 15. Par conséquent Pierre avoit 21 livres puisque $15 + 21 = 36$; & il a perdu 7 livres, qui sont le tiers de 21.

Si dans ce même problème on avoit supposé la somme totale a de Pierre & de Jean avant le jeu, égale à 236 livres; & leur perte commune b égale à 40 livres; & les mêmes conditions de la perte; le problème auroit été résolu par la même équation $y = \frac{5a - 15b}{2}$. Mais dans ce dernier cas, la résolution du problème eût consisté à faire voir que *le problème est impossible*, & qu'il renferme une absurdité manifeste; puisque la somme y de Jean eût été 290 livres, plus grande que la somme de Jean & de Pierre prises ensemble.

II°. Une ânesse disoit à une mule: si je t'avois donné un de mes sacs, nous serions également char-

gées ; & si tu m'en faisois porter un des tiens, j'aurais le double de la charge. On demande combien de sacs chacune portoit ?

Ce problème renferme deux inconnues, savoir, le nombre x des sacs de l'âne, & le nombre y des sacs de la mule : il renferme aussi deux conditions, savoir, qu'en ôtant un des sacs de l'âne & en l'ajoutant aux sacs de la mule, le nombre des sacs seroit égal de part & d'autre ; & qu'en ôtant un des sacs de la mule, & en l'ajoutant aux sacs de l'âne, on rendroit le nombre des sacs de l'âne, deux fois plus grand que celui des sacs de la mule. On voit ici algébriquement exprimées ces deux conditions, dans les deux équations encadrées, qu'on réduira à une seule par le moyen de la substitution.

Après quoi, par la transposition, on trouvera que $y =$

$$\begin{array}{l} x - 1 = y + 1. \\ x + 1 = 2y - 2. \end{array}$$

5 , & que $x = 7$. Car en prenant dans la première équation la valeur de x , on aura $x = y + 1 + 1$, ou $x = y + 2$: & en substituant cette valeur $y + 2$ dans la seconde équation, à la place de x ; on aura $y + 2 + 1 = 2y - 2$, dans laquelle équation il n'y a plus qu'une inconnue y .

Après quoi, en réduisant, on aura $y + 3 = 2y - 2$; & en transposant, $y = 2y - 2 - 3$; & en transposant de nouveau, $2y - 5 = y$; & en transposant encore, $5 = 2y - y$; & en réduisant, $5 = y$.

On trouvera, si l'on veut de la même manière & par la même méthode, la valeur de $x = 7$.

PROBLÈME IV.

273. Diviser une somme donnée quelconque entre trois particuliers, Pierre, Paul & Jacques ; en telle manière que la portion du premier soit double de celle du

second, & que la portion du second soit triple de celle du troisième.

SOLUTION. Supposons que la somme donnée soit 10000 livres, $=a$. Quoique ce problème paroisse renfermer trois inconnues, il n'en renferme qu'une seule, savoir, la portion du dernier ou de Jacques, qui est la plus petite des trois.

I°. Soit donc x , la portion de Jacques : celle de Paul qui est triple sera $3x$: celle de Pierre qui est double de celle de Paul, sera $6x$: donc la condition du problème, exprimée algébriquement, sera $x + 3x + 6x = 10000$;
& en réduisant, . . . $10x = 10000$;

& en divisant par 10, $x = \frac{10000}{10} = 1000$.

Donc x , portion de Jacques $= 1000$ livres : $3x$, portion de Paul, $= 3000$ livres : $6x$, portion de Pierre, $= 6000$ livres.

II°. Ce problème peut aussi se résoudre par la règle de fausse position, dont nous parlerons bientôt, & dont on peut fréquemment faire un utile usage dans le calcul.

Si l'on supposoit la portion de Jacques $= 10$ livres ; celle de Paul seroit 30 livres, celle de Pierre 60 livres ; & la somme totale seroit 100 livres. Mais cette supposition est fautive ; puisqu'il s'agit de diviser non 100 livres, mais 10000 livres. Cependant cette supposition, quoique fautive, peut conduire à la vérité par le moyen de la règle de trois, en disant : si 100 livres donnent 10 livres pour la portion du troisième, combien donneront 10000 livres pour la portion du même ? ou $100 : 10 :: 10000 : x$: donc $x = \frac{10000 \cdot 10}{100} = 1000$: c'est-à-dire, que la portion qui étoit au troisième, est 1000 livres.

III°. On voit dans ce problème, que les parties auxquelles il faut diviser 10000 livres, ont entre elles

un certain rapport exprimé par les nombres 6, 3, 1 ; & que ce problème auroit pu être exprimé d'une façon générale en disant : *diviser un tout en trois parties, telles que leur rapport soit comme 6, 3, 1 : & alors on prend pour inconnue, la plus petite quantité.*

IV°. Si le problème précédent eût consisté à *diviser une somme quelconque 3000 livres entre trois personnes, Pierre, Paul, & Jacques ; en telle sorte que la portion de Pierre fût le quart de celle de Paul, & que la portion de Paul fût le cinquième de celle de Jacques : on auroit eu par la même méthode la solution du problème, en prenant pour inconnue x la portion de Pierre qui seroit la plus petite des trois. Par-là on auroit eu $x + 4x + 20x = 3000$; & en réduisant, $25x = 3000$; & en divisant par 25, $x \frac{3000}{25} = 120$. Ainsi on auroit eu $120 + 480 + 2400 = 3000$.*

REGLE DE FAUSSE POSITION.

274. OBSERVATION. La *regle de fausse position*, dont nous venons de donner & une idée & un exemple dans le problème précédent, sert souvent dans les calculs à faire trouver des grandeurs inconnues, par le moyen d'une *fausse hypothèse* ou supposition, qui a un *rapport vrai & connu* avec la vraie hypothèse.

Par exemple, si le rapport de fausse position est le rapport de 2 à 8, égal au rapport de 1 à 4 ; & que le rapport de x à 100, soit égal au même rapport 1 à 4 ; il est clair que ces deux raisons, égales chacune à une même raison, sont égales entr'elles (166) ; & forment une proportion géométrique (170), savoir cette proportion $2.8 :: x.100$. Et alors, en divisant

$$\begin{array}{l} 2.8 = 1.4. \\ x.100 = 1.4 \\ 2.8 :: x.100. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a.b = c.d. \\ x.aa = c.d \\ a.b :: x.aa. \end{array}$$

le produit des extrêmes par le produit des moyens ; on trouve un quotient 25 , qui exprime la vraie grandeur x , auparavant inconnue. (175.)

De même dans l'exemple en lettres , si les deux raisons , dont l'une est de fausse position , sont égales à une même raison ; il en résulte une proportion géométrique , dans laquelle l'inconnue x devient connue , étant égale au quotient des extrêmes divisé par le moyen connu : ainsi $x = \frac{aa}{b}$.

AUTRES REGLES DE CALCUL.

275. OBSERVATION. La *regle de fausse position* ; dont nous venons de parler , est fondée sur la *regle de trois* , que nous avons expliquée & démontrée ailleurs (178). Sur la même *regle de trois* , sont fondées la *regle de cinq* , de *sept* , de *neuf* , la *regle de compagnie* , la *regle d'alliage* ; dont nous allons parler dans les problèmes suivans , après en avoir donné ici des notions générales.

I°. La *regle de cinq* , de *sept* , de *neuf* , n'est autre chose qu'une *regle de trois* compliquée : comme on le verra dans le problème suivant.

II°. La *regle de compagnie* est une méthode par laquelle , deux ou plusieurs associés ayant fait un gain ou essuyé une perte ; on trouve qu'elle est la part du gain qui revient à chacun , ou la part de la perte que chacun doit supporter , à proportion de ce qu'il a mis dans la bourse commune.

III°. La *regle d'alliage* est une méthode qui sert à résoudre toutes les questions où il s'agit de faire des mélanges de certaines marchandises ou des alliages de certains métaux , à certaines conditions qu'on fixe & qu'on détermine. Elle est ou *directe* ou *indirecte*.

La *regle d'alliage* est *directe* quand elle sert à faire trouver le *prix moyen* d'un mélange fait ou à faire

elle est indirecte, quand étant donné le prix moyen du mélange à faire, elle sert à faire trouver les portions qui doivent le former.

PROBLÈME V.

276. Si 20 ouvriers en 10 jours ont fait 100 toises, combien 30 ouvriers en 6 jours feront-ils de toises ?

SOLUTION. Cette question renferme cinq termes : ce que l'on appelle la *regle de cinq*. Pour la résoudre, on exprime l'état de la question par deux proportions en cette manière :

Ouvriers.	Toises.	Ouvriers.	Toises.
20 .	100 ::	30 .	x :
Jours.		Jours.	
10 .	100 ::	6 .	x :

Maintenant il n'y a qu'à multiplier le nombre des ouvriers par celui des jours, 20 par 10, ce qui donnera 200; & 30 par 6, ce qui donnera 180. Il est évident que 20 ouvriers qui travaillent pendant 10 jours, doivent faire le même ouvrage que 200 ouvriers qui travaillent pendant un seul jour : pareillement, que 30 ouvriers qui travaillent pendant 6 jours, doivent faire le même ouvrage que 180 ouvriers qui travaillent pendant un seul jour : ou que 260 journées sont à 100 toises, comme 180 journées sont à x toises. Les deux proportions se réduisent donc à une seule proportion que l'on résout par une simple *regle de trois* : 200 . 100 ::

$$180 . x : \text{donc on aura } x = \frac{180 \times 100}{200} = \frac{18000}{200} = 90.$$

277. REMARQUE I. Si le problème eût été proposé en cette manière ; 20 ouvriers en 10 jours travaillant 8 heures ont fait 100 toises : combien 30 ouvriers en 6 jours travaillant 10 heures feront-ils de toises ? La question proposée auroit renfermé sept termes : ce que l'on appelle la *regle de sept*.

Pour résoudre ce problème, il eût fallu faire trois proportions, qui par la multiplication auroient été réduites à une seule. Ainsi on auroit multiplié 200 journées par 8 heures, & 180 journées par 10 heures :

Heures. Toises. Heures. Toises.

& l'on auroit eu, 1600 . 100 :: 1800 . x .

278. REMARQUE II. Si le problème avoit eu neuf termes, ce que l'on appelle la *règle de neuf*; il eût fallu faire quatre proportions, qui par la multiplication auroient été réduites à une seule.

PROBLÈME VI.

279. Trois citoyens ont fait un fonds de 1800 livres : Pierre y a mis 300 livres ; Jacques 600 livres ; Jean 900 livres. Sur ce fonds ils ont fait un gain de 9000 livres : combien chacun doit-il participer au gain, à proportion de sa mise ?

SOLUTION. Ce problème renferme la *règle de compagnie* (275). Il est évident que le gain qui doit revenir à chacun, doit être proportionnel à la mise qu'il a faite. Ce problème se résout donc par autant de proportions, qu'il y a de termes inconnus, en disant : le fond est au gain, comme la mise de chacun est à la portion du gain qui revient à chacun. Ainsi soit x , la portion du gain qui doit revenir à Pierre ; celle de Jacques y ; celle de Jean z : on aura ces trois

Proportions . . 1800 . 9000 :: 300 . x :
 600 . y :

Donc pour le premier, $x = \frac{300 \cdot 9000}{1800} = 1500$.

pour le second, $y = \frac{600 \cdot 9000}{1800} = 3000$.

pour le troisième, $z = \frac{900 \cdot 9000}{1800} = 4500$.

280. REMARQUE. Ce problème peut être énoncé

Qij

d'une façon générale, en proposant de *diviser un tout en parties proportionnelles aux parties d'un autre tout.*

Si les trois associés, au lieu d'avoir fait un gain, avoient effuyé une perte déterminée, par exemple, de 1000 livres; il est clair que la perte de chacun devroit être proportionnelle à sa mise; & que la quantité de chaque perte se trouveroit, par la même équation qui fait trouver la quantité de chaque gain.

PROBLÈME VII.

281. On a fait, ou l'on veut faire un mélange de quantités de différens prix : *étant données les portions qui le composent, & le prix de ces portions ; trouver le prix moyen d'une mesure déterminée de ce mélange.*

SOLUTION. Ce problème renferme la règle d'alliage directe. Soit le mélange fait ou projeté, un composé de vins de différens prix, par exemple, de 4 pintes de vin à 10 sols, & de 6 pintes de vin à 15 sols la pinte. Il s'agit de trouver le prix moyen, ou le prix auquel reviendra la pinte après le mélange fait.

I°. Prenez la somme des quantités ou mesures qui doivent composer le mélange : prenez aussi la somme des prix de toutes ces mesures.

Mesures.	{ 4 pintes à 10 sols font. . . 40 sols. }	Prix.
	{ 6 pintes à 15 sols font. . . 90 sols. }	
Somme.	10 mesures. . . font. . . 130 sols.	

II°. Faites cette proportion : la somme des mesures ou le mélange entier est au prix total, comme une seule mesure est au prix moyen; ou 10 pintes. 130 sols :: 1 pinte. $x = \frac{130}{10} = 13$.

Ce problème se résout, comme on voit, par une simple règle de trois; & porte avec lui-même sa démonstration.

PROBLÈME VIII.

282. On veut, avec des quantités de différens prix ou de différens titres, faire un mélange qui revienne à un prix moyen fixé : étant donné le prix moyen que doit avoir la mesure du mélange, & la valeur des quantités dont on veut faire le mélange ; trouver la portion qu'il faut prendre de chaque quantité, pour faire un mélange dont la mesure revienne au prix donné.

EXPLICATION. Ce problème renferme la règle d'alliage indirecte (275), laquelle peut se réduire à trois cas généraux. Car on peut demander,

I°. Que l'on forme un mélange d'une grandeur indéterminée, sans fixer les portions des quantités qui doivent le former.

II°. Que l'on forme un mélange encore indéterminé, en fixant la portion d'une de ces quantités.

III°. Que l'on forme un mélange d'une grandeur fixée & donnée, sans fixer les portions de ces quantités.

On suppose toujours que le prix moyen est donné ; aussi bien que le prix particulier de chacune des quantités qui doivent entrer dans le mélange ou dans l'alliage. Ce problème exige une solution relative à chacun de ces cas particuliers ; & on la trouvera dans les trois exemples suivans.

283. EXEMPLE I. La livre d'étain valant 16 sols, & la livre de plomb 10 sols ; combien faut-il prendre de l'un & de l'autre, pour en faire un alliage d'une grandeur quelconque, dont la livre revienne à un prix moyen 12 sols ?

SOLUTION. I°. Comparez les deux prix, avec le prix moyen, qui est ici 12 ; pour en connoître les diffé-

rences : donnez
au prix plus haut,
la différence du
prix moyen avec
le plus bas prix ;

Prix particuliers.	Sols.	Différences,
Prix moyen. 12.	$\left. \begin{array}{l} 16. \\ 10. \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 2. \\ 4. \end{array} \right\}$
Somme des différences.	...	6.

& au plus bas prix , la différence du prix moyen avec le plus haut , comme on le voit dans ce cadre.

II°. Observez que ces différences marquent combien il faut prendre de parties de chaque quantité , pour faire l'alliage ou le mélange. Dans la question proposée pour exemple , il faut prendre deux parties d'étain & quatre de plomb : & comme la somme des parties qui composent l'alliage , est $2 + 4 = 6$, les parties qu'il faut prendre des deux titres , sont $\frac{2}{6}$ & $\frac{4}{6}$; ou , ce qui revient au même ; $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{3}$.

III°. S'il y a trois titres donnés , dont on veuille faire un alliage qui soit d'un titre ou prix moyen , par exemple , de 12 sols ; on prendra d'abord deux des trois titres que l'on réduira à un titre moyen , suivant la règle qui vient d'être donnée : il faudra ensuite comparer ce résultat avec le troisième titre , pour en faire le mélange , & par-là l'on trouvera le titre moyen cherché 12.

On voit par-là comment il faudroit opérer s'il y avoit quatre titres donnés , en réduisant d'abord les quatre titres à trois , & ensuite les trois à deux.

DÉMONSTRATION. La raison de cette opération est que les titres doivent fournir à l'alliage ou au mélange , d'autant plus , qu'ils diffèrent moins du prix moyen ; & d'autant moins , qu'ils en diffèrent plus. Donc les portions qu'ils doivent fournir , sont entre elles réciproquement comme les différences qu'ont les titres avec le titre moyen : donc pour connoître ces portions , il n'y a qu'à donner au plus haut titre la différence du plus petit ; & au plus petit , la différence du plus haut. C. Q. F. D.

284. EXEMPLE II. Combien faudroit-il prendre de pintes de vin à 100 deniers la pinte, pour faire avec 14 pintes d'un vin inférieur à 60 deniers la pinte, un mélange qui puisse valoir 72 deniers la pinte?

SOLUTION. 1°. Prenez les différences des prix particuliers avec le prix moyen; & placez les dans un ordre renversé; comme dans l'exemple & dans le cas précédent: ce qui signifie qu'il faudroit prendre 12 pintes du vin plus cher, & 28 pintes du vin moins cher.

Prix particuliers.	Deniers.	Différences.
Prix moyen. 72.	{ 100 . . .	12.
	{ 60 . . .	28.
Quantité donnée,	14 pintes.	

II°. Mais comme la quantité qu'il faut prendre de ce dernier vin moins cher, est donnée & déterminée, savoir, 14 pintes; faites cette proportion: la quantité 28, trouvée par la différence avec le prix moyen, est à la quantité donnée 14; comme la quantité 12, trouvée par la différence avec le prix moyen, est à la quantité cherchée du vin plus cher, ou plus brièvement, $28 : 14 :: 12 : x = \frac{1 \cdot 68}{28} = 6$.

C'est à-dire, qu'ayant pris 14 pintes de vin à 60 deniers, il faut prendre 6 pintes de vin à 100 deniers, pour faire un mélange dont la pinte vaille 72 deniers. Il est clair qu'on peut substituer tout autre prix aux deux prix donnés, & toute autre quantité que 14, à l'une des deux choses qu'on veut mélanger, sans altérer en rien cette méthode générale.

DÉMONSTRATION. La raison de cette opération se voit évidemment, en faisant l'opération inverse; c'est-à-dire, en cherchant par la règle d'alliage directe (281), quel seroit le *prix moyen* de la pinte de vin, après un mélange de 14 pintes à 60 deniers la pinte, & de 6 pintes à cent deniers la pinte: on trouvera que ce prix moyen est 72 deniers. Or si 14

pintes à 60 deniers, & 6 pintes à 100 deniers, donnent pour prix moyen 72 deniers à la pinte de ce mélange ; il est clair que les deux portions ou quantités dont le mélange doit répondre à ce prix moyen, sont 14 pintes à 60 deniers & 6 pintes à 100 deniers.
C. Q. F. D.

285. EXEMPLE III. *Combien faudroit-il prendre de froment à 90 sols la mesure, & de seigle à 60 sols la mesure, pour former un mélange de 25 mesures à 72 sols la mesure ?*

SOLUTION. I°. Comparez les prix particuliers avec le prix moyen 72 : placez-à côté, comme dans les deux exemples précédens, les différences dans un ordre renversé ; & prenez la somme 30 des différences,

Prix particuliers.	Sols.	Différences.
Prix moyen, 72.	$\left\{ \begin{array}{l} 90 \dots\dots 12 \\ 60 \dots\dots 18 \end{array} \right.$	
Mesures fixées, 25.		
Somme des différences . . .		30.

$$30 \cdot 25 : : 12 \cdot x = \frac{100}{10} = 10.$$

$$30 \cdot 25 : : 18 \cdot x = \frac{410}{10} = 15.$$

II°. Faites cette proportion : la somme 30 des différences, est à la somme donnée 25 de toutes les quantités ; comme la différence d'une des quantités avec le prix moyen, est à cette quantité ; vous aurez pour quatrièmes termes 10 & 15. C'est-à-dire, qu'il faut prendre 10 mesures de froment & 15 mesures de seigle, pour faire le mélange demandé.

On conçoit que cette méthode générale peut s'appliquer à toutes sortes de quantités, & servir à faire des mélanges de vin, de café, de substances métalliques, d'une infinité d'objets commercables, de différent prix. Il n'y a à changer dans la proportion précédente, que les chiffres relatifs aux quantités données.

DÉMONSTRATION. La raison de cette opération se voit évidemment, comme dans l'exemple précédent, en faisant l'opération inverse. En effet, 10 mesures de froment à 90 sols, font 900 sols; & 15 mesures de seigle à 60 sols font aussi 900 sols. Or prenant, comme le prescrit la regle d'alliage directe (281), la somme des quantités, savoir 25, & la somme des prix, savoir 1800 sols; vous aurez cette proportion, 25 . 1800 :: 1 . $x = 72$: ce qui donne le prix moyen $x = 72$, lequel est conforme à l'hypothese; comme dans la démonstration de l'exemple précédent. C. Q. F. D.

PROBLÈME IX.

286. *Etant donné un alliage d'or & d'argent, trouver sans décomposer la masse qui résulte de cet alliage, quelle quantité de chaque métal elle contient.*

SOLUTION. Voici le fameux problème dont Archimede trouva la solution en entrant dans le bain, avec des transports de joie capables de l'exposer à compromettre la gravité des mathématiques. Hieron, roi de Syracuse, avoit donné à son orfèvre, une certaine quantité d'or, pour faire une couronne. L'ouvrage étant fini, le Roi voulut savoir s'il n'y avoit point d'alliage : mais il ne vouloit pas qu'on tronquât ou qu'on entamât la couronne, dont le travail étoit encore plus précieux que la matiere. Il proposa la question à Archimede; & ce savant & profond Mathématicien découvrit, sans endommager en rien la couronne, la quantité précise d'or & d'argent que l'orfèvre y avoit employée. Quoiqu'on ne sache pas par quelle voie Archimede parvint à résoudre ce fameux problème; nous supposérons & il est assez vraisemblable qu'il employa la méthode suivante, qui est une simple application de la regle d'alliage inverse;

& qui est fondée sur les différentes pesanteurs spécifiques de l'or & de l'argent, qu'on peut déterminer aisément par le moyen de l'hydrostatique. (*Phy.* 642.)

Archimede prit ou put prendre deux lingots, l'un d'or & l'autre d'argent, qui pesoient chacun autant que la couronne; & ayant observé que la couronne, plongée dans l'eau, perdoit plus de son poids que le lingot d'or, & moins que le lingot d'argent, plongés aussi dans la même eau; il conclut qu'il y avoit de l'alliage dans la couronne. Car si elle avoit été d'or pur, comme le lingot d'or, leurs pertes de poids dans l'eau auroient été égales; & si elle avoit été toute d'argent, sa perte & celle du lingot d'argent auroient été aussi égales. Pour résoudre avec lui le problème,

1°. Supposons que la couronne, que nous prenons ici pour exemple général d'un *alliage d'or & d'argent*, pesât 96 onces, comme les deux lingots de comparaison & de même poids: que la perte de son poids dans l'eau, fût de 8 onces: que celle du lingot d'or, fût de 7 onces & $\frac{3}{4}$; & celle du lingot d'argent, de 9 onces & $\frac{1}{4}$.

En multipliant par 4 les poids & les pertes (194 & 207); on réduira d'abord le poids commun 96 des trois masses, & les pertes particulières de chacune des trois masses dans l'eau, en fractions dont le dénominateur sera 4: ce qui donnera $\frac{384}{4}$, & $\frac{31}{4}$, $\frac{31}{4}$, $\frac{37}{4}$.

Ces quatre fractions sont entre elles comme leurs numérateurs (190). Ainsi le poids commun & les trois pertes particulières sont entre eux, comme 384 & 32, 31, 37: c'est à-dire, que si les trois poids, égaux chacun à 96 onces, avoient été divisés chacun en 384 parties, la couronne ou l'alliage auroit perdu dans l'eau 32 parties; le lingot d'or 31, & le lingot d'argent 37. La perte 32 est la *perte moyenne*, donnée ou trouvée: les pertes 31 & 37 sont les pertes données ou trouvées, des substances qui forment l'al-

liage. Ces trois pertes répondent à ce que nous avons appelé les *trois prix donnés*, dans toute la règle d'alliage indirecte. (282.)

II°. Je fais un alliage des pertes 31 & 37 des lingots d'or & d'argent, pour lui donner la perte moyenne 32 de la couronne; & échangeant les différences, j'en prends la somme. Cette somme 6 me fait voir que pour avoir un alliage de 6 onces, qui perdît autant dans l'eau que 6 onces du mélange ou de l'alliage de la couronne, il faudroit cinq onces d'or & une once d'argent.

Pertes particulières.	Parties.	Différenc.
Perte moyenne.. 32.	{ 31 . . . 5.	
	{ 37 . . . 1.	
Somme des différences. 6.	

Les 5 onces d'or prises ensemble, perdroient dans l'eau 5 trente-deuxièmes de moins, que cinq onces de l'alliage de la couronne: mais l'once d'argent perdrait 5 trente-deuxièmes de plus. Ainsi le plus étant compensé par le moins, les cinq onces d'or jointes ou alliées à l'once d'argent, ne perdroient ni plus ni moins que six onces de l'alliage de la couronne. Cette théorie revient, comme on voit, au premier cas & au premier exemple de la règle d'alliage indirecte. (283.)

III°. Maintenant, puisque la couronne pesoit 96 onces, selon la supposition; je fais deux règles de trois en disant pour la première: si pour un alliage de 6 onces, qui dans l'eau perde précisément autant de son poids que la couronne, il faut 5 onces d'or; combien en faudra-t-il pour un alliage de 96 onces? Et pour la seconde, si pour ce même alliage de 6 onces, il faut une once d'argent; combien en exigera un alliage de 96 onces? Ces deux

$6. 5 :: 96. x = 80. \text{Or.}$
$6. 1 :: 96. x = 16. \text{Argent.}$

regles donnent 80 onces d'or & 16 onces d'argent , pour l'alliage de la couronne ; & le problème est résolu.

DEMONSTRATION. La raison de cette opération est fondée sur les mêmes principes , que celle de l'alliage inverse ; & elle revient à la démonstration du premier cas & du premier exemple (283). Il est clair que chaque métal doit fournir d'autant plus au mélange ou à l'alliage qui doit perdre dans l'eau une certaine quantité déterminée de son poids , que sa perte propre dans l'eau s'éloigne moins de la *perte moyenne* 32 , donnée ou trouvée ; & réciproquement. Mais l'or perdant 31 & l'argent perdant 37 , leurs différences de la perte moyenne sont 1 & 5 : donc en renversant les différences , l'or doit fournir cinq parties , & l'argent une partie , au mélange ou alliage qui doit essuyer dans l'eau une perte égale à la perte moyenne 32. C. Q. F. D.

287. **REMARQUE.** Par les mêmes regles d'alliage , on pourra faire une infinité de mélanges convenables de différentes sortes de matieres ; & découvrir si les mélanges ont été faits selon les proportions requises.

Par exemple , pour fondre une piece de canon qui soit bonne , l'expérience a appris qu'il faut mettre trois livres d'étain sur 25 livres de rosette ou cuivre rouge. La rosette perd dans l'eau environ un neuvième de son poids ; & l'étain ne perd qu'environ un septième de son poids. (*Phy.* 644). On pourra donc trouver , combien une piece de 5200 livres , par exemple , doit perdre de son poids dans l'eau ; & en examinant ce qu'elle en perd , on découvrira , comme dans le problème précédent , ce qu'elle a de trop ou de trop peu de l'un de ces deux métaux.

S'il falloit refondre cette piece , on découvrira de même , en pesant un de ses tronçons dans l'eau , la quantité d'étain ou de rosette qu'il faut ajouter à l'al-

liage précédent, si cet alliage a été défectueux.

PROBLÈME X.

288. Deux mobiles A & B commencent ensemble à se mouvoir avec des vitesses inégales dans la même direction sur une même ligne indéfinie vers le point C, & doivent se rencontrer : *étant donnés la distance des deux mobiles au moment du départ, & le rapport de leurs vitesses, trouver le point où ils se rencontreront.*

SOLUTION. 1°. Soit la vitesse du mobile A, $= 5$; la vitesse du mobile B qui doit être moindre, puisqu'il doit être atteint par l'autre, $= 2$; la distance des deux mobiles au moment du départ, & que j'appelle d , $= 600$ toises.

Le mobile B qui précède, parcourt un certain espace avant d'être atteint par le mobile qui le suit : cet espace inconnu & qu'il s'agit de trouver, je l'appelle x . Le mobile A, pour arriver au point de rencontre, parcourra la distance d comprise entre les deux mobiles, plus l'espace x ; dans le même tems où le mobile B ne parcourra que l'espace x . Le problème se réduit donc à trouver cet espace x au bout duquel doit se faire la rencontre des deux mobiles.



2°. Pour trouver cet espace x ; je fais attention que les vitesses sont entre elles, comme les espaces parcourus dans le même tems (*Phy.* 265). Car il est évident que si un corps a, par exemple, deux fois plus de vitesse qu'un autre ; il parcourra dans le même tems deux fois plus d'espace. On aura donc cette proportion : la vitesse du corps A, est à la vitesse du corps B ; comme l'espace parcouru par le corps A, est à l'espace parcouru par le corps B : ou bien $5 : 2 :: d + x : x$.

donc en multipliant, $5x = 2d + 2x$;

& en transposant, $5x - 2x = 2d$;

& en réduisant, . . . $3x = 2d$;

& en divisant par 3, . . . $x = \frac{2d}{3} = \frac{1200}{3} = 400$.

C'est-à-dire que, quand le corps A attrapera le corps B, l'espace que ce corps B aura parcouru, sera le tiers du double de l'avance qu'il avoit; ou les deux tiers de la distance comprise entre les deux corps, à l'instant de leur commun départ. Ainsi le point de rencontre x sera à 400 toises du corps B, & à 1000 toises du corps A.

289. COROLLAIRE. On voit par cette équation $x = \frac{2d}{3}$, qui renferme la solution du problème, que pour avoir l'espace x parcouru par le mobile qui a le moins de vitesse, il faut multiplier la distance d par la vitesse de ce mobile, & diviser le produit par la différence des vitesses. Le diviseur 3 est la différence entre les deux vitesses.

290. APPLICATION. On peut par la même méthode, trouver à quel point du zodiaque la lune rattrapera le soleil, que je suppose précéder la lune vers l'orient, d'une certaine quantité connue ou d'un certain nombre de degrés & de minutes, que j'appelle d .

EXPLICATION. 1°. Il faut savoir que les vitesses de la lune & du soleil dans le zodiaque, sont entre elles à peu près comme 1484 est à 111.

Cela posé, soit la distance d dont le soleil précède la lune vers l'orient, égale à 26 degrés 56 minutes, qui font 1616 minutes. J'appelle x l'espace ou la partie du zodiaque que le soleil parcourt, pendant le tems que la lune emploiera à l'attraper : l'espace ou la partie du zodiaque que la lune parcourra dans le même tems, sera $d + x$. On aura donc cette proportion
1484. 111 :: $d + x$. x :

Donc en multipliant, $1484x = 111d + 111x$;
 & en transposant, $1484x - 111x = 111d$;
 & en réduisant, $1373x = 111d$;
 & en divisant par 1373, $x = \frac{111d}{1373} = \frac{179376}{1373}$.

II°. Voilà le problème résolu ! Ainsi pour avoir l'espace x , ou le point où la lune atteindra le soleil ; divisez 179376 par 1373 : le quotient 130 minutes (plus une fraction de minute que l'on néglige), exprimera la distance qu'aura parcouru le soleil au point de rencontre. Ensuite $d + x = 1616 + 130$, fera 1746 minutes ; qui font 29 degrés 6 minutes : c'est environ la distance entre le lieu où étoit la lune, & le point où elle atteindra le soleil.

REMARQUE. Nous supposons ici réelle, la révolution apparente du soleil dans le zodiaque. Cette *révolution du soleil* ; qui est sa révolution annuelle autour du zodiaque, à compter du premier point du bélier actuel jusqu'au retour dans le premier point du bélier suivant, s'effectue en 365 jours 5 heures 48 minutes 44 secondes (Phy. 1137). La révolution de la lune autour du même zodiaque, en prenant pour termes le premier point du bélier, est de 27 jours 7 heures 45 minutes 5 secondes. (Phy. 1242.)

L'espace parcouru en apparence par le soleil & par la lune, est le même zodiaque, de 360 degrés ; les vitesses apparentes de ces deux globes autour du zodiaque entier, sont donc entre elles, en raison inverse des tems (Phy. 266). En réduisant ces deux tems en minutes, & en faisant abstraction des secondes, on trouvera que le tems du soleil est de 325948 minutes ; que le tems de la lune est de 39343 minutes ; & que le premier tems est au second, à très-peu près, comme 1484 est à 111 : ainsi que le suppose la solution du problème.

PROBLÈME XI.

291. Deux mobiles B & C commencent au même instant à se mouvoir l'un vers l'autre sur une même ligne : étant donnés leur distance au moment du départ , & le rapport de leurs vitesses , trouver le point de rencontre.

SOLUTION. Soit la distance BC des deux mobiles , distance que j'appelle d , égale à 640 lieues ; la vitesse du mobile B , $= 2$; la vitesse du mobile C , $= 6$.



Il s'agit de trouver quelle partie Bx , que j'appelle x , de la distance totale BC , que j'appelle d , aura parcouru le mobile B , au moment de rencontre. Pour cet effet , j'observe que le mobile C parcourra dans le même tems l'autre partie $d - x$ de la distance qui les sépare. On aura donc cette proportion : la vitesse du mobile B est à la vitesse du mobile C , comme l'espace parcouru par le premier est à l'espace parcouru par le second ; ou $2 : 6 :: x : d - x$.

Donc en multipliant , $6x = 2d - 2x$;

& en transposant , $6x + 2x = 2d$;

& en réduisant , $8x = 2d$;

& en divisant par 8 , $x = \frac{2d}{8} = \frac{1280}{8} = 160$.

C'est-à-dire que , quand les deux mobiles se rencontreront , le mobile B aura parcouru deux huitièmes de la distance BC qui les sépareroit. Ainsi le point de rencontre x , fera à 160 lieues du point B.

292. COROLLAIRE. On voit par cette équation $x = \frac{2d}{8}$, qui renferme la solution de ce problème ; que

pour

pour avoir l'espace x parcouru par le mobile qui a le moins de vitesse, il faut multiplier la distance d par la vitesse de ce mobile, & diviser le produit par la somme des vitesses. Le diviseur 8 est la somme des deux vitesses.

PROBLÈME XII.

293. Deux hommes, dont l'un marche plus vite & l'autre plus lentement, sont au même lieu A, & veulent arriver au même instant à un lieu éloigné B : étant donnés le rapport de leurs vitesses, & la distance des deux termes ; trouver quelle partie de l'espace doit avoir parcouru celui qui va le moins vite, avant que l'autre se mette en chemin.

SOLUTION. Soit la distance AB entre les deux termes, = 1000 toises : la moindre vitesse, = 5 : la plus grande vitesse, = 7.



1°. J'appelle x , la partie A x de la distance totale AB ou d , que doit avoir parcouru celui qui part le premier ; avant que le dernier qui a plus de vitesse, se mette en chemin. Celui qui part le dernier, parcourra la distance entière d , pendant que le premier parcourra $d - x$.

Ainsi en supposant toujours que les vitesses connues sont entre elles, comme les espaces parcourus (288) ; on aura encore cette proportion : 7 . 5 :: d . $d - x$:

donc en multipliant, $7d - 7x = 5d$;

& en transposant d'abord, $-7x = 5d - 7d$;

& en transposant encore, $7x = -5d + 7d$;

& en réduisant, $7x = 2d$;

& en divisant par 7, $x = \frac{2d}{7} = \frac{2000}{7} = 285 + \frac{5}{7}$;

R

II°. C'est-à-dire que si la distance d est de 1000 toises; celui qui va moins vite doit avoir parcouru un septieme de 2000 toises, à l'instant où part celui qui va plus vite.

294. COROLLAIRE. On voit par cette équation $x = \frac{2d}{7}$, qui renferme la solution du problème, que pour avoir l'inconnue x , ou l'avance que doit avoir le premier; il faut multiplier la distance d par la différence des vitesses, & diviser le produit par la plus grande des deux vitesses. Le diviseur 7, est la plus grande des deux vitesses: le multiplicateur 2, en est ici la différence.

REMARQUE. Les trois problèmes précédens peuvent servir, comme on voit, à faire trouver à peu près en combien de jours & à quelle distance doivent se rencontrer deux vaisseaux, dont l'un est meilleur voilier que l'autre de telle quantité connue; & qui partis en différens tems d'un même lieu, de Pondichéry, par exemple, doivent suivre une même route & arriver à un même terme, tel que Bordeaux, tout étant supposé égal d'ailleurs; ou qui partis l'un de Bordeaux & l'autre de Pondichéry, doivent se rencontrer en chemin. On conçoit qu'il est facile, d'après la théorie & d'après la méthode que nous venons d'exposer dans les trois problèmes précédens, de se proposer & de résoudre une infinité d'autres problèmes également curieux & intéressans, sur le Mouvement.

PROBLÈME XIII.

295. Etant donnés le premier & le second terme d'une progression géométrique décroissante & composée d'une infinité de termes; trouver la somme de tous les termes de cette progression.

SOLUTION. Soit la progression géométrique donnée

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{512} \cdot \frac{1}{1024} \cdot \frac{1}{2048} \cdot \frac{1}{4096} \cdot \frac{1}{8192} \cdot \frac{1}{16384} \cdot \frac{1}{32768} \cdot \frac{1}{65536} \cdot \frac{1}{131072} \cdot \frac{1}{262144} \cdot \frac{1}{524288} \cdot \frac{1}{1048576} \cdot \frac{1}{2097152} \cdot \frac{1}{4194304} \cdot \frac{1}{8388608} \cdot \frac{1}{16777216} \cdot \frac{1}{33554432} \cdot \frac{1}{67108864} \cdot \frac{1}{134217728} \cdot \frac{1}{268435456} \cdot \frac{1}{536870912} \cdot \frac{1}{1073741824} \cdot \frac{1}{2147483648} \cdot \frac{1}{4294967296} \cdot \frac{1}{8589934592} \cdot \frac{1}{17179869184} \cdot \frac{1}{34359738368} \cdot \frac{1}{68719476736} \cdot \frac{1}{137438953472} \cdot \frac{1}{274877906944} \cdot \frac{1}{549755813888} \cdot \frac{1}{1099511627776} \cdot \frac{1}{2199023255552} \cdot \frac{1}{4398046511104} \cdot \frac{1}{8796093022208} \cdot \frac{1}{17592186044416} \cdot \frac{1}{35184372088832} \cdot \frac{1}{70368744177664} \cdot \frac{1}{140737488355328} \cdot \frac{1}{281474976710656} \cdot \frac{1}{562949953421312} \cdot \frac{1}{1125899906842624} \cdot \frac{1}{2251799813685248} \cdot \frac{1}{4503599627370496} \cdot \frac{1}{9007199254740992} \cdot \frac{1}{18014398509481984} \cdot \frac{1}{36028797018963968} \cdot \frac{1}{72057594037927936} \cdot \frac{1}{144115188075855872} \cdot \frac{1}{288230376151711744} \cdot \frac{1}{576460752303423488} \cdot \frac{1}{1152921504606846976} \cdot \frac{1}{2305843009213693952} \cdot \frac{1}{4611686018427387904} \cdot \frac{1}{9223372036854775808} \cdot \frac{1}{18446744073709551616} \cdot \frac{1}{36893488147419103232} \cdot \frac{1}{73786976294838206464} \cdot \frac{1}{147573952589676412928} \cdot \frac{1}{295147905179352825856} \cdot \frac{1}{590295810358705651712} \cdot \frac{1}{1180591620717411303424} \cdot \frac{1}{2361183241434822606848} \cdot \frac{1}{4722366482869645213696} \cdot \frac{1}{9444732965739290427392} \cdot \frac{1}{18889465931478580854784} \cdot \frac{1}{37778931862957161709568} \cdot \frac{1}{75557863725914323419136} \cdot \frac{1}{151115727451828646838272} \cdot \frac{1}{302231454903657293676544} \cdot \frac{1}{604462909807314587353088} \cdot \frac{1}{1208925819614629174706176} \cdot \frac{1}{2417851639229258349412352} \cdot \frac{1}{4835703278458516698824704} \cdot \frac{1}{9671406556917033397649408} \cdot \frac{1}{19342813113834066795298816} \cdot \frac{1}{38685626227668133590597632} \cdot \frac{1}{77371252455336267181195264} \cdot \frac{1}{154742504910672534362390528} \cdot \frac{1}{309485009821345068724781056} \cdot \frac{1}{618970019642690137449562112} \cdot \frac{1}{1237940039285380274899124224} \cdot \frac{1}{2475880078570760549798248448} \cdot \frac{1}{4951760157141521099596496896} \cdot \frac{1}{9903520314283042199192993792} \cdot \frac{1}{19807040628566084398385987584} \cdot \frac{1}{39614081257132168796771975168} \cdot \frac{1}{79228162514264337593543950336} \cdot \frac{1}{158456325028528675187087900672} \cdot \frac{1}{316912650057057350374175801344} \cdot \frac{1}{633825300114114700748351602688} \cdot \frac{1}{1267650600228229401496703205376} \cdot \frac{1}{2535301200456458802993406410752} \cdot \frac{1}{5070602400912917605986812821504} \cdot \frac{1}{10141204801825835211973625643008} \cdot \frac{1}{20282409603651670423947251286016} \cdot \frac{1}{40564819207303340847894502572032} \cdot \frac{1}{81129638414606681695789005144064} \cdot \frac{1}{162259276829213363391578010288128} \cdot \frac{1}{324518553658426726783156020576256} \cdot \frac{1}{649037107316853453566312041152512} \cdot \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} \cdot \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} \cdot \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} \cdot \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} \cdot \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} \cdot \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} \cdot \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} \cdot \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} \cdot \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} \cdot \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} \cdot \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} \cdot \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} \cdot \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} \cdot \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} \cdot \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} \cdot \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} \cdot \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} \cdot \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} \cdot \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} \cdot \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} \cdot \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} \cdot \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} \cdot \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} \cdot \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} \cdot \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} \cdot \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} \cdot \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} \cdot \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} \cdot \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} \cdot \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} \cdot \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} \cdot \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} \cdot \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} \cdot \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} \cdot \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} \cdot \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} \cdot \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} \cdot \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} \cdot \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} \cdot \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} \cdot \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} \cdot \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} \cdot \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} \cdot \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} \cdot \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} \cdot \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} \cdot \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} \cdot \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} \cdot \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} \cdot \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} \cdot \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} \cdot \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} \cdot \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} \cdot \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} \cdot \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} \cdot \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} \cdot \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} \cdot \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} \cdot \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} \cdot \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} \cdot \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} \cdot \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} \cdot \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} \cdot \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} \cdot \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} \cdot \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} \cdot \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} \cdot \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} \cdot \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} \cdot \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} \cdot \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} \cdot \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} \cdot \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} \cdot \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} \cdot \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} \cdot \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} \cdot \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} \cdot \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} \cdot \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} \cdot \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} \cdot \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} \cdot \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} \cdot \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} \cdot \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} \cdot \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} \cdot \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} \cdot \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} \cdot \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} \cdot \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} \cdot \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} \cdot \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} \cdot \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} \cdot \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} \cdot \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} \cdot \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} \cdot \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} \cdot \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} \cdot \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} \cdot \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} \cdot \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} \cdot \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} \cdot \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} \cdot \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} \cdot \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} \cdot \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} \cdot \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} \cdot \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} \cdot \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} \cdot \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} \cdot \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} \cdot \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} \cdot \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} \cdot \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} \cdot \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} \cdot \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} \cdot \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} \cdot \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} \cdot \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} \cdot \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} \cdot \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} \cdot \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} \cdot \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} \cdot \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} \cdot \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} \cdot \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} \cdot \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} \cdot \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} \cdot \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} \cdot \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} \cdot \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} \cdot \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} \cdot \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552} \cdot \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104} \cdot \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208} \cdot \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416} \cdot \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832} \cdot \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664} \cdot \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328} \cdot \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656} \cdot \frac{1}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312} \cdot \frac{1}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624} \cdot \frac{1}{3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248} \$$

I°. J'appelle le premier terme a ; le second terme b ; la somme inconnue des termes x . J'observe d'abord que dans toute progression géométrique, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent (222). Or dans le cas du problème, la somme de tous les antécédens, est la même que la somme de tous les termes; puisque tous les termes sont antécédens, excepté le dernier qui est ici $\frac{x}{a} = 0$ (241); ainsi la somme des antécédens est $x - \frac{x}{a} = x - 0 = x$.

D'ailleurs la somme de tous les termes d'une progression étant conséquens, excepté le premier; la somme des conséquens sera $x - a$. On aura donc cette proportion: la somme de tous les termes, est à la somme de tous les mêmes termes moins le premier; comme ce premier terme a , est au second b ; ou $x : x - a :: a : b$. Donc $bx = ax - aa$; ou bien $ax - aa = bx$.

Voilà l'équation qui exprime la nature du problème, dans lequel il n'y a qu'une seule inconnue x .

II°. Il s'agit maintenant de dégager l'inconnue x , qui dans l'équation est mêlée avec deux quantités connues qui la multiplient. Pour cela, dans la dernière équation $ax - aa = bx$, je fais d'abord passer $-aa$ du premier membre dans le second; & j'ai $ax = bx + aa$, ou $bx + aa = ax$.

Ensuite pour mettre tous les termes qui contiennent l'inconnue dans le même membre; je fais encore passer bx , du premier membre de la dernière équation, dans le second (261); & j'ai $aa = ax - bx$, ou $ax - bx = aa$.

III°. Après cela, considérant que le premier membre de la dernière équation, n'est que l'inconnue x multipliée par $a - b$, ou $a - b$ multiplié par x ; je divise toute l'équation par $a - b$; afin que l'inconnue x reste seule dans un membre, égale à l'autre membre dont

toutes les quantités sont connues. J'ai donc $x = \frac{aa}{a-1}$; & l'équation est résolue.

296. COROLLAIRE. On voit par cette dernière équation $\frac{aa}{a-1}$, qui renferme la solution du problème, que la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante & infinie, est égale au carré du premier terme, divisé par le premier moins le second.

Dans l'exemple proposé, 8 est le premier terme & son carré est 64 : le premier terme moins le second, est $8 - 4 = 4$. Ainsi il faut diviser 64 par 4 : le quotient 16 sera la somme de tous les termes de la progression donnée.

297. REMARQUES. 1°. Quand les termes de la progression géométrique infinie vont en diminuant par moitié, comme dans l'exemple proposé ; pour lors la somme de tous les termes qui suivent le premier, est égale à ce premier terme.

Quand les antécédens sont triples de leurs conséquens ; alors la somme des termes qui suivent le premier, n'est que la moitié de ce premier terme.

Quand les antécédens sont quadruples de leurs conséquens ; la somme des termes qui suivent le premier, est le tiers de ce premier terme.

Quand les antécédens sont dix fois plus grands que leurs conséquens ; la somme de tous les termes qui suivent le premier, est la neuvième partie de ce premier terme. Tout cela est une suite de la règle générale qui vient d'être établie. (296.)

II°. Par ce moyen on trouvera facilement dans un tout, dont les parties décroissent en proportion géométrique, la somme infinie & décroissante

Des moitiés : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \dots$ ou $0 = 1$.

Des tiers : $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \dots$ ou $0 = \frac{1}{2}$.

Des quarts : $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \dots$ ou $0 = \frac{1}{3}$.

Des dixièmes: $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000} \dots 0 = \frac{1}{9}$

Des centièmes: $\frac{1}{100}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{1000000}, \frac{1}{100000000} \dots 0 = \frac{1}{99}$

III°. En général, on trouvera la somme de toutes les parties fractionnaires, dont la suite sera une progression géométrique décroissante infinie, en retranchant une unité du dénominateur du premier terme. Le premier terme, diminué d'une unité dans son dénominateur, exprimera la somme de toute la suite infinie des termes suivans.

PARAGRAPHE TROISIEME.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

298. OBSERVATION. **O**N nomme *équations du second degré*, toutes les équations où l'inconnue est élevée à son carré, ou multipliée par elle-même. Car lorsque dans une équation, l'inconnue n'est multipliée que par une quantité connue; l'équation n'est que du premier degré. Ainsi $ax + dx - x = b$, n'est qu'une équation du premier degré; en supposant que les quantités a, b, d , sont toutes connues & évaluées en nombres entiers ou fractionnaires.

Nous ferons voir aussi bientôt (301) que le produit xy d'une inconnue par une inconnue, placé dans une équation, donne une équation du second degré, ou une équation qui pour le fond des choses revient à une équation du second degré. Ainsi $xy + y = a$, est équivalement une équation du second degré.

La résolution des équations du second degré exige nécessairement l'extraction des racines carrées dans chaque membre de l'équation; & cette extraction des racines carrées renferme assez souvent des difficultés qu'il est nécessaire de prévoir & de lever. Ainsi, lors-

que dans une équation, l'inconnue est élevée au quarré ; pour en extraire la racine quarrée.

I°. Il faut voir si ce quarré est multiplié ou divisé par quelqu'autre quantité. Car dans le premier cas, il faut le dégager de la quantité qui le multiplie, par la division ; & dans le second cas, il faut le dégager de la quantité qui le divise, par la multiplication.

II°. Il faut voir si ce quarré est positif. Car s'il étoit négatif, il faudroit le rendre positif par la transposition ; parce que dans une grandeur élevée à son quarré, il ne peut y avoir aucun quarré négatif. (152. IX°.)

III°. Il faut mettre dans un seul membre de l'équation, tous les termes où cette inconnue se trouve ; en les égalant, par la transposition, à l'autre membre.

IV°. Il faut voir si ce membre est un quarré complet : ce qui n'arrive que lorsque l'inconnue ne se trouve que dans un seul terme, comme $xx = a - b$. Et lorsque, outre le quarré de l'inconnue, ce membre contient un ou plusieurs produits de l'inconnue par quelques autres quantités connues, comme $xx - ax = b$; ce membre est un quarré incomplet (152, VIII°.) ; & il faut le compléter, en ajoutant à chaque membre de l'équation, le quarré de la moitié de la quantité connue qui multiplie l'inconnue.

V°. Il faut extraire la racine quarrée de chaque membre de l'équation. Par-là on trouvera facilement la valeur de l'inconnue ; puisque cette valeur de l'inconnue sera égale à la racine quarrée du membre tout composé de quantités connues. (159 & 163.)

EXEMPLE I. Soit proposée, par exemple, cette équation $\frac{aa - xx}{b} = 2a - b$, dont il faut extraire la racine quarrée. Premièrement j'ôte la fraction, en multipliant tout par b ; & j'ai $aa - xx = 2ab - bb$. Secondement je rends $-xx$ positif, par la transposition & en transposant, . . . $x = 27 - 11$;

(161); & j'ai $aa = xx + 2ab - bb$. Troisièmement je mets xx dans un membre seul, par la transposition encore; & j'ai $aa - 2ab + bb = xx$. Quatrièmement, puisque xx est seul dans un membre, je vois que le carré est complet. Cinquièmement j'extrait la racine carrée de chaque membre (153); & j'ai $a - b = x$.

EXEMPLE II. Soient proposées encore deux autres équations $xx + ax = bc$, & $xx + x = 6$, qui contiennent chacune, outre le carré de l'inconnue, l'inconnue linéaire, ou l'inconnue en sa première puissance.

Car lorsque l'inconnue est multipliée par une quantité connue; cette quantité connue a ,

$xx + ax = bc.$
$xx + x = 6$

par exemple, fait la fonction de coefficient par rapport à l'inconnue, & marque que l'inconnue doit être prise tel nombre de fois. Pour trouver la racine carrée de ces deux équations; on mettra dans un seul membre tous les termes où se trouve l'inconnue, & on fera en sorte que ce membre devienne un carré complet. Or pour que ce membre devienne un carré complet, il faut prendre la moitié du coefficient qui multiplie l'inconnue linéaire x ; élever cette moitié au carré; & ajouter ce carré à chaque membre de l'équation. Par-là le premier membre deviendra un carré parfait, dont on pourra aisément extraire la racine: on connoîtra donc la racine de x , en extrayant la racine semblable des deux membres.

Dans la première équation encadrée $xx + ax = bc$; le coefficient de x est a : la moitié de ce coefficient est $\frac{a}{2}$: son carré est $\frac{aa}{4}$. Ce carré étant ajouté à l'un & à l'autre membre, on aura l'équation $xx + ax + \frac{aa}{4} = bc + \frac{aa}{4}$; dont la racine carrée (153) est $x + \frac{a}{2} = \sqrt{bc + \frac{aa}{4}}$.

Riv

Dans la seconde équation encadrée $xx + x = 6$; le coefficient de x est 1 : sa moitié est $\frac{1}{2}$: son carré est $\frac{1}{4}$. En ajoutant ce carré à l'un & à l'autre membre, on aura l'équation $xx + x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, dont la racine sera $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$; par conséquent, $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

PROBLÈME I.

299. Trouver un nombre inconnu x ; dont le carré, & le produit par une quantité connue a , soient égaux à une grandeur donnée b .

SOLUTION. Soit x le nombre inconnu : son carré inconnu sera xx : son produit inconnu, par la quantité connue, sera ax . Par la condition unique du problème, on aura cette équation : $xx + ax = b$.

I°. Par l'observation précédente, je vois d'abord que ce problème est du second degré : puisque l'inconnue s'y trouve élevée à son carré; & que de plus, l'équation contient différens degrés de l'inconnue, savoir xx & ax . Il faut donc, pour trouver la valeur de l'inconnue x , extraire la racine carrée de chaque membre de l'équation.

II°. Je vois ensuite que le premier membre de l'équation n'est pas un carré parfait; puisqu'il n'a que deux membres (152. VIII°) : il faut donc, pour que l'extraction de la racine soit possible, faire en sorte que le premier membre devienne un carré complet. Pour cela, je prends la moitié du coefficient a du second terme; & j'ai $\frac{a}{2}$, que j'élève au carré $\frac{aa}{4}$: après quoi, j'ajoute ce carré à l'un & à l'autre membre; & l'équation devient $xx + ax + \frac{aa}{4} = b + \frac{aa}{4}$.

III°. J'extrais, dans cette dernière équation, la racine carrée de l'un & de l'autre membre (153); & j'ai cette autre équation $x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \frac{aa}{4}}$.

Cette dernière équation renferme toute la solution du problème : il ne s'agit plus que d'évaluer le second membre tout composé de quantités connues, dont il faut prendre la racine quarrée. Ainsi en supposant la première quantité donnée $a=8$, & la seconde quantité donnée $b=33$;

J'aurai d'abord $x + \frac{8}{2} = \sqrt{33 + \frac{64}{4}}$;

& en réduisant, $x + 4 = \sqrt{49}$.

Et en ôtant le signe radical, $x + 4 = 7$;

& en transposant, $x = 7 - 4$;

& en réduisant, $x = 3$.

On voit que cette équation $x=3$, satisfait à toutes les conditions du problème. Car le quarré de 3 est $9 = xx$: le produit de 3 par 8, est $24 = ax$. Ces deux nombres $9 + 24$ font $33 = b$: par conséquent le problème est résolu.

300. REMARQUES. 1°. Il faut observer ici (& c'est une *remarque fondamentale* à faire, pour toute la théorie des équations du second degré) que dans la dernière équation $x=3$, la quantité x peut indifféremment être positive ou négative. La raison en est que, dans un problème du second degré, la quantité x se trouve élevée au quarré; & que tout quarré a toujours deux racines possibles. Par exemple, le quarré xx , résultant nécessairement & indifféremment ou de $+x$ par $+x$, ou de $-x$ par $-x$ (152. IX°), a deux racines, qui sont indifféremment ou $+x$ ou $-x$: sans qu'on puisse déterminer dans l'équation $x=3$, si la racine trouvée se rapporte à la racine positive $+x$, ou à la racine négative $-x$. D'où il résulte que les problèmes déterminés du second degré sont toujours susceptibles de deux solutions.

Pour faire mieux sentir la vérité de cette remarque fondamentale, & de la conséquence qui en résulte; supposons que l'équation résolue vienne de $+x +$

$\frac{a}{2}$. En multipliant par lui-même ce binôme, on aura $xx + \frac{ax}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{aa}{4}$; & en réduisant, $xx + ax + \frac{aa}{4}$; c'est l'équation que nous venons de résoudre, dans laquelle la quantité génératrice x est positive, & vaut $+3$.

Supposons ensuite que l'équation vienne de $-x - \frac{a}{2}$. En multipliant par lui-même ce binôme, on aura $xx + \frac{ax}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{aa}{4}$; & en réduisant, $xx + ax + \frac{aa}{4}$; c'est encore l'équation que nous venons de résoudre, dans laquelle la quantité génératrice x est négative, & vaut -3 .

II°. Mais l'équation $x = 3$, qui résout en dernière analyse le problème précédent, satisfait également aux conditions du problème; soit que x exprime une quantité positive $+3$; soit que x désigne une quantité négative -3 .

Nous avons vu d'abord comment x , pris pour une quantité positive $+3$, satisfait aux conditions du problème: il reste donc à faire voir comment x , pris pour une quantité négative -3 , satisfait aux mêmes conditions; qui sont que le carré de x , plus le produit de x par a ou 8 , égale le nombre positif 33 . Or $-3 \times -3 = +9$: ensuite $-3 \times -8 = +24$: enfin $+9 + 24 = +33$.

III°. Si dans le problème précédent, les quantités données a & b , au lieu d'être 8 & 33 , eussent été 12 & 615 ; on auroit eu de même l'équation $\dots x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \frac{aa}{4}}$;

& en substituant, $\dots x + \frac{12}{2} = \sqrt{615 + \frac{12^2}{4}}$;

& en simplifiant, $\dots x + 11 = \sqrt{736}$.

& en ôtant le signe radical, $x + 11 = 27$, & en posant

& en réduisant, . . . $x = 16$, & un peu plus.

Cette dernière équation satisfait à très-peu près aux conditions du problème. Car d'abord $16 \times 16 = 256$: ensuite $16 \times 22 = 352$: enfin $256 + 352 = 608$. Ce nombre 608 est un peu plus petit que le nombre 615 : parce que la quantité x vaut un peu plus que 16. Mais cette équation $x = 16$, ou résout le problème, si on veut se contenter d'un à peu près; ou démontre que le problème est impossible & insoluble, si l'on exige la racine exacte & précise d'un nombre 736, qui n'est pas un carré parfait (134), & qui ne répond pas aux conditions données dans le problème.

IV°. Si on demandoit de trouver un nombre inconnu x , tel qu'étant son quadruple de son carré, on eût un reste égal à 96 : en procédant comme dans la solution du problème précédent, on auroit d'abord l'équation $xx - 4x = 96$; & en complétant le carré, on aura ensuite $xx - 4x + \frac{16}{4} = 96 + \frac{16}{4}$. Après quoi, la solution est la même que celle du problème précédent; & on trouve l'inconnue $x = 12$.

PROBLÈME II.

301. Trouver deux nombres inconnus, dont la somme & le produit sont donnés.

SOLUTION. Soient les deux nombres inconnus x & y : leur somme donnée $18 = a$; leur produit donné $65 = b$. Le problème renferme deux conditions; & donne deux équations : par la première, $x + y = a$; & par la seconde, $xy = b$.

1°. Comme il y a ici deux inconnues dans chaque équation; j'emploie la substitution, pour faire disparaître une des deux inconnues dans la seconde équation. Pour cela, prenant la valeur de x dans la première équation, j'ai $x = a$

$$x + y = a \text{ ou } 18$$

$$xy = b \text{ ou } 65.$$

$$ay - yy = b.$$

— y ; & multipliant $a - y$ par y , j'ai $ay - yy$. J'ai donc l'équation $xy = b$, transformée en son égale $ay - yy = b$.

II°. Dans cette dernière équation, je ne vois plus qu'une inconnue : mais j'y vois un carré négatif, qu'il faut rendre positif; j'y vois de plus un carré incomplet, qu'il faut compléter (298). D'abord je rends positif par la transposition (261), le carré négatif; & j'ai $yy - ay = -b$.

Ensuite je complète cette dernière équation, en ajoutant à chaque membre le carré de la moitié de a , coefficient du second membre; & j'ai l'équation complète $yy - ay + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} - b$.

III°. Cette dernière équation renferme la solution du problème; & il ne s'agit plus que d'extraire la racine carrée de l'un & de l'autre membre (153 & 129), dont l'un est tout composé de quantités connues. J'extrais donc cette racine carrée;

$$\text{\& j'ai} \quad y - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{aa}{4} - b};$$

$$\text{\& en simplifiant,} \quad y - 9 = \sqrt{81 - 65};$$

$$\text{\& en réduisant,} \quad y - 9 = \sqrt{16};$$

$$\text{\& en ôtant le signe radical,} \quad y - 9 = 4;$$

$$\text{\& en transposant,} \quad y = 4 + 9;$$

$$\text{\& en réduisant,} \quad y = 13.$$

Cette dernière équation $y = 13$, fait voir que l'un des deux nombres cherchés y est 13; & que l'autre nombre cherché x est par conséquent 5; puisque $13 + 5 = 18$. Ces deux nombres 5 & 13 satisfont aux deux conditions du problème : car $5 + 13 = 18$; & 5×13 ou $13 \times 5 = 65$.

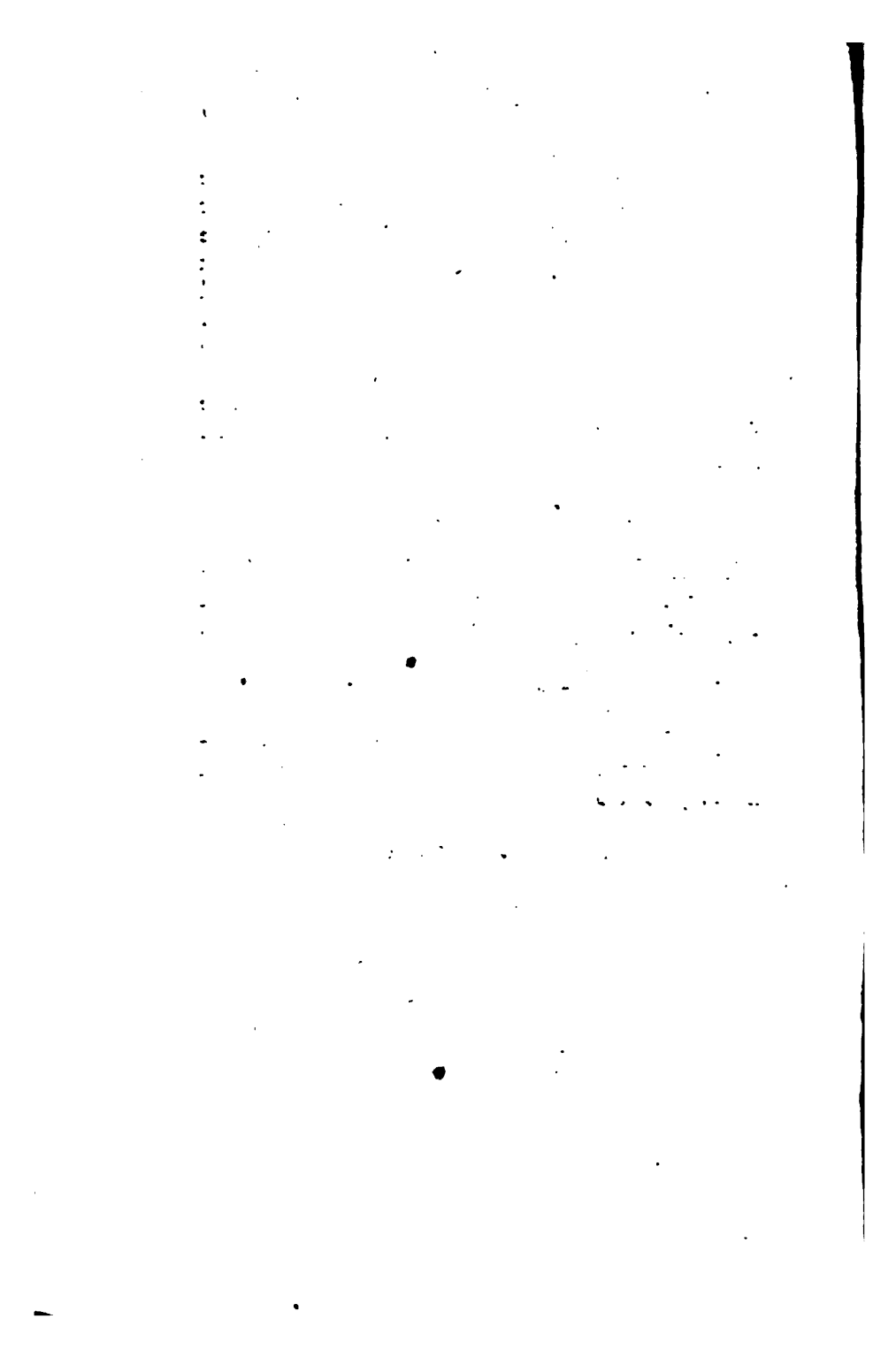
IV°. Mais il faut observer ici que, soit qu'on fasse $y = 13$ & $x = 5$, soit qu'on fasse $y = 5$ & $x = 13$, les conditions du problème sont également remplies.

D'où il s'ensuit que le nombre 13 ne représente pas plutôt la racine y , que l'autre racine x ; que *chacune des deux inconnues peut indifféremment représenter soit le nombre plus grand, soit le nombre plus petit*; que par conséquent ce problème est susceptible de deux solutions, ainsi que le précédent; & qu'en général tout problème dans lequel une des deux inconnues peut être indifféremment plus grande ou plus petite que l'autre, est un *problème qui a deux solutions & qui est du second degré*. Cette remarque revient, comme on voit, pour le fond des choses, à la seconde partie de la remarque précédente. (300.)

CONCLUSION.

Il seroit facile d'étendre & d'allonger ce traité, on certe théorie des Équations du premier & du second degré, en y insérant une foule superflue de problèmes plus ou moins difficiles, qu'on trouve par-tout & qui ne mènent à rien. Nous avons voulu n'y mettre guere que les problèmes fondamentaux, dont la solution, simplifiée, autant qu'il est possible, a un rapport prochain & immédiat avec les grandes connoissances du Calcul, de la Géométrie, de la Physique.

FIN DU CALCUL.



PRINCIPES

DU CALCUL

ET DE LA GÉOMÉTRIE.

SECONDE PARTIE.

LA GÉOMÉTRIE.

LONGIMÉTRIE, ou mesure de l'Étendue en longueur. *Origine des Lignes, leur position respective, leur réunion en figures, leurs rapports, leurs mesures.*

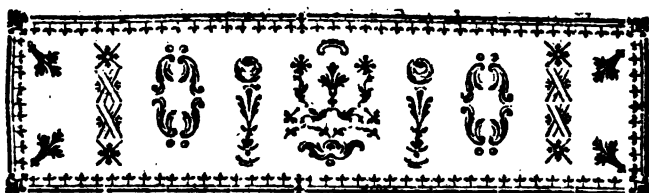
PLANIMÉTRIE, ou mesure des Surfaces planes envisagées dans leur égalité, dans leurs rapports, dans leurs sections.

STÉRÉOMÉTRIE, ou mesure des Solides. *Formation & développement des différens solides, d'où l'on déduit d'abord les mesures & les rapports de leurs Surfaces; & ensuite, l'égalité, la mesure, & les divers rapports de leurs Solidités.*

TRIGONOMÉTRIE, ou l'art scientifique de résoudre les Triangles par le calcul arithmétique. *Théorie des Cordes & des Sinus: usage des Sinus dans la résolution des Triangles: Sinus des Secondes & des Tierces. Idée & principaux usages de la Trigonométrie sphérique.*

SECTIONS CONIQUES: Introduction à cette science. *La Parabole & l'Ellipse considérées, & sur un plan & dans le cône. Table des Sinus.*

PRINCIPES



PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE, ou ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES. GÉOMÉTRIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE.

LA *Géométrie* est la science de l'étendue, ou la science qui apprend à mesurer la grandeur continue. La *géométrie* est ou *spéculative*, ou *pratique*. La *géométrie spéculative* est celle qui est occupée à démontrer : la *géométrie pratique* est celle qui est occupée à opérer & à exécuter : à la première appartiennent les théorèmes ; à la seconde, les problèmes. Nous ne séparerons point la *géométrie spéculative*, de la *géométrie pratique* : parce que l'opération ne peut être trop rapprochée de la démonstration qui l'éclaire & qui la dirige. Ainsi nous donnerons conjointement, autant qu'il sera possible, & les théorèmes & les Problèmes.

La géométrie se divise communément en géométrie élémentaire & en géométrie transcendente. On nomme *géométrie élémentaire*, toutes les parties de cette science où l'on n'emploie dans les démonstrations & dans les opérations, que la ligne droite & la ligne circulaire. On nomme *géométrie transcendente*, toutes les parties de cette science où l'on emploie dans les démonstrations des lignes différentes de la ligne droite & de la ligne circulaire, telles que sont les trois sections coniques & une foule d'autres courbes d'un genre plus relevé.

302. DÉFINITION. Dans l'étendue il y a quatre choses à considérer ; savoir, le *point*, la *ligne*, la *surface*, & le *solide*. Un corps quelconque considéré tout entier, s'appelle un *solide*. Un solide est terminé par des faces, que l'on appelle *surfaces*. Chaque surface est terminée par des côtés, que l'on appelle *lignes*. Chaque ligne est terminée par des extrémités, que l'on appelle *points*.

I°. Le point n'a pas de dimensions ; ou n'a que des dimensions infiniment petites, dont on fait abstraction. La ligne a une dimension, que l'on appelle *longueur*. La surface a deux dimensions, que l'on appelle *longueur* & *largeur*. Le solide a trois dimensions, que l'on appelle *longueur*, *largeur* & *profondeur*.

II°. Ces trois dimensions tirent primitivement leur origine du point. Car le point en se mouvant, décrit une *ligne* : une ligne en se mouvant, décrit une *surface* : une surface en se mouvant, décrit un *solide*. Il n'y a donc que trois especes d'étendue, la ligne, la surface & le solide.

III°. La mesure des lignes ou la *longimétrie*, la mesure des surfaces ou la *planimétrie*, la mesure des solides ou la *stéréométrie*, seront la matiere d'autant de traités, qui embrasseront le fond de tout ce que nous avons à dire sur les trois dimensions de l'étendue.

A ces trois traités, nous ajouterons un traité de *trigonométrie*, qui contiendra une méthode particulière & plus scientifique, de mesurer les triangles; & une *introduction aux sections coniques*, bornée à donner les notions fondamentales de l'ellipse & de la parabole, qu'exige indispensablement l'étude de la physique.

ETYMOLOGIES. *GÉOMÉTRIE*; c'est-à-dire, mesure de la Terre, ou mesure de l'étendue sur la terre; laquelle mesure a été principalement l'objet des premiers géomètres, ou des hommes qui se sont occupés de la science de l'étendue. De $\gamma\eta$, *terra*; & de $\mu\epsilon\sigma\upsilon\rho\alpha$, *mensura*. *LONGIMÉTRIE*; c'est-à-dire, science de l'étendue en longueur: de *longum* & de $\mu\epsilon\sigma\upsilon\rho$. *PLANIMÉTRIE*; science de l'étendue plane: de *planum* & de $\mu\epsilon\sigma\upsilon\rho$. *STÉRÉOMÉTRIE*; science de l'étendue solide, ou de l'étendue selon ses trois dimensions: de $\sigma\tau\epsilon\rho\alpha$, *solidum*; & de $\mu\epsilon\sigma\upsilon\rho$. *TRIGONOMÉTRIE*; science ou mesure des triangles: de $\tau\rho\acute{\iota}\varsigma$, *trois*; de $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$, *angle*, & de $\mu\epsilon\tau\rho\alpha$. *SECTIONS CONIQUES*; science des sections faites par un plan dans le cône; ou des propriétés qu'ont ces sections; ou science qui a pour objet, des surfaces planes ressemblantes aux sections que peut former un plan tranchant, en coupant d'une manière quelconque, un cône d'une grandeur quelconque.





PRINCIPES
DU CALCUL
ET DE LA GÉOMÉTRIE,
O U
ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES.
GÉOMÉTRIE.

PREMIER TRAITÉ.

LES LIGNES, OU LA LONGIMÉTRIE.

Nous considérerons dans les lignes, leur origine, leur position respective, leur réunion en figures, leurs rapports. De leur *origine*, découlent leur nature & leurs propriétés fondamentales : de leur *position respective*, naissent les angles : de leur réunion, se forment les figures : de leurs *rapports*, résulte leur mesure, ou la longimétrie : matière d'autant d'articles de ce traité.

ARTICLE PREMIER.

ORIGINE ET PROPRIÉTÉS DES LIGNES.

303. HYPOTHESE. SI un point A est supposé se mouvoir, & partir d'un terme A pour arriver au terme B;

l'espace parcouru par ce point s'appelle *ligne*. Ainsi la ligne est l'écoulement d'un point. (*fig. 13.*)

I°. Si le point A en se mouvant, conserve toujours la même direction, & va par la voie la plus courte de A en B, il décrit une *ligne droite*.

II°. Si le point A, en se mouvant, change à chaque instant de direction, il décrit une *ligne courbe*; par exemple, ligne AFB, ou bien la ligne ADB.

III°. On peut remarquer ici que toute ligne est droite ou courbe. *La ligne droite est unique dans son espece*: elle ne peut être plus ou moins droite. *La ligne courbe peut varier à l'infini*: elle peut être plus ou moins courbe. Parmi les lignes courbes, nous ne considérerons ici que la circulaire, de laquelle toutes les autres courbes tirent primitivement leur origine.

A la ligne droite & à la ligne circulaire, répondent la *regle* & le *compas*: la règle, pour décrire la ligne droite; le compas, pour décrire la ligne circulaire: ce sont les instrumens fondamentaux dont on se sert dans la géométrie pratique.

DE LA LIGNE DROITE.

Voici, sur la nature & sur les propriétés de la ligne droite, quelques propositions qu'on pourra regarder indifféremment ou comme des *théorèmes*, puisqu'on les démontre; ou comme des *axiomes*, puisqu'elles portent en elles-mêmes leur démonstration & leur évidence. (*fig. 13.*)

304. AXIOME I. *On ne peut tirer qu'une seule ligne droite, d'un point à un autre*; par exemple, du point A au point B. Car il est clair que les nouvelles lignes droites, qui passeroient par ces deux points A & B, auroient tous leurs points posés sur tous les points de la première ligne AB; & ne feroient plus qu'une même ligne avec la ligne AB.

305. AXIOME II. *La ligne droite est la plus courte qu'on puisse mener d'un point à un autre.* Car toute autre ligne commence à s'allonger en se couvant; & plus elle se couvera, plus elle s'allongera. La ligne ACB est plus courte que la ligne AEB, & que toute autre ligne possible AFB ou ADB, qui atteindra du point A au point B. (fig. 13.)

La ligne droite menée d'un point ou d'un terme à un autre, est donc la mesure précise de la distance. La ligne AB est la distance précise du point A au point B.

306. AXIOME III. *La position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.* Ensorte que si on connoît deux points A & C d'une ligne droite, on connoîtra aussi la position de la ligne entière ACB: puisque tous ses points vont nécessairement dans la direction des deux points connus A & C, fût-elle prolongée à l'infini de part & d'autre.

307. AXIOME IV. *Deux lignes droites ne peuvent avoir deux points communs.* Car si elles avoient deux points communs, elles auroient dès-lors la même position, & ne feroient plus qu'une seule & même ligne. Les deux lignes AB & AC, rapprochées tant qu'on voudra, n'ont de point commun que le point A, tant qu'elles sont deux lignes. (fig. 21.)

DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

308. HYPOTHESE. Si une ligne droite CA, immobile au point C & mobile au point A, est supposée faire une révolution autour du point C; il est clair que l'extrémité A décrira une courbe dont tous les points seront également distans du point C. (fig. 18.)

C'est l'image du compas, dont une pointe immobile est fixée sur un point, tandis que l'autre pointe mobile tourne autour de ce point. L'ouverture du compas représente la ligne CA, ou la ligne CD. De-là les définitions & les corollaires suivans,

DÉFINITIONS GÉNÉRALES.

309. DÉFINITION I. La courbe décrite par la pointe mobile du compas, s'appelle *circonférence*. L'espace compris entre la circonférence, s'appelle *cercle*. Le point également éloigné de tous les points de la circonférence, se nomme *centre*. Une ligne droite tirée du centre à un point quelconque de la circonférence, s'appelle *rayon*. Une ligne droite qui passe par le centre, & qui aboutit à deux points opposés de la circonférence, se nomme *diamètre*. (fig. 12 & 18.)

Si du même centre on décrit plusieurs circonférences MN, *mnelles* sont appellées *concentriques* : si les circonférences décrites MM, NN ont des centres différens, elles sont appellées *excentriques*. (fig. 11. & 12.)

310. DÉFINITION II. Toute portion de la circonférence, comprise entre deux rayons, s'appelle *arc de la circonférence*. Toute portion de la surface du cercle, comprise entre deux rayons & terminée par un arc, s'appelle *secteur de cercle*. Toute ligne droite qui passe par les extrémités d'un arc, s'appelle *corde*. Quand une corde divise la surface du cercle en deux parties inégales ; la plus grande s'appelle le *grand segment* ; & la plus petite, le *petit segment*. (fig. 15.)

Ainsi EC ou AC est un *rayon* : ACB est un *diamètre* : le point C est le *centre* : EGF est un *arc* : CEGFC est un *secteur* : EF est une *corde* : EGFE est le *petit segment* : EFHE est le *grand segment*.

311. DÉFINITION III. Toute circonférence se divise en 360 parties égales, qu'on appelle *degrés* : chaque degré en 60 parties égales, qu'on appelle *minutes* : chaque minute peut se diviser encore en 60 parties égales, qu'on appelle *secondes* : chaque seconde, en 60 parties égales, qu'on appelle *tierces* : & ainsi de suite.

Le demi-cercle est de 180 degrés (fig. 5) : le *quart* de cercle, de 90 degrés (fig. 3). Par un degré, il ne faut pas entendre une grandeur absolue, mais seulement la trois-cents-soixantième partie de quelque circonférence que ce soit, grande ou petite.

DIVERS COROLLAIRES.

312. COROLLAIRE I. *Tous les rayons d'un cercle sont égaux* : puisqu'ils sont des lignes droites qui mesurent la distance du centre à la circonférence (305) ; laquelle distance est par-tout la même. Pareillement *tous les diamètres d'un cercle sont égaux* : puisqu'ils sont chacun le double du rayon. (fig. 15 & 18.).

313. COROLLAIRE II. *Dans deux cercles égaux, les rayons & les diamètres sont égaux* : puisqu'ils mesurent des grandeurs ou des distances égales ; savoir, dans l'un & dans l'autre cercle, la distance du centre à la circonférence, ou le double de cette distance.

314. COROLLAIRE II. *Une ligne droite ne peut pas couper une circonférence de cercle, en trois points*. Car trois points ont la même direction dans une ligne droite, & ne peuvent l'avoir dans une circonférence de cercle, ou chaque point s'écarte nécessairement de la direction des deux points qui le précèdent, (308).

315. COROLLAIRE IV. *Deux points ne suffisent pas pour déterminer la position d'une circonférence* : puisqu'une circonférence peut avoir deux points communs, & avec une ligne droite, & avec une autre circonférence, qui la coupent. Les points A & B sont communs & à la ligne droite AB & aux deux circonférences excentriques MM & NN. (fig. 11.)

Mais trois points suffisent pour déterminer la position d'une circonférence : puisque dans une même circonférence, la courbure est la même dans tous les points ; & que tous les points sont également distans d'un centre commun. (fig. 15.)

Par exemple , dans le cercle AGBHC , on conçoit & on voit avec évidence , qu'il n'y a que le point C qui soit également distant de tous les points de la circonférence. Car le point *m* est plus près de A que de B ; & le point *n* est plus près de H que de G ; & ainsi du reste.

Par conséquent en connoissant dans cette circonférence , la position de trois points quelconques A , E , G , relativement au centre C ; on connoîtra la position de tous les autres points de la même circonférence , lesquels s'infléchissent tous de la même manière que les trois points connus ; étant tous éloignés du centre C , autant précisément que les trois points connus.

316. COROLLAIRE V. *Le diamètre est la plus longue de toutes les cordes : puisque le diamètre est égal à deux rayons , & qu'aucune autre corde n'est égale à deux rayons. (fig. 15.)*

Soient tirés les deux rayons CE , CF : le diamètre est égal à ces rayons pris ensemble (312). Or ces deux rayons sont plus grands que la corde EF : puisque EF est une ligne droite ; & que ECF est une ligne coudée. La ligne coudée ECF est égale au diamètre : donc la ligne droite EF , ou telle autre qu'on voudra prendre dans le cercle , est plus courte que le diamètre (305). Donc le diamètre est plus grand qu'aucune autre corde du même cercle.

317. COROLLAIRE VI. *Tous les diamètres partagent & la surface & la circonférence du cercle , en deux parties égales.* Car le diamètre étant la plus grande de toutes les cordes , il soutient le plus grand de tous les arcs , qui est la demi-circonférence ; & le plus grand de tous les segmens , qui est le demi-cercle. Par exemple , la corde EF soutient l'arc EGF , & le segment EFG ; mais le diamètre AB soutient la demi-circonférence AGB , & le demi-cercle ACBGA.

Si l'on conçoit que la partie supérieure AGBCA de la circonférence & du cercle soit renversée sur la partie inférieure AHBCA ; il est clair que le point G tombera sur le point H ; que tous les autres points de la partie supérieure tomberont sur des points correspondans de la partie inférieure ; & que ces deux parties , renversées l'une sur l'autre , quadreront entre elles dans tous leurs points correspondans : d'où il résulte que ces deux parties sont égales en tout. Cette manière de démontrer l'égalité de deux figures, s'appelle la *preuve de superposition*. (10.)

318. COROLLAIRE VII. *Dans un cercle , les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales.* Car placez par la pensée les deux arcs égaux EGF & MHN, l'un sur l'autre : les deux derniers points des arcs , deviennent les deux points qui terminent leurs cordes ; donc ces cordes sont égales. Donc si deux arcs quelconques d'un même cercle , sont égaux ; leurs cordes sont aussi égales. (fig. 15.)

319. COROLLAIRE VIII. *Dans un cercle , les cordes égales soutiennent des arcs égaux.* Car placez de même par la pensée les deux cordes égales EF & MN, l'une sur l'autre : les points qui les terminent sont les deux derniers points des arcs qu'elles soutiennent ; & tous les points suivans de l'un de ces arcs , sont nécessairement posés sur les points correspondans de l'autre arc ; puisque la courbure de la circonférence est partout la même. Donc les cordes étant égales , les arcs qu'elles soutiennent sont aussi égaux.

PROBLÈME I.

320. *Trouver une ligne droite ; dont chaque point séparément pris , soit à égale distance de deux points donnés , tels que A & B.* (fig. 6.)

SOLUTION I. Des deux points donnés A & B, pris

pour centres , décrivez d'une même ouverture de compas , qui forme des cercles égaux , deux arcs DRG & DSC qui se coupent en deux points D & C. Le point D sera également éloigné de A & de B : puisqu'il en sera éloigné d'un rayon DA ou DB de deux cercles égaux. Le point C sera aussi également éloigné de A & de B ; par la même raison.

Maintenant tirez une ligne droite , du point D au point C. Chaque point de cette ligne , séparément pris , sera à égale distance de A & de B ; puisqu'il est évident que tous les autres points de cette ligne DMC , ont la même direction que les deux points connus D & C (306) ; & que si d'un point quelconque *m* ou *n* de cette ligne on porte une ouverture de compas en A , cette même ouverture de compas ira atteindre le point B.

SOLUTION II. Des deux points donnés A & B , pris pour centres , décrivez deux arcs H , qui se coupent en un point H : le point d'intersection H sera également éloigné de A & de B ; puisqu'il en sera éloigné de la longueur du rayon HA ou HB , qui sont des rayons de cercles égaux.

Ensuite , des deux mêmes points donnés A & B , décrivez d'une même ouverture de compas , égale ou inégale à la précédente , deux arcs F ou G , qui s'entrecoupent : le point d'intersection F ou G , sera également éloigné de A & de B ; puisqu'il en sera éloigné d'un rayon de deux cercles égaux.

Maintenant menez une ligne du point H au point F ou G : chaque point de cette ligne séparément pris , sera à égale distance de A & de B ; & si elle étoit prolongée à l'infini , elle passeroit par tous les points également distans de A & de B. (306.)

On voit par cette opération , qu'on peut prendre les deux points également distans de A & de B , & qui doivent donner la direction de la ligne indéfinie HDMCG , ou tous les deux du même côté FG , ou

l'un au-dessus & l'autre au-dessous des deux points donnés : pourvu que chacun des deux points D & C, ou D & H, ou H & F, soit pris avec une même ouverture de compas, qui puisse donner les rayons égaux $HA = HB$, $DA = DB$, $CA = CB$, $GA = GB$. Car alors chaque point particulier de la ligne DMCK, indéfiniment prolongée de part & d'autre, sera éloigné du point A & du point B, de la longueur d'un rayon de deux cercles égaux. C. Q. F. D.

On démontrera de la même manière, que tous les points de la ligne *hmfgk*, sont chacun également éloignés des points *a* & *b*.

321. REMARQUE. La solution de ce problème apprend à *couper une ligne droite en deux parties égales*. La ligne AMB est coupée en deux parties égales au point M : puisque ce point M, en tant qu'appartenant à la ligne DC, est également distant & de l'extrémité A & de l'extrémité B de la ligne AMB ; comme on le voit par l'opération & par la démonstration précédente.

La solution du problème précédent, va servir à résoudre le problème suivant, qui est l'un des plus importants problèmes de toute la géométrie.

PROBLÈME FONDAMENTAL.

322. *Faire passer une circonférence par trois points donnés qui ne soient pas en ligne droite, tels que sont les points ABC. (fig. 17.)*

SOLUTION. Par le problème précédent, tirez la ligne droite EF, dont chaque point séparément pris soit à égale distance des deux points A & B : tirez ensuite la ligne droite GH, dont chaque point séparément pris soit également distant des deux points B & C. Le point R, dans lequel ces deux lignes se couperont, sera le centre du cercle : en sorte que si du point R & de l'intervalle RA on décrit une circonférence, elle passera par les trois points donnés A, B, C.

DÉMONSTRATION. Le cercle n'ayant qu'un seul point également éloigné de tous les points de la circonférence (315); trouver ce point, c'est résoudre le problème. Or je démontre que le *point d'intersection* de ces deux lignes, est un point également éloigné des trois points donnés; & par-là même, également éloigné de tous les points de la circonférence. Car,

I°. Le point R, en tant qu'il appartient à la ligne EF, est également éloigné de A & de B: puisque par la construction, chaque point de cette ligne EF est également distant de A & de B.

II°. Le point R, en tant qu'il appartient à la ligne GH, est également distant de B & de C: puisque par la construction, chaque point de cette ligne GH est également distant de B & de C.

Maintenant, puisque la distance RA est égale à la distance RB; puisque la distance RC est égale à la même distance RB; donc $RA = RC$. Donc le point d'intersection R est le centre d'un cercle dont la circonférence passeroit par les trois points donnés A, B, C. Donc si une ligne RA ou RB ou RC, menée du point d'intersection à l'un des points donnés, est supposée faire une révolution sur le point R; l'extrémité mobile A de cette ligne décrira une courbe (308) qui passera par les trois points donnés, & qui sera la circonférence d'un cercle. C. Q. F. D.

323. REMARQUE. Dans la solution & dans la démonstration de ce problème, nous supposons que les trois points donnés sont dans un plan, par exemple, sur une feuille de papier, ou dans une plaine. Nous ferons voir ailleurs que trois points quelconques, par exemple, les centres de la terre, du soleil & de la lune, sont toujours nécessairement dans un plan (530): ainsi cette solution & cette démonstration sont générales.

Les trois centres de la terre, du soleil & de la lune

étant supposés dans un plan indéfini, en A, en B, en C; si on tire par la pensée les lignes EF, GH, leur point R d'intersection fera le centre d'un cercle dont la circonférence passeroit par les trois centres A, B, C, de la terre, du soleil, de la lune.

324. DÉFINITION. Si sur une ligne indéfinie AB, prolongée s'il le faut, on prend deux points quelconques A & B; & qu'on mene une ligne DM ou DC, dont tous les points séparément pris soient à égale distance des points A & B; cette ligne DM ou DC fera une perpendiculaire à la ligne AB. (fig. 6.)

325. COROLLAIRE. Étant donnés trois points M, N, R, qui ne soient pas en ligne droite; on pourra aussi faire passer une circonférence circulaire par ces trois points, en cette manière. (fig. 14.)

Tirez une ligne droite, du point M au point N; & une autre ligne droite, du point N au point R. Après quoi, coupez en deux parties égales la ligne MN, par une perpendiculaire aC (321); coupez de même en deux parties égales la ligne NR, par une autre perpendiculaire bC. Ces deux lignes convergentes s'entre-couperont plus ou moins loin en un point C; & ce point d'intersection sera le centre d'un cercle, dont la circonférence passeroit par les trois points donnés.

C'est une suite évidente des deux problèmes que nous venons de résoudre & de démontrer. La ligne qui décrira cette circonférence, sera une ligne menée du point d'intersection C, à l'un des points donnés.

Souvent on connoît la circonférence d'un cercle; sans connoître où est le centre de cette circonférence; le problème suivant apprendra à le trouver.

P R O B L È M E I I I.

326. Trouver le centre d'une circonférence ou d'un arc donné. (fig. 17.)

SOLUTION. Prenez sur cet arc ou sur cette circonférence, trois points quelconques, A, B, C. Cherchez par le problème précédent le centre d'un cercle, dont la circonférence passe par ces trois points, A, B, C: ce centre R sera le centre cherché, comme il conste par la démonstration du problème fondamental.

ARTICLE SECOND.

POSITION RESPECTIVE DES LIGNES.

327. OBSERVATION. **D**eux lignes droites, comparées l'une avec l'autre, peuvent être ou *parallèles*, ou *perpendiculaires*, ou *obliques*. Quand on considère les lignes relativement au cercle, il y en a qu'on nomme *tangentes*, il y en a qu'on nomme *sécantes*. De-là l'objet des définitions suivantes.

DIVERSES DÉFINITIONS.

328. DÉFINITION I. On appelle *lignes parallèles*, deux lignes droites qui sont également éloignées l'une de l'autre dans tous leurs points correspondans : ou deux lignes droites, qui posées sur un plan & prolongées à l'infini, ne se rencontreroient jamais. Hh, Dd, Nn, sont trois lignes parallèles. (fig. 28.)

329. DÉFINITION II. On appelle *perpendiculaire*, une ligne droite qui tombe sur une autre sans pencher plus d'un côté que d'un autre ; ou plutôt, en ne penchant d'aucun côté (324). La ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB. (fig. 24.)

330. DÉFINITION III. On appelle *oblique*, une ligne droite, qui en tombant sur une autre, penche plus

d'un côté que d'un autre. La ligne CA ou CN est oblique à la ligne AB. (*fig. 24.*)

331. DÉFINITION IV. On appelle *tangente*, une ligne droite qui touche une circonférence, & qui prolongée au-delà du point de contact, ne la couperoit pas. La ligne BA est tangente en A. (*fig. 37.*)

332. DÉFINITION V. On appelle *sécante*, une ligne droite tirée ou d'un point pris hors de la circonférence, dans le cercle; ou d'un point pris dans le cercle, au-delà de la circonférence. La ligne Nn est une sécante (*fig. 28*) : CNA est une autre sécante. (*fig. 38.*)

333. REMARQUE. Les lignes, par leur rencontre, forment des angles, qu'il faut connoître & mesurer. Or pour connoître & pour mesurer ces angles formés par les différentes lignes que nous venons de définir, il faut les considérer comme placés ou au centre ou à la circonférence d'un cercle : de-là les deux paragraphes suivans, qui vont diviser cet article.

PARAGRAPHE PREMIER.

L'ANGLE AU CENTRE D'UN CERCLE.

334. HYPOTHESE. Si le rayon CA, immobile au point C, est supposé décrire une circonférence par son extrémité A, & laisser par-tout dans sa révolution des traces ou des lignes AC, BC, DC, FC; deux de ces traces ou de ces lignes intercepteront un *espace*, laisseront une *ouverture*, auront entre elles une *inclinaison*, que l'on peut évaluer & comparer. De-là l'objet des définitions & des observations suivantes. (*fig. 18.*)

DIVERSES DÉFINITIONS.

335. DÉFINITION I. Cet *espace*, cette *ouverture*,
cette

cette *inclinaison plus ou moins grande*, que laissent entre eux deux rayons ou deux lignes AC & BC, s'appelle *angle*. Les rayons AC & BC, s'appellent *côtés* de l'angle. Le point C où les côtés se rencontrent, s'appelle *sommet* de l'angle. L'arc AB compris entre les côtés, & décrit du sommet C pris pour centre, s'appelle la *mesure* de l'angle. (*fig. 18.*)

Quand un angle est isolé (*fig. 21*), on le désigne par une seule lettre A ou *a* placée au sommet. Quand l'angle n'est pas isolé, on le désigne par trois lettres, & on place toujours au milieu la lettre qui est au sommet de l'angle. (*fig. 15.*)

I°. L'angle ACG ou BCH, mesuré par un arc qui est le quart de la circonférence, s'appelle *angle droit* : sa valeur est de 90 degrés.

II°. L'angle ACE ou ECG, mesuré par un arc moindre que le quart de la circonférence, s'appelle *angle aigu* : sa valeur est au-dessous de 90 degrés.

III°. L'angle ACF ou ECB, mesuré par un arc plus grand que le quart de la circonférence, s'appelle *angle obtus* : sa valeur passe 90 degrés.

336. COROLLAIRE. L'angle au centre d'un cercle, a pour mesure l'arc compris entre ses côtés. (*fig. 18.*)

DÉMONSTRATION. L'angle au centre d'un cercle étant formé par la révolution d'un rayon CA autour du centre immobile C; il est évident que l'angle quelconque ACB s'ouvre d'autant plus, que l'extrémité A du rayon fait plus de chemin & décrit un plus grand arc AB : que pour que cet angle devienne plus grand ou plus petit, d'un trois-cents-soixantième du cercle ; il faut que l'extrémité B du rayon qui le forme & le termine, avance ou recule d'un trois-cents-soixantième sur la circonférence : que si on diminue de moitié un angle quelconque BCD, on re-

tranchera nécessairement la moitié précise de son arc BD : & ainsi du reste.

On voit par-là , que pour évaluer un angle , il faut le supposer placé au centre d'un cercle , ou le comparer avec un angle placé au centre d'un cercle. Par exemple , pour évaluer l'angle CAB (fig. 21) il faut décrire à une distance quelconque du sommet A , une circonférence ou un arc BC ; & examiner quelle partie de la circonférence entière est l'arc BC. Cette circonférence étant supposée de 360 parties égales , si l'arc BC en contient 12 & demi , l'angle BAC sera un angle de 12 degrés 30 minutes. Tous les angles sont ou droits , ou obtus , ou aigus. (fig. 15 & 18.)

I°. *Tous les angles droits sont égaux* : puisqu'ils ont tous pour mesure 90 degrés , ou le quart de la circonférence.

II°. *Mais les angles obtus ne sont pas tous égaux* : un angle obtus de 179 degrés sera plus grand qu'un angle obtus de 91 degrés.

III°. De même , *les angles aigus ne sont pas tous égaux* : un angle aigu de 89 degrés sera plus grand qu'un angle aigu de 2 degrés.

IV°. *Deux angles égaux , qui ont leur sommet au centre d'un cercle , sont appuyés sur des arcs égaux* : puisque ces angles BCF & ACE , par exemple (fig. 30) , étant égaux , par l'hypothèse , ils ont une même ouverture ; & que cette ouverture prise de part & d'autre à l'extrémité des rayons qui forment leurs côtés , est mesurée par des cordes égales (305) , qui soutiennent nécessairement des arcs égaux. (319.)

A l'occasion des angles obtus & des angles aigus , on distingue des complémens & des supplémens d'angles & d'arcs , qu'il faut aussi connoître. (fig. 19.)

337. DÉFINITION II. Le *complément d'un angle aigu* , est ce qu'il faut ajouter à cet angle , afin que la somme soit égale à un angle droit. Le *complément d'un angle*

obtus, est ce qu'il lui faut retrancher, afin qu'il reste égal à un angle droit. L'angle CBE est le complément de l'angle aigu ABE. L'angle CBE est le complément de l'angle obtus DBE.

338. DÉFINITION III. Le *supplément d'un angle*, est ce qu'il faut ajouter à cet angle, afin que la somme soit égale à deux angles droits. L'angle EBA est le supplément de l'angle DBE. De même l'angle DBE est le supplément de l'angle EBA. (fig. 19.)

339. REMARQUE. Il en est de même des arcs. Le *complément d'un arc* correspondant à un angle aigu, est ce qu'il faut lui ajouter, pour qu'il soit égal au quart de la circonférence. Le complément d'un arc correspondant à un angle obtus, est ce qu'il lui faut retrancher, pour qu'il n'ait que le quart de la circonférence. De même le *supplément d'un arc* est ce qu'il faut lui ajouter pourqu'il soit égal à la demi-circonférence. L'arc AE est le complément de l'arc CE, & le supplément de l'arc DCE.

T H É O R È M E.

340. Les arcs de différentes circonférences concentriques, compris entre les mêmes rayons, sont semblables & contiennent un même nombre de parties semblables de la circonférence. (fig. 18.)

DÉMONSTRATION. C'est une suite de l'hypothèse précédente (334). Car tandis que le rayon CA, dans sa révolution, décrit par le point A, l'arc AB; on conçoit que ce même rayon décrira par le point a, l'arc ab.

Il est donc évident que le point A & le point a du même rayon, doivent opérer les mêmes divisions dans les circonférences concentriques qu'ils décrivent. Il est donc évident que les arcs AB & ab, interceptés entre les mêmes rayons, renferment un même nombre de parties semblables de la circonférence, ou un

même nombre de degrés, de minutes, de secondes, de la circonférence. Donc si le grand rayon CA , dans une partie de sa révolution, embrasse des tiers, des quarts, des centièmes de la circonférence; le petit rayon Ca , dans la même partie de sa révolution, embrassera des tiers, des quarts, des centièmes de la circonférence. C. Q. F. D.

341. COROLLAIRE. *Donc chacun de ces arcs semblables AB ou ab , peut être indifféremment pris pour mesure de l'angle ACB .*

DÉMONSTRATION. Puisque chacun de ces arcs contient un même nombre de degrés, de minutes, de secondes, de parties semblables; chacun d'eux est propre pour mesurer l'ouverture ou l'inclinaison des lignes CA , CB ; laquelle ouverture ou inclinaison est la même dans toute la longueur de ces lignes. Donc pour mesurer l'angle ACB , on peut prendre indifféremment l'arc AB , ou l'arc ab .

Une grande circonférence a des degrés plus grands, une petite circonférence a des degrés plus petits: mais l'une & l'autre ont le même nombre de degrés. C'est ainsi que deux boules d'inégale grandeur, ont le même nombre de moitiés, de tiers, de quarts, de centièmes, de millièmes: mais les moitiés de l'une sont plus grandes que les moitiés de l'autre, & ainsi des autres parties semblables. C. Q. F. D.

PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES.

THÉORÈME I.

342. *Une ligne droite tombant sur une autre ligne droite, forme deux angles, qui pris ensemble sont égaux à deux angles droits. (fig. 10.)*

DÉMONSTRATION. Soit la ligne AC , qui tombe sur

la ligne DE. Les deux angles qu'elle forme ont pour mesure la demi-circonférence, & égalent deux angles droits. Car si du point C on décrit une circonférence, la ligne DE qui contient le centre, en fera le diamètre; & par conséquent elle coupera la circonférence en deux parties égales (317). Or l'arc AD est la mesure de l'angle ACD : l'arc AE est la mesure de l'angle ACE : donc ces deux angles pris ensemble, sont égaux à deux angles droits; puisqu'ils embrassent la demi-circonférence. Par conséquent (fig. 19) :

I°. *La perpendiculaire, en tombant sur une autre ligne, forme deux angles droits* : puisque les deux angles CBD & CBA qu'elle forme, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits; & que la perpendiculaire CB ne penchant pas plus d'un côté que de l'autre, il est clair que les deux angles qu'elle forme, sont nécessairement égaux entre eux.

II°. *Une ligne ne peut être perpendiculaire à une autre ligne, que cette seconde ne soit aussi perpendiculaire à la première.* Si la ligne AB est perpendiculaire sur la ligne CD; la ligne CD est aussi perpendiculaire sur la ligne AB. (fig. 24.) C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

343. *Les angles opposés au sommet, sont égaux.* (fig. 20.)

DÉMONSTRATION. Du point d'intersection des deux lignes qui forment ces angles, décrivez une circonférence : elle sera coupée en deux parties égales par les lignes AB, DE; puisqu'elles en sont les diamètres.

I°. L'angle ACE, augmenté de l'angle ECB, vaut deux angles droits : puisque les deux ensemble embrassent un demi-cercle.

II°. L'angle DCB, augmenté du même angle ECB,

vaut aussi deux angles droits : puisque les deux ensemble embrassent aussi un demi-cercle.

III°. Maintenant retranchez à ces deux demi-cercles égaux, la partie qui leur est commune ; savoir, l'angle ECB : à des tous égaux, vous ôtez des parties égales ; donc les restes de ces tous sont égaux. Or les restes de ces tous, sont l'angle ACE, & l'angle DCB, opposés au sommet : donc les angles opposés au sommet sont égaux.

IV°. On peut démontrer de la même manière que l'angle ACD & l'angle ECB, opposés au sommet, sont égaux ; donc il est évident que les angles opposés au sommet sont toujours & par-tout égaux. C. Q. F. D.

PROBLÈME I.

344. *Faire sur une ligne donnée ab, un angle égal à un autre donné ; tel que CAB. (fig. 21.)*

SOLUTION. Du sommet de l'angle donné CAB, décrivez un arc CB entre ses deux côtés. Ensuite de l'extrémité *a* de la ligne donnée, & de la même ouverture du compas, décrivez un arc indéfini, tel que *bD* ; sur lequel vous prendrez avec le compas la partie *bc*, égale à l'arc BC. Tirez ensuite une ligne du point *a* au point *c* : elle formera l'angle *cab*, égal à l'angle donné CAB.

Ces deux angles sont égaux : puisqu'ils ont pour mesure les arcs égaux BC & *bc* ; & que la grandeur des angles dépend de la grandeur des arcs qui mesurent leur ouverture dans un même cercle, ou dans des cercles égaux. C. Q. F. D.

345. REMARQUE. Les Géomètres nomment *rappeur*, un demi-cercle de cuivre ou de corne transparente, exactement divisé en degrés & en demi-degrés, qui se trouve dans les étuis de mathématique, & qui leur sert à prendre les ouvertures des angles, & à les rap-

porter du graphometre sur le papier. Voici comment on se fert de cet instrument, pour tracer sur le papier, des angles égaux à des angles donnés ou trouvés. (*fig. 9.*)

I°. Sur une feuille de papier ou sur un plan quelconque PPP, on tire une ligne indéfinie AB; & sur le point quelconque C de cette ligne, qu'on veut prendre pour sommet de l'angle, on place le centre de cette demi-circonférence ADB, dont la section en ligne droite doit être placée sur la ligne indéfinie qu'on vient de tirer.

II°. On prend ensuite sur cette demi-circonférence, un arc égal à l'arc de l'angle donné; & on marque sur le papier placé au-dessous, le point *m* ou *n* de la demi-circonférence, qui termine un arc égal à l'arc de l'angle donné.

III°. Enfin du point C de la ligne, pris pour centre, on mene une ligne droite au point trouvé *m* ou *n* par le moyen du rapporteur; & on a un angle *mCB*, égal à l'angle donné: puisque ces deux angles ont pour mesure des arcs égaux.

P R O B L È M E I I.

346. *Cauper un angle en deux parties égales.*
(*fig. 22.*)

SOLUTION. Du point A, comme centre, décrivez l'arc BC. Ensuite des deux points B & C, pris pour centres, décrivez avec la même ouverture du compas, deux arcs qui se coupent en un point comme D. Enfin tirez une ligne droite, du point A au point D: elle coupera l'angle en deux parties égales. Car la ligne AD a chacun de ses points, séparément pris, également éloigné du point B & du point C (320): donc le point N de cette ligne qui passe dans l'arc coupé, est également éloigné du point C & du point B: donc

l'arc est coupé par cette ligne en deux parties égales : donc l'angle BAC, dont cet arc est la mesure, est aussi coupé en deux parties égales.

THÉORÈME III.

347. *On ne peut tirer qu'une seule perpendiculaire, d'un même point, sur une ligne donnée. (fig. 25.)*

DÉMONSTRATION. Soit la ligne DC, perpendiculaire à la ligne AB. Si du point D, on pouvoit tirer une seconde perpendiculaire sur la ligne AB; il faudroit que cette nouvelle perpendiculaire passât ou à droite ou à gauche de la perpendiculaire tirée DC : & alors elle tomberoit sur la ligne AB, en penchant d'un côté ou de l'autre sur cette ligne, ou en ne formant pas deux angles droits sur cette ligne; ce qui est contre l'essence de la perpendiculaire (329 & 342). Donc d'un même point, on ne peut tirer qu'une seule perpendiculaire sur une ligne donnée. C. Q. F. D.

THÉORÈME IV.

348. *La perpendiculaire est plus courte que l'oblique tirée du même point sur la même ligne. (fig. 24.)*

DÉMONSTRATION. Soit la ligne CD, perpendiculaire sur la ligne AB : je dis que la ligne CD est plus courte que la ligne CB. Pour le démontrer, il faut prolonger la perpendiculaire jusqu'au point H, en sorte que HD soit égal à CD; & tirer l'oblique HB, égale à l'autre oblique CB.

Cela posé, je raisonne ainsi. La ligne droite CDH est plus courte que la ligne brisée CBH (305) : donc la moitié de la ligne droite, est plus courte que la moitié de la ligne brisée : donc la perpendiculaire est plus courte que l'oblique. Ce que nous avons dit de

l'oblique CB, on peut le dire de toute autre oblique CN plus ou moins éloignée de la perpendiculaire. C. Q. F. D.

349. COROLLAIRE I. *La perpendiculaire est la ligne la plus courte qu'on puisse mener d'un point donné, sur une ligne, prolongée s'il le faut: puisqu'elle est plus courte que toutes les obliques quelconques.*

350. COROLLAIRE II. *De toutes les obliques, tirées d'un même point sur une ligne donnée, la plus éloignée de la perpendiculaire, est la plus longue.* L'oblique CA est plus longue que l'oblique CN. (fig. 24.)

351. DÉFINITION. On nomme *éloignement de perpendiculaire*, la partie DN ou DA ou DB d'une ligne, qui se trouve comprise entre la perpendiculaire CD & une oblique.

352. COROLLAIRE III. *Si deux obliques CA & CB, tirées d'un même point C, ont le même éloignement de perpendiculaire; elles sont également inclinées sur la ligne AB: & si elles sont également inclinées sur la ligne AB, elles ont le même éloignement de perpendiculaire.*

La raison en est évidente, par la preuve de superposition. Car renversez par la pensée, la ligne BD sur la ligne DA: Si $BD = DA$; le point B tombera sur le point A: tous les points de la ligne coudée DBC, tomberont sur les points correspondans de la ligne coudée DAC.

THÉORÈME V.

353. *Une droite est perpendiculaire à une autre droite, quand deux points quelconques de la première sont chacun également éloignés de deux points quelconques de la seconde.* (fig. 24.)

DÉMONSTRATION. 1°. Si la ligne CD a deux points quelconques C & D, qui soient chacun également

éloignés de A & de B ; il est clair que les deux points C & D ne penchent pas plus vers A que vers B ; & que comme deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite (306), toute la droite CDH, indéfiniment prolongée, ne penche pas plus vers A que vers B : de sorte que *si la droite CD étoit prolongée à l'infini, elle passeroit par tous les points également éloignés de A & de B.* (320.)

II°. Une ligne oblique quelconque CB ne peut jamais avoir deux points également éloignés de deux points quelconques de la ligne AB. Car il est évident par la seule inspection de la figure, que si dans la ligne CB, le point C est également éloigné de A & de B, les points suivans *m* ne peuvent plus être dans le même cas. Donc une ligne droite, qui a deux de ses points chacun également éloignés de deux points d'une autre ligne, n'est point oblique : donc elle est perpendiculaire. C. Q. F. D.

PROBLÈME III.

354. *D'un point quelconque C donné dans une ligne, élever ou tirer une perpendiculaire sur cette ligne.* (fig. 25.)

SOLUTION. Du point C, comme centre, décrivez une demi-circonférence qui coupe la ligne AB en deux points E & F ; & de ces deux points pris pour centres, décrivez avec une même ouverture du compas, des arcs qui se coupent en un point tel que D. Ensuite tirez une ligne droite qui passe par le point donné C, & par le point d'intersection des deux arcs D : elle sera perpendiculaire à la ligne donnée.

Il est évident que la ligne tirée DC, est perpendiculaire à la ligne donnée AB : puisqu'elle a deux points (savoir le point donné & le point d'intersection), également distans des deux points E & F de la ligne

donnée. Par conséquent tous les autres points de la ligne tirée DC, sont également distans des deux points E & F de la ligne donnée (320) : par conséquent encore, la ligne CD est perpendiculaire à la ligne donnée AB, (353.)

PROBLÈME IV.

355. *D'un point quelconque C donné hors d'une ligne, abaisser ou tirer une perpendiculaire sur cette ligne. (fig. 26.)*

SOLUTION. Du point C, comme centre, décrivez un arc qui coupe la ligne donnée en deux points, tels que E & F. Ensuite du point E & du point F, décrivez de la même ouverture du compas, deux arcs qui se coupent en un point tel que D. Enfin tirez une ligne droite DC, qui passe par le point donné & par le point d'intersection des deux arcs : elle sera perpendiculaire à la ligne donnée; puisqu'elle a deux points également éloignés du point E & du point F de la ligne donnée. (353.)

Si la ligne donnée NE étoit trop courte pour être coupée en deux points, par l'arc que nous avons dit de tirer; il faut la prolonger de telle sorte qu'elle puisse être coupée en deux points E & F.

LIGNES PARALLELES,

356. AXIOME. *Quand deux lignes sont parallèles entre elles; si une troisième ligne est parallèle à l'une des deux, elle le sera aussi à l'autre.* Car cette troisième ligne Nn ne peut être par-tout également éloignée de l'une des deux parallèles Hh & Dd, qu'elle ne soit aussi par-tout également éloignée de l'autre. (fig. 28.)

357. REMARQUE. Nous appellerons ici *sécante*, une ligne soit perpendiculaire, soit oblique, qui coupe

des parallèles : EF est une sécante. (fig. 27.)

La sécante forme avec les parallèles , plusieurs angles qu'il faut remarquer. Les uns sont entre les parallèles ; on les nomme *angles internes* : tels sont les angles A , B , C , D. Les autres sont hors des parallèles ; on les nomme *angles externes* : tels sont les angles G , H , au-dessus ; & les angles O , P , au-dessous des parallèles.

En comparant les angles soit internes, soit externes, deux à deux ; il y en a qu'on appelle *alternes* : ce sont ceux dont l'un est dans la partie supérieure & l'autre dans l'inférieure , l'un à droite & l'autre à gauche de la sécante. Par exemple , Les angles A , D , sont *alternes-internes* , aussi-bien que les deux autres B , C. Pareillement les deux angles H , O , sont *alternes-externes* , de même que les deux autres G , P.

THÉORÈME I.

358. *Deux angles formés par deux parallèles , dont l'un est externe & l'autre interne du même côté de la sécante , & qui sont ou tous les deux au-dessus , ou tous les deux au-dessous des parallèles , sont égaux. (fig. 27.)*

DÉMONSTRATION. I°. La grandeur des angles dépend de leur l'ouverture ; & leur ouverture , de l'inclinaison des lignes qui les forment. Or il est clair que les lignes IL & MN ont nécessairement dans le même sens & du même côté , une même inclinaison sur la sécante EF : puisqu'elles sont parallèles. Donc l'ouverture ou l'inclinaison de ces lignes est égale en H & en D ; en G & en C ; en B & en P ; en A & en O. Mais ces ouvertures sont les angles énoncés dans le théorème : donc ces angles sont égaux.

II°. On peut encore démontrer & rendre sensible la vérité de ce théorème par la *preuve de superposition* (10), en cette manière. Concevez que la ligne MN ,

restant toujours parallèle à elle-même , coule le long de la sécante , jusqu'à ce qu'elle se trouve placée toute entière sur sa parallèle IL. Alors l'angle D se confondra avec l'angle H ; l'angle P , avec l'angle B ; l'angle C , avec l'angle G ; l'angle O , avec l'angle A. Donc ces angles sont respectivement égaux avant la superposition : puisqu'ils le sont dans la superposition qui ne change en rien la position des lignes qui les forment. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

359. Si deux lignes parallèles sont coupées par une sécante : 1°. les angles alternes-internes sont égaux. 2°. Les angles alternes-externes sont égaux. 3°. Les deux angles internes du même côté de la sécante , pris ensemble , valent deux angles droits. (fig. 27.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux parallèles IL , & MN , coupées par la sécante EF.

I°. Les angles *alternes-internes* A & D , sont égaux. Car l'angle A est égal à l'angle H : parce qu'ils sont opposés au sommet (343). L'angle D est aussi égal à l'angle H : puisqu'ils ont la même ouverture formée par l'égale inclinaison des deux parallèles sur la sécante (358). On démontre de même que les deux *alternes-internes* B , C , sont égaux : parce que chacun d'eux est égal à l'angle G.

II°. Les angles *alternes-externes* G , P , sont égaux. Car l'angle G , est égal à l'angle B : parce qu'ils sont opposés au sommet. L'angle P est aussi égal à l'angle B : puisqu'ils sont formés l'un & l'autre par la même inclinaison des parallèles sur la sécante. On prouve de même que les deux angles *alternes-externes* H , O , sont égaux : parce que chacun d'eux est égal à l'angle A.

III°. Les deux angles internes B & D , du même côté de la sécante , valent ensemble deux angles droits.

Car les deux angles collatéraux H, B , pris ensemble valent deux angles droits (342) : donc si à la place de l'angle H , on prend l'angle D qui lui est égal ; la somme des angles B, D , vaudra aussi deux angles droits. On fait voir de la même manière, que les deux angles internes A, C , valent ensemble deux angles droits : parce que les deux angles G, A , valent deux angles droits. C. Q. F. D.

THÉORÈME III.

360. *Deux lignes sont parallèles, si les angles alternes-internes sont égaux. (fig. 27.)*

DÉMONSTRATION. Soit l'angle A , égal à l'angle D ; par la supposition. Je démontre que les deux lignes IL, MN , sont parallèles. L'angle A est égal à l'angle H : puisqu'ils sont apposés au sommet. L'angle H & l'angle D sont égaux : puisqu'ils sont égaux chacun à un troisième, qui est l'angle A .

Or l'angle D & l'angle H ne peuvent être égaux, sans que les lignes IL & MN soient parallèles. Car si l'une de ces deux lignes étoit plus ou moins inclinée que l'autre sur la sécante ; les angles D & H qu'elles forment sur cette sécante, du côté du point E , seroient nécessairement inégaux. Or, on vient de démontrer que l'angle H & l'angle D sont égaux : donc les deux lignes IL & MN sont également inclinées sur la sécante : donc elles sont parallèles. C. Q. F. D.

361. REMARQUE. On pourroit démontrer de même, que si les angles alternes-externes sont égaux, ou si les deux angles internes du même côté de la sécante valent deux angles droits, les lignes sont parallèles. La démonstration est précisément la même que la précédente.

THÉORÈME IV.

362. *Lorsque deux ou plusieurs parallèles sont coupées*

touchent une circonférence ; les arcs compris de part & d'autre entre les parallèles , sont égaux. (fig. 28.)

DÉMONSTRATION. Les parallèles étant par-tout également éloignées l'une de l'autre ; l'arc qu'elles embrassent d'un côté , doit être nécessairement égal à l'arc qu'elles embrassent de l'autre. Pour mieux sentir cette vérité ; du centre du cercle , tirez sur les trois parallèles la perpendiculaire AB , qui passe par le centre : renversez ensuite par la pensée la partie des parallèles qui est à la droite , sur la partie des mêmes parallèles qui est à la gauche de la perpendiculaire. Vous concevez que les arcs AD & DN qui sont à la droite , seront placés sur les arcs $A d$ & dn qui sont à la gauche : donc $AD = A d$; donc $DN = D n$; donc $NB = N b$; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

P R O B L È M E.

363. *Par un point quelconque donné C , tirer une parallèle à une ligne donnée AB. (fig. 29.)*

SOLUTION. Du point C , & avec une ouverture de compas prise à discrétion , tirez l'arc indéfini BD . Ensuite du point B , & avec la même ouverture du compas , décrivez l'autre arc AC ; & prenez avec le compas , sur le premier arc qui est indéfini , une partie BD égale à AC . Enfin tirez une ligne droite CD , qui passe par les deux points C & D : elle sera parallèle à AB .

La raison en est évidente. Car ayant tiré la ligne CB , vous trouverez que les angles alternes ABC & BCD sont égaux : puisqu'ils ont pour mesure les arcs égaux AC & BD . Or deux lignes sont parallèles , quand les angles alternes-internes sont égaux (360) : donc les deux lignes AB & CD sont parallèles. C. Q. F. D.

364. REMARQUE. L'équerre est un instrument de

l'étui de mathématiques , composé de deux règles perpendiculaires l'une à l'autre. Cet instrument ABC sert à tirer des perpendiculaires & des paralleles à une ligne donnée. (fig. 8.)

I°. Pour tirer, par le moyen de l'équerre, une perpendiculaire sur une ligne donnée ; placez une des règles de l'équerre le long de tous les points de la ligne donnée BN ; enforte que l'autre règle aboutisse au point A, d'où vous voulez mener la perpendiculaire. Ensuite tirez une ligne BM dans la direction de la règle AB qui est perpendiculaire à la première : cette ligne sera la perpendiculaire cherchée, formant deux angles droits sur la ligne donnée BN.

II°. Pour tirer une parallele à une ligne donnée ; élevez comme on vient de dire, une perpendiculaire sur cette ligne donnée BN. Ensuite placez une des règles de l'équerre le long de cette perpendiculaire BM ; & tirez une ligne dans la direction AO de l'autre règle de l'équerre parallele à la ligne donnée : cette ligne AO fera la parallele cherchée ; puisque ces deux lignes AO & BN forment sur leur perpendiculaire commune AB, deux angles droits.

P A R A G R A P H E S É C O N D.

L'ANGLE A LA CIRCONFÉRENCE.

365. DÉFINITION. **L'**ANGLE qui a son sommet au centre d'une circonférence, & qui est formé par deux rayons du cercle, s'appelle *angle au centre* : il a pour mesure l'arc compris entre ses côtés. (336.)

L'angle qui a son sommet appuyé à la circonférence d'un cercle, & qui est formé par deux cordes, s'appelle *angle inscrit*, ou *angle du segment* : nous allons apprendre à le mesurer.

THEOREME

THÉORÈME FONDAMENTAL.

366. *L'angle inscrit qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, & qui est formé par deux cordes, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

DÉMONSTRATION. Il peut arriver, ou qu'un des côtés de l'angle inscrit passe par le centre; ou que le centre soit entre les deux côtés; ou que le centre soit hors des deux côtés. Dans tous ces trois cas, que nous allons démontrer séparément, l'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. (fig. 30.)

I°. Si le côté AB de l'angle inscrit BAD, passe par le centre C; tirez par ce centre, la ligne EF, parallèle à l'autre côté AD (363). Vous aurez les deux angles BCF & BAD égaux: parce que les lignes EF & AD sont parallèles; & que ces deux angles sont du même côté de la sécante AB, le premier extérieur & l'autre intérieur (358). Or l'angle BCF ayant son sommet au centre, a pour mesure l'arc BF compris entre ses côtés (336): donc l'angle BAD qui lui est égal, a aussi pour mesure le même arc BF.

Il reste à faire voir que cet arc BF, est la moitié de BFD; & voici comment je le démontre. L'arc BF est égal à l'arc AE: parce que ces deux arcs sont la mesure de deux angles égaux BCF & ACE, qui sont opposés au sommet (336). Pareillement l'arc DF est égal au même arc AE: puisqu'ils sont compris entre deux parallèles EF, AD (362). Donc les deux arcs BF & DF sont égaux: donc ils sont chacun la moitié de l'arc entier BFD. Or on vient de démontrer que l'arc BF, est la mesure de l'angle BAD: donc cet angle BAD, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. Ainsi $BAD = CAD = BCF$.

II°. (fig. 31.) Si le centre est entre les deux côtés de l'angle BAD; tirez du sommet A, une ligne AF qui

passé par le centre C : elle divisera l'angle BAD en deux autres , savoir , BAF & FAD. Or le premier de ces angles , a pour mesure la moitié de l'arc BF : à cause de son côté AF , qui passe par le centre ; comme on vient de le démontrer dans le cas précédent. Par la même raison , l'autre angle FAD , a pour mesure la moitié de l'arc FD. Donc l'angle total BAD , a pour mesure la moitié de BF & la moitié de FD ; c'est-à-dire , la moitié de l'arc BD compris entre ses côtés.

III°. (fig. 32.) Si le centre est hors de l'angle & des deux côtés ; il faut tirer du sommet une ligne AF , qui passe par le centre. Cette ligne formera l'angle DAF , qui a pour mesure la moitié de l'arc FD ; ou la moitié de l'arc FB , avec la moitié de l'arc BD : comme il a été démontré dans le premier cas. Or l'angle FAB , qui est une partie de l'angle total DAF , a pour mesure la moitié de l'arc FB : à cause du côté AF qui passe par le centre. Par conséquent l'angle BAD , qui est l'autre partie de l'angle total , a pour mesure la moitié de BD : sans quoi l'angle total DAF n'auroit pas pour mesure la moitié de l'arc FB , plus la moitié de l'arc BD. Donc dans tous les cas possibles , l'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. C. Q. F. D.

DIVERS COROLLAIRES.

367. COROLLAIRE I. *L'angle au centre , appuyé sur le même arc que l'angle inscrit , est le double de cet angle inscrit.* (fig. 33.)

DÉMONSTRATION. La seule inspection de la figure fait voir & sentir que l'angle C est de beaucoup plus grand que l'angle A : puisque le premier a visiblement une beaucoup plus grande ouverture , que le second. L'angle BCD est deux fois plus grand que l'angle BAD : parce que l'angle qui a son sommet au

centre, a pour mesure l'arc entier BD , sur lequel il est appuyé; au lieu que l'angle qui a son sommet à la circonférence, n'a pour mesure que la moitié de ce même arc. $C. Q. F. D.$

368. COROLLAIRE II. *Un angle inscrit, qui est appuyé sur les deux extrémités du diamètre, est droit.* (fig. 34.)

DÉMONSTRATION. L'angle BAD ne peut être appuyé sur le diamètre BD , qu'il ne le soit aussi sur la demi-circonférence. Or, tout angle inscrit, appuyé sur la demi-circonférence est droit: parce qu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence, ou le quart de la circonférence. $C. Q. F. D.$

369. COROLLAIRE III. *L'angle inscrit BAE , appuyé sur un arc plus grand que la demi-circonférence, est obtus; & au contraire, l'angle BAF , appuyé sur un arc moindre que la demi-circonférence, est aigu. C'est une suite évidente de ce que nous venons de dire & de démontrer sur tout cet objet.* (fig. 35.)

LA TANGENTE AU CERCLE.

370. HYPOTHÈSE. Que la corde AB , restant toujours perpendiculaire au rayon CD , vienne à descendre parallèlement à elle-même jusqu'à l'extrémité D du rayon, & qu'elle devienne la ligne FE ; ce sera une tangente DE , ou DF , ou FDE . Il en sera de même, si la tangente, au lieu d'être placée à l'extrémité du rayon CD , est placée à l'extrémité d'un autre rayon quelconque. (fig. 36.)

DIVERS COROLLAIRES.

371. COROLLAIRE I. *La tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon: puisque par l'hypothèse, elle ne penche pas plus d'un côté que d'un autre sur le rayon.*

372. COROLLAIRE II. *La tangente ne touche le cercle qu'en un seul point. (fig. 36.)*

DÉMONSTRATION. Soient menées du centre C, les deux lignes Ca, Cb : ces deux lignes seront obliques sur la tangente FE. Donc ces deux lignes seront plus longues que le rayon, qui est perpendiculaire sur la tangente (348). Donc ces deux obliques ont leur extrémité b & a hors de la circonférence du cercle : puisqu'elles sont plus longues que le rayon, dont elles font partie, & qui se termine à la circonférence. Donc la tangente, qui touche l'extrémité de ces obliques Ca & Cb, ne touche point la circonférence ; qui est au-delà de l'extrémité de ces obliques, à quelque proximité du rayon qu'on les suppose.

On peut dire la même chose, de tout autre point de la circonférence, placé plus près du point D : donc la tangente ne touche la circonférence qu'au point B, & par conséquent qu'en un seul point. C. Q. F. D.

373. COROLLAIRE III. *Une sphere ne touche un plan que dans un point. (fig. 86.)*

DÉMONSTRATION. Comme une tangente ne touche un cercle que dans un point ; si la tangente RO est supposée faire une révolution autour de l'axe PR, restant toujours tangente ; elle décrira le plan RQR sur lequel porte le cercle PARB : & si ce même cercle est supposé faire une révolution sur son axe PR, axe toujours perpendiculaire au plan, il décrira une sphere qui ne touchera ce plan OQR qu'en un point ; savoir, au point R, où le cercle mobile est touché par la tangente. C. Q. F. D.

374. COROLLAIRE IV. *La tangente n'entre point dans le cercle : puisque par l'hypothese & selon la définition (370), elle touche le dernier point du rayon, sans pénétrer dans le cercle qui est terminé par ce dernier point D du rayon. (fig. 36.)*

375. COROLLAIRE V. *Entre le cercle & la tangente à ce cercle, on peut faire passer une infinité de lignes courbes différentes.* (fig. 23.)

DÉMONSTRATION. I°. Soit le rayon CD , perpendiculaire à la tangente AB : cette tangente ne touche le cercle DMD , qu'au point D . Il y a donc un espace entre la tangente, & tout autre point quelconque qui termine ce cercle ; par exemple, entre la tangente & les points a & b .

II°. Si d'un point M du rayon DC prolongé, avec un rayon MD , on décrit un nouveau cercle mDm ; la ligne AB sera encore tangente à ce cercle, & ne le touchera qu'en un seul point D . Il y aura donc encore un espace entre la tangente AB , & tout autre point que le point D du cercle mDm .

III°. Si d'un autre point N du même rayon prolongé, avec un rayon ND , on décrit un nouveau cercle nDn ; la ligne AB sera encore tangente à ce cercle, & ne le touchera qu'en un seul point D : tous les autres rayons de ce cercle étant trop courts pour atteindre cette tangente.

IV°. Si on prolonge à l'infini le rayon DC , & que de chaque point de la ligne DR infiniment prolongée, avec un rayon toujours terminé en D , on décrive une circonférence de cercle ; chaque circonférence rDr , sera différente ; puisqu'elle aura une différente courbure : chaque circonférence passera sur des points différens de l'espace ; puisque le point qui la formera par sa révolution, aura une origine & une marche différente : chaque circonférence passera cependant entre la tangente AB & le cercle DMD ; puisqu'elles auront toutes pour rayon, le rayon DC prolongé. Donc une infinité de circonférences passeront entre la tangente AB & le cercle DMD , sans se toucher entr'elles qu'en un seul point D qui leur est commun

à toutes ; tous leurs autres points m , n , r , étant nécessairement différens. Donc entre le cercle & la tangente à ce cercle, peuvent passer une infinité de courbes différentes. Donc entre le cercle & la tangente, il y a une infinité de points différens, capables de recevoir cette infinité de lignes différentes, C. Q. F. D.

THÉORÈME.

376. *Un angle du segment, formé par une tangente & par une corde, a pour mesure la moitié de l'arc soutenu par cette corde. (fig. 37.)*

DÉMONSTRATION, 1°. Soit l'angle BAD : tirez la ligne DE, parallèle à la tangente AB (363). Je démontre que cet angle BAD, a pour mesure la moitié de l'arc AFD.

L'angle BAD est égal à l'angle ADE : puisqu'ils sont alternes-internes entre deux parallèles AB, DE (358). Or l'angle ADE a pour mesure la moitié de l'arc EHA, compris entre ses côtés : puisque c'est un angle inscrit (366). Donc l'angle BAD, qui est égal à l'angle ADE, a aussi pour mesure la moitié de cet arc EHA ; ou la moitié de l'arc AFD qui lui est égal, parce que l'un & l'autre sont compris entre deux parallèles. (362.)

II°. Si l'angle formé par la tangente & par la corde, étoit l'angle BAG ; plus grand qu'un angle droit ; il faut d'abord tirer la ligne AD. L'angle BAD a pour mesure la moitié de l'arc AFD ; comme on vient de le démontrer. L'angle DAG a pour mesure la moitié de l'arc DG ; puisque c'est un angle inscrit. Donc l'angle total BAG, égal à ses deux parties prises ensemble, a pour mesure la moitié de l'arc total AFDG. Donc un angle formé par une tangente & par une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc qui soutient cette corde. C. Q. F. D.

P R O B L È M E I.

377. *D'un point donné B, dans la circonférence, tirer une tangente. (fig. 38.)*

SOLUTION. Tirez un rayon CB, au point B : ensuite élevez sur l'extrémité de ce rayon une perpendiculaire AB (354) : elle sera tangente au point B. (371.)

P R O B L È M E I I.

378. *D'un point donné A, hors de la circonférence, tirer une tangente. (fig. 38.)*

SOLUTION. Du point A, tirez une ligne droite AC, au centre du cercle ; & coupez cette ligne par le milieu, que je suppose être le point N. Après quoi, du point N comme centre, & de l'intervalle AN, décrivez une circonférence : cette circonférence coupera la première en deux points B & b. Si du point A on tire une ligne droite à un des points d'intersection, telle que la ligne AB ; elle sera tangente au cercle donné.

La raison en est, que si on tire le rayon CB au point d'intersection ; on aura l'angle ABC, appuyé sur le diamètre AC du cercle qu'on vient de décrire. Cet angle B est droit : puisque c'est un angle inscrit, appuyé sur le diamètre (368). Donc la ligne AB est perpendiculaire sur l'extrémité du rayon CB : donc elle est tangente (371). On peut dire la même chose de la ligne Ab.



ARTICLE TROISIEME.

RÉUNION DES LIGNES EN FIGURES.

379. DÉFINITION. **L**ES lignes, par leur réunion, forment les figures. On appelle *figure en général*, un espace renfermé de tout côté par des lignes droites ou courbes ; ou l'ensemble des lignes qui renferment & terminent un espace.

Une figure est formée au moins par trois lignes ; elle peut en avoir un nombre plus grand à l'infini. Le triangle rectiligne n'a que trois lignes ; le quadrilatère en a quatre ; le pentagone, cinq ; le dodécagone, douze ; le polygone en général, plusieurs ; le cercle, une infinité.

De toutes les figures géométriques, nous ne considérerons ici que le *triangle rectiligne* : parce que nous n'aurons besoin que de la connoissance de cette sorte de triangle, dans la Longimétrie. La nature & l'égalité des triangles rectilignes, tel est l'objet de cet article.

NATURE DES TRIANGLES.

380. DÉFINITION I. Dans tout triangle, il y a trois côtés & trois angles, d'où dépend la connoissance du triangle. (*fig. 39 & 44.*)

I°. Un des côtés du triangle indifféremment, se nomme la *base du triangle*. Dans le triangle ABC, on peut prendre pour base, ou le côté AB, ou le côté AC, ou le côté BC : on prend ordinairement pour base le côté inférieur AB. L'espace compris entre les trois côtés du triangle, se nomme *aire du triangle*.

II°. La ligne perpendiculaire, qu'on mene de la pointe ou du *sommet* d'un angle sur la base opposée,

prolongée s'il le faut, se nomme la *hauteur du triangle*. Le sommet de l'angle opposé au côté que l'on prend pour base, est le *sommet du triangle*. Une perpendiculaire, menée du point C sur la base AB, sera la hauteur de ce triangle. Si on considère le côté BC comme base, une perpendiculaire menée du point A sur le côté BC, sera aussi la hauteur de ce triangle.

Quand cette perpendiculaire tombe hors de la base, on prolonge cette base jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire. Par exemple, AD est la hauteur du triangle ACB. (fig. 52.)

III°. Le triangle peut être considéré, ou par rapport à ses côtés, ou par rapport à ses angles. De-là les définitions suivantes.

381. DÉFINITION II. Si on considère le triangle par rapport à ses côtés; il y en a de trois sortes. Car ou ses trois côtés sont égaux, & on l'appelle *triangle équilatéral*: ou il n'a que deux côtés égaux, & on l'appelle *triangle isocèle*: ou bien ses trois côtés sont inégaux, & on l'appelle *triangle scalène*.

382. DÉFINITION III. Lorsque le triangle est considéré par rapport aux angles; on en distingue encore de trois sortes: le *triangle rectangle*, qui a un angle droit: le *triangle obtus-angle*, qui a un angle obtus: le *triangle acut-angle*, qui a tous ses angles aigus. (fig. 16.)

383. DÉFINITION IV. On appelle *triangles semblables*, deux ou plusieurs triangles, dont les angles correspondans sont égaux chacun à chacun. (fig. 45.)

Soient les deux triangles ABC & abc, dont nous ne considérons ici que les angles correspondans. Parmi ces angles, si $A = a$, & $B = b$, & $C = c$; ces deux triangles sont semblables.

Si parmi ces angles correspondans, il s'en trouve quelqu'un qui soit plus grand ou plus petit que son correspondant, par exemple, si A est plus grand ou plus petit que a; ces deux triangles ne sont point

semblables, & ne peuvent pas être comparés l'un à l'autre.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

384. *Les trois angles d'un triangle quelconque, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits, & ont pour mesure la demi-circonférence. (fig. 39.)*

DÉMONSTRATION I. Comme on peut faire passer une circonférence par trois points quelconques (322); tout triangle, comme ABC, peut être conçu inscrit dans un cercle. Alors l'angle A aura pour mesure la moitié de l'arc BC : l'angle B aura pour mesure la moitié de l'arc CA : l'angle C aura pour mesure la moitié de l'arc AB (366). Or ces trois arcs font la circonférence entière : donc les trois moitiés de ces trois arcs, font la demi-circonférence. Par conséquent les trois angles du triangle, pris ensemble, ont pour mesure la demi-circonférence : ils sont donc égaux à deux angles droits. C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION II. Tirez par le point C, une ligne DE, parallèle à la base AB (fig. 40). Les deux angles alternes a & A, formés par la sécante CA entre les parallèles, seront égaux : pareillement les deux angles alternes b & B, formés par la sécante CB, seront aussi égaux (358). Or les trois angles n, a, b , pris ensemble, sont égaux à deux angles droits : puisqu'ils embrassent une demi-circonférence. Donc si à la place des deux angles a & b , on prend les deux autres A & B qui leur sont égaux ; les trois angles A, C, B, pris ensemble, valent aussi deux angles droits : puisque $A = a, B = b, n = C$. On peut faire les deux mêmes démonstrations sur tout triangle possible. C. Q. F. D.

DIVERS COROLLAIRES.

385. COROLLAIRE I. *L'angle extérieur quelconque d'un triangle, est égal à la somme des deux angles intérieurs de ce même triangle, qui sont le plus éloignés de lui.* Par exemple, l'angle BCF est égal à la somme des angles BAC & ABC ; ou $d = a + b$. (fig. 42.)

DÉMONSTRATION. Soit l'angle extérieur quelconque BCF, BAN, CBM d'un triangle. Du sommet de l'angle quelconque, décrivez une circonférence sur le côté prolongé. L'angle intérieur quelconque c , joint à l'angle extérieur d , vaut deux angles droits : puisqu'il a pour mesure une demi-circonférence. L'angle intérieur c , joint aux deux autres angles intérieurs a & b , vaut aussi deux angles droits : selon le troisième fondamental. Donc l'angle c étant commun à ces deux grandeurs égales ; les restes d d'une part, & $a + b$ de l'autre, sont égaux. On peut dire & démontrer la même chose, à l'égard de tout autre angle extérieur du triangle ABC, & de tout autre triangle possible. C. Q. F. D.

386. REMARQUE. On voit par ce corollaire, qu'en mesurant l'angle intérieur quelconque d'un triangle, on aura la mesure de son angle extérieur, lequel devient l'angle d'un autre triangle qu'on a souvent besoin de former ou de supposer tout formé à côté du premier triangle ; & réciproquement, qu'en connaissant l'angle extérieur, on trouve l'angle intérieur.

387. COROLLAIRE II, *Dans tout triangle, dès que l'on connoît deux angles, l'on peut facilement connoître & trouver le troisieme angle : puisque ce troisieme angle inconnu est le supplément à deux angles droits, qui font 180 degrés. Retranchez donc de 180 degrés, la somme des deux angles connus : le reste sera la valeur de l'angle inconnu.* (fig. 16.)

Par exemple, si les deux angles connus sont l'un

de 25 degrés & 48 minutes, l'autre de 96 degrés & 26 minutes; je prends la somme de ces deux angles; & j'ai pour les deux angles connus 122 degrés & 14 minutes, qu'il faut retrancher de 180 degrés.

Comme 180 degrés sont égaux à 179 degrés + 60 minutes; de 179 degrés + 60 minutes, je soustrais les deux angles connus, dont la somme est 122 degrés + 14 minutes : le reste 57 degrés + 46 minutes, est la valeur de l'angle inconnu.

179 + 60.
122 + 14.
—
57 + 46.

388. COROLLAIRE III. *Un triangle ne peut avoir ni plus d'un angle droit, ni plus d'un angle obtus : parce que la somme de ses trois angles, qui est toujours nécessairement égale à deux angles droits, ne peut pas être plus grande que deux angles droits. De sorte que si un angle est droit ou obtus, les deux autres sont nécessairement aigus. (fig. 16.)*

THEOREME II.

389. Dans un même triangle quelconque, quels que soient ses angles & ses côtés : (fig. 39 & 34.)

I°. *S'il y a des côtés égaux, les angles opposés à ces côtés sont aussi égaux.*

II°. *S'il y a des angles égaux, les côtés opposés à ces angles égaux, sont aussi égaux.*

III°. *Si les trois côtés sont inégaux, le plus grand angle est opposé au plus grand côté; le plus petit angle est opposé au plus petit côté; & l'angle moyen est opposé au côté moyen.*

DÉMONSTRATION. Concevez ce triangle quelconque, inscrit dans une circonférence; ce qui est toujours possible : puisqu'on peut toujours faire passer une circonférence par trois points donnés (322). Il est évi-

dent que les trois côtés du triangle, seront trois cordes, qui soutiendront trois arcs. Les angles inscrits ayant pour mesure la moitié des arcs qu'ils embrassent; ces angles seront égaux ou inégaux, selon que les cordes qui mesurent ces arcs, seront égales ou inégales. (*fig. 39.*)

Donc, I°. Si le côté AC est égal au côté BC; l'angle B & l'angle A sont égaux: puisqu'ils ont pour mesure des moitiés d'arcs égaux. (366.)

Donc, II°. Si l'angle A & l'angle B sont égaux; les côtés qui leur sont opposés sont aussi égaux: puisque ces côtés BC & AC sont des cordes qui mesurent des arcs égaux, & qui par-là même sont égales. (319.)

Donc, III°. (*fig. 34.*) Si l'angle A est le plus grand angle; le côté BD qui lui est opposé, est le plus grand côté: puisque c'est une corde qui soutient le plus grand arc.

Si l'angle D est le plus petit angle; le côté AB qui lui est opposé, est le plus petit côté: puisque c'est une corde qui soutient le plus petit arc.

Si l'angle B est un angle moins grand que le plus grand, & plus petit que le plus petit; le côté AD qui lui est opposé, tiendra le même milieu: puisque ce sera une corde qui soutiendra un arc moins grand que le plus grand, moins petit que le plus petit. C. Q. F. D.

ÉGALITÉ DES TRIANGLES.

390. DÉFINITION. Deux triangles sont égaux en tout, ou égaux simplement; quand les trois angles & les trois côtés du premier, sont égaux aux trois angles & aux trois côtés correspondans du second, chacun à chacun. (*fig. 41.*)

I°. Lorsque deux triangles son égaux en tout, c'est-à-dire, quant à leurs angles & quant à leurs côtés; si on place leurs côtés correspondans ou homologues l'un sur l'autre, on conçoit que ces deux triangles

doivent quadrer en tout, & se confondre l'un avec l'autre.

II°. Dans deux triangles semblables (383), les angles de l'un sont égaux aux angles correspondans de l'autre; aussi bien que dans les triangles égaux en tout; mais dans les triangles semblables, les côtés de l'un ne sont pas égaux aux côtés correspondans de l'autre; comme dans les triangles égaux en tout. (fig. 41 & 45.)

III°. Dans deux triangles qui sont égaux ou semblables, on nomme *côtés homologues*, les côtés qui sont opposés à des angles égaux. Par exemple, si les deux triangles ABC & abc sont égaux ou semblables; les côtés BC & bc sont homologues: les côtés AC & ac sont aussi homologues, aussi bien que les côtés AB & ab. Homologue; *ejusdem denominationis*: de ὁμοίος, similis; & de λόγος, sermo.

THEOREME I.

391. Si un côté quelconque bc du triangle bca, est égal au côté BC du triangle BCA; & que les deux angles b & c sur le premier côté, soient égaux aux angles B & C sur l'autre côté; les deux triangles seront égaux en tout. (fig. 41.)

DÉMONSTRATION. Concevez le côté bc, appliqué sur le côté BC: ces deux côtés étant égaux, il est évident qu'on aura le point b sur le point B; le point c sur le point C. Or puisque les angles b & B sont égaux; le côté ba sera posé sur le côté BA. De même le côté ca sera appliqué sur le côté CA; parce que les angles c & C sont égaux.

Par conséquent les deux côtés ba & ca, iront se réunir au même point que les deux autres côtés BA & CA: donc les deux triangles conviendront entièrement. Ainsi ils seront parfaitement égaux, ou égaux en tout; c'est-à-dire, quant aux angles, aux côtés & aux espaces. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

392. Si deux côtés quelconques ab & ac d'un triangle, sont égaux aux deux côtés AB & AC d'un autre triangle; & que de plus l'angle a compris entre les deux premiers côtés, soit égal à l'angle A compris entre les deux autres côtés; les deux triangles seront égaux en tout. (fig. 41.)

DÉMONSTRATION. Concevez le côté ab du premier triangle, appliqué sur le côté AB de l'autre; en sorte que le point a soit sur le point A , & le point b sur le point B : il faut évidemment, à cause de l'égalité des deux angles a & A , que le côté a soit posé sur le côté AC . Dans cette hypothèse, le point c tombera sur le point C : parce que, selon la supposition, les deux côtés ab & ac sont égaux aux côtés AB & AC . Par conséquent la base bc conviendra avec la base BC ; & les deux triangles conviendront entièrement: donc ils seront égaux en tout, C. Q. F. D.

ARTICLE QUATRIÈME.

RAPPORT DES LIGNES.

393. OBSERVATION. Les lignes sont des grandeurs ou expriment des grandeurs, qui ont nécessairement des rapports entre elles, & qui peuvent être en proportion: il s'agit ici de la proportion géométrique. Quatre lignes sont en proportion, ou sont proportionnelles entre elles, quand la première est à la seconde, comme la troisième est à la quatrième. Il y a proportion entre quatre lignes, quand le produit des deux extrêmes est égal au produit des deux moyennes (172);

& quand il y a proportion entre quatre lignes, le produit des deux extrêmes est égal au produit des deux moyennes. (171.)

PARAGRAPHE PREMIER.

LIGNES PROPORTIONNELLES.

394. LEMME. Si deux lignes droites quelconques EF & GH, comprises dans un espace parallèle ou renfermées entre les parallèles EG & FH, sont coupées par un nombre quelconque de parallèles MN, *mn* :

I°. La première sera toujours précisément coupée en tout autant de parties, que la seconde.

II°. Si la première est coupée par la moitié ou par le quart, ou par telle autre partie qu'on voudra; la seconde sera aussi coupée par la moitié, ou par le quart, ou par telle autre partie correspondante. (fig. 43.)

DÉMONSTRATION. I°. Comme l'espace intercepté entre les deux parallèles EG, FH, est par-tout égal; il est évident que l'on ne peut tirer ni plus ni moins de parallèles sur GH que sur EF; & que le même nombre de lignes parallèles, d'une infiniment petite largeur égale dans toutes, qui couvrirait tous les points de la ligne EF, couvrirait aussi tous les points de la ligne GH: puisque ces deux lignes embrassent tout l'espace intercepté entre les deux parallèles; & que cet espace par-tout égal dans sa hauteur, ne peut pas contenir plus de lignes parallèles dans un endroit que dans un autre.

II°. Si je tire une parallèle *mn*, qui prenne ou la moitié ou le quart ou le millièmiè ou telle autre partie déterminée de la ligne EF; je prendrai, ou la moitié, ou le quart, ou le millièmiè, ou telle autre partie déterminée de l'espace renfermé entre les parallèles EG & FH: puisque la ligne EF embrasse tout cet espace;

espace ; & que les paralleles MN & mn interceptent essentiellement dans toute leur étendue , un égal espace. Or si je prends la moitié , ou le quart , ou le millieme , ou telle autre partie déterminée de l'espace ; je prendrai aussi la moitié , ou le quart , ou le millieme , ou telle autre partie déterminée de la ligne GH , qui est renfermée & par-tout également inclinée dans ce même espace. C. Q. F. D.

395. REMARQUE. On voit par-là que si la ligne EF est partagée par des divisions égales , par exemple , en quatre parties égales entre elles ; la ligne GH sera aussi divisée en quatre parties égales entre elles. Les divisions de ligne GH , seront chacune plus grandes que les divisions de la ligne EF : parce que GH est plus inclinée , & par-là même plus longue que EF. Mais il n'y aura pas plus de divisions sur l'une , que sur l'autre.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

396. Lorsque deux lignes , comprises dans un espace parallele , sont autant inclinées que deux autres lignes renfermées dans un autre espace parallele ; les deux premières sont proportionnelles aux deux autres. (fig. 43.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux lignes AB & CD , autant inclinées dans leur espace parallele , que les deux lignes EF & GH dans le leur : ensorte que AB & EF soient également inclinées , & que CD & GH soient aussi également inclinées. Il faut démontrer que $AB : EF :: CD : GH$; & *alternando* , que $AB : CD :: EF : GH$; & je le démontre ainsi.

1°. La ligne EF & la ligne GH ont nécessairement un rapport entre elles : le rapport qui est entre ces deux lignes entieres , est aussi entre leurs moitiés , entre leurs quarts , entre leurs centiemes , entre leurs milliemes , entre toutes leurs parties semblables (163) :

Les parties semblables de la ligne EF & de la ligne GH, sont donc proportionnelles aux deux lignes entieres.

II°. Or la ligne AB & la ligne CD, sont deux lignes égales à ces parties semblables des deux lignes EF & GH. Car placez, par la pensée, la ligne AB sur la ligne EF : en sorte que la base BD s'étende sur la base FH ; & que la parallele supérieure AC prolongée, coupe la ligne GH en un point N. Les deux lignes EF & GH seront coupées par la ligne AC en parties semblables ou proportionnelles. (395.)

III°. Cela posé, je dis : la ligne AB est égale à la partie de la ligne EF sur laquelle AB seroit placée. La ligne CD sera aussi égale à la partie NH qui lui répond ; puisque CD & NH sont renfermées & également inclinées dans le même espace terminé par deux paralleles. Donc les lignes AB & CD sont égales à des parties semblables MF & NH, des deux lignes EF & GH. Ces parties semblables MF & NH sont proportionnelles aux lignes entieres EF & GH : donc AB & CD sont aussi proportionnelles aux lignes entieres EF & GH. Donc $AB : CD :: EF : GH$; ou *alternando*, $AB : EF :: CD : GH$: ce qui signifie que la premiere ligne AB, est à la seconde ligne CD ; comme la troisieme ligne EF est à la quatrieme ligne GH ; ainsi que l'annonce le théorème fondamental : & par conséquent, que trois de ces lignes étant connues, on trouvera l'autre quelconque par une simple regle de trois (177 & 180) ; quelle que soit l'étendue plus ou moins grande indéterminément de l'espace parallele qui renferme & les deux premieres & les deux dernieres lignes. C. Q. F. D.

397. REMARQUES. I°. On voit ici comment les démonstrations mathématiques ont communément la plus grande généralité. En comparant l'une à l'autre les deux lignes également inclinées CD & GH ; on conçoit ou l'on doit concevoir que la même démonstration

tration aura lieu, si la premiere ligne CD est de 10 poudes ou de 100 toises, tandis que la seconde ligne GH est de 500 poudes ou de 1000 toises ou immensément plus grande. Quiconque ne voit une démonstration mathématique que dans la figure qui la lui a montré gravée, doit renoncer pour toujours aux mathématiques.

II°. La démonstration qu'on vient de donner, a également lieu; soit que les deux lignes AB & EF, se trouvent perpendiculaires dans leurs espaces parallèles; soit qu'elles y soient obliques, pourvu qu'elles le soient également. Elles sont également obliques, quand leurs angles correspondans sont égaux, ou quand $ABD = EFH$: puisque la grandeur de ces angles égaux leur donne nécessairement une même position sur la ligne BDFH.

III°. Mais il faut avoir soin de comparer toujours deux lignes également inclinées, l'une avec l'autre: en sorte que l'une soit l'antécédent & l'autre le conséquent de la premiere raison; & que les deux autres lignes, qui sont aussi également inclinées, soient l'antécédent & le conséquent de la seconde raison. Dans le théorème, on a comparé la ligne AB à la ligne EF, & non pas à la ligne GH.

Comme ce théorème est la base & le fondement de toute la géométrie, nous en donnerons encore ailleurs une nouvelle démonstration. (495.)

DIVERS COROLLAIRES.

398. COROLLAIRE I. Si la ligne AB est la moitié, le quart, le centieme, le millieme, ou le millionieme de la ligne EF; la ligne CD sera aussi la moitié, le quart, le centieme, le millieme, ou le millionieme de la ligne GH. On peut dire la même chose de toute autre partie semblable, de la billionieme, de la trillionieme, &c ainsi de suite.

399. COROLLAIRE II. *Le produit des lignes AB & GH, est égal au produit des deux autres EF & CD : parce que les deux premiers sont les extrêmes, & que les deux autres sont les moyens d'une proportion géométrique. (171.)*

400. COROLLAIRE III. *Quand un triangle est coupé par une ligne parallèle à la base, les deux côtés sont coupés proportionnellement. (fig. 44.)*

DÉMONSTRATION. Soit le triangle ABC : tirez DE parallèle à la base. La parallèle DE coupe ou le tiers, ou le quart, ou telle autre partie déterminée de l'espace CP, compris entre les deux parallèles AB & FG : donc elle coupe également, ou le tiers, ou le quart, ou telle autre partie déterminée des lignes CA & CB qui occupent cet espace. Par conséquent,

I°. On aura cette proportion, $CD . DA :: CE . EB$: & *alternando*, $CD . CE :: DA . EB$: ce qui signifie que la section CD, est à la section CE ; comme la section DA est à la section EB.

II°. Puisque $CD . DA :: CE . EB$; donc *componendo* (174), $CD . CD + DA :: CE . CE + CB$; donc en simplifiant, $CD . CA :: CE . CB$: ce qui signifie que la section CD, est au côté entier CA ; comme la section CE est au côté entier CB. Nous donnerons ailleurs une autre démonstration du même corollaire (496). C. Q. F. D.

PARAGRAPHE SECONDE.

TRIANGLES SEMBLABLES.

401. OBSERVATION. **D**eux triangles sont semblables, quand les angles du premier sont égaux aux angles correspondans du second, chacun à chacun : en

tellesorte qu'en prenant un côté quelconque *ab* dans un triangle, & en le plaçant sur le côté correspondant *AB* de l'autre triangle ; on ait l'angle à gauche égal à l'angle à gauche, & l'angle à droite égal à l'angle à droite. (fig. 45.)

Dans deux triangles, quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles correspondans de l'autre ; le troisieme angle est aussi égal dans l'un & dans l'autre triangle : puisque ce troisieme angle est le supplément à deux angles droits, ou ce qui manque à deux sommes égales pour faire 180 degrés (387). Ainsi ces deux triangles sont semblables.

THEOREME I.

402. Si deux triangles d'inégale grandeur ont les deux angles sur leur base respectivement égaux ; les deux triangles sont semblables : puisque le troisieme angle, supplément à deux angles égaux, sera aussi égal dans l'un & dans l'autre triangle ; & que deux triangles sont semblables, par la définition (383), quand les trois angles de l'un sont égaux aux trois angles correspondans de l'autre, chacun à chacun. C. Q. F. D.

THEOREME II.

403. Quand deux triangles sont semblables, tous les côtés du premier sont proportionnels aux côtés correspondans du second. (fig. 45.)

DÉMONSTRATION I. Soient les deux triangles semblables *abc* & *ABC*. Il faut démontrer que le côté *ca*, est au côté *CA* ; comme le côté *ab*, est au côté *AB* ; comme le côté *cb*, est au côté *CB* : ce qui donne entre les trois côtés, une proportion continue.

1°. Prenez les côtés *ab* & *AB*, pour bases ; & du sommet de chacun des deux triangles, tirez les lignes

cm & CM , parallèles aux deux bases. Alors les deux côtés ac & bc du petit triangle, seront deux lignes autant inclinées dans leur espace parallèle, que les deux côtés AC & BC du grand triangle, sont inclinés dans leur espace parallèle : puisque la grandeur des angles détermine l'inclinaison des lignes qui les forment. Par conséquent, selon le théorème fondamental (396), on aura $ac . AC :: bc . BC$.

II°. Prenez maintenant les côtés bc & BC , pour bases ; & du sommet de chacun des deux triangles, tirez les lignes an & AN , parallèles aux deux bases. Alors les deux côtés ab & ac du petit triangle, seront deux lignes autant inclinées dans leur espace parallèle ; que les deux côtés AB & AC sont inclinés dans leur espace parallèle : & par le théorème fondamental, on aura $ab . AB :: ac . AC$.

III°. Prenez enfin pour bases les côtés ca & CA ; & ayant tiré par les sommets b & B , des parallèles à ces bases, vous démontrerez de la même manière que $ab . AB :: bc . BC$.

IV°. Observez que dans ces trois proportions, il y a toujours une raison commune. Car la première raison de la première proportion, est la seconde raison de la proportion suivante ; & la première raison de la deuxième proportion, est la première raison de la troisième proportion. Donc ces trois raisons sont égales entre elles. (167.)

Par conséquent, on a cette proportion continue ;
 $ab . AB . bc . BC . ca . CA$: ce qui signifie que les trois côtés du petit triangle, sont proportionnels aux trois côtés homologues ou correspondans du grand triangle. On peut faire la même démonstration sur deux autres triangles semblables quelconques. C. Q. F. D.

404. REMARQUE. Ce théorème peut répandre la lumière la plus sensible sur les rapports des triangles semblables. (fig. 45.)

I°. Supposez d'abord la base AB, d'une grande étendue ; par exemple, de 2000 pouces ; & tirez par la pensée, à chaque distance d'un pouce, des parallèles au côté CB : ces parallèles 1 2, 2 4, 3 6, 4 8, couperont chacune le côté CA, en différens points. De chacun de ces points du côté AC, où aboutissent les parallèles ; tirez par la pensée d'autres parallèles à la base AB : ces nouvelles parallèles 2 3, 4 6, 6 9, 8 12, couperont le côté CB en différens points 3, 6, 9, 12.

II°. Supposez ensuite pour le petit triangle, la base $ab = 1$ pouce, le côté $ca = 2$ pouces, le côté $cb = 3$ pouces : & placez par la pensée le petit triangle sur le grand triangle ; ensorte que le point a tombe sur le point A, & le point b sur le point 1.

III°. Dans cette hypothèse générale ; il est évident que tandis que la base ab occupera un pouce sur la base AB, le côté ca occupera deux pouces sur le côté CA ; & que la première parallèle à la base AB, coupera trois pouces sur le côté CB.

Il est évident que tandis que la base ab , portée une seconde fois sur la base AB, occupera deux pouces sur cette base ; la parallèle au côté CB, ou la ligne 2 4, coupera quatre pouces sur le côté CA ; & que la parallèle à la base, tirée de ce quatrième pouce sur le côté CB, ou la ligne 4 6, coupera six pouces sur le côté CB.

Il est de même évident que tandis que la base ab , successivement portée sur la base AB, occupera cent pouces sur cette base AB ; la parallèle au côté CB, tirée de ce centième pouce de la base, coupera deux cents pouces sur le côté CA ; & que la parallèle à la base, tirée de ce deux-centième pouce du côté CA sur le côté CB, coupera trois cents pouces sur le côté CB : & ainsi de suite à l'infini. Donc en connoissant la base du grand triangle proportionnel, on mesure & on connoît infailliblement ses deux côtés.

THÉORÈME III.

405. *Si les deux côtés d'un petit triangle, sont proportionnels aux deux côtés d'un grand triangle ; & que de plus l'angle compris entre les côtés du petit triangle, soit égal à l'angle compris entre les côtés du grand triangle ; les deux triangles sont semblables. (fig. 44.)*

DÉMONSTRATION. Soient les deux triangles cde , CAB . Que les angles c & C soient égaux ; & que les côtés qui interceptent ces angles, soient proportionnels. Je démontre que les angles d & A , e & B , formés sur leurs bases respectives, sont égaux ; & que ces bases sont aussi proportionnelles entre elles, ou que $de : AB :: cd : CA :: ce : CB$. Pour le démontrer,

1°. Sur la ligne CA je prends par la pensée ou avec le compas, la partie CD égale au côté cd du petit triangle ; & je tire la ligne DE , parallèle à la base AB . L'angle CDE & l'angle CAB sont égaux (358) : par la même raison, l'angle CED & l'angle CBA sont aussi égaux ; & l'angle DCE est commun aux deux triangles. Donc le triangle CDE & le triangle CAB , dont les trois angles correspondans sont égaux, sont deux triangles semblables. On a par conséquent cette proportion : $CD : CE :: CA : CB$. (403.)

Donc si le petit triangle cde étoit égal en tout au triangle CDE ; le petit triangle cde seroit aussi semblable au grand triangle CAB : puisqu'à cause de l'égalité parfaite, on pourroit prendre indifféremment cde ou CDE , (11, III°.)

II°. Or je démontre que le triangle cde est égal en tout au triangle CDE . Car, . . . $cd : ce :: CA : CB$, d'abord par l'hypothèse . . . $cd : ce :: CA : CB$, ensuite, par ce que l'on vient de démontrer . . . $CD : CE :: CA : CB$,

Dans ces deux proportions, la seconde raison est la même, Donc les deux premières raisons, qui sont égales chacune à cette seconde raison, sont égales entre elles (166) : ce qui donne cette nouvelle proportion

$$cd . ce :: CD . CE :$$

$$\& \text{alternando, } cd . CD :: ce . CE,$$

Or le premier antécédent *cd* de cette dernière proportion, a été pris égal à son conséquent *CD* : donc le second antécédent *ce* doit être aussi égal à son conséquent *CE*. Donc le côté *cd* étant égal au côté *CD* ; il faut que le côté *ce* soit aussi égal au côté *CE* ; sans quoi, la dernière proportion qu'on vient de démontrer, ne seroit plus une proportion. Donc les deux triangles *cde* & *CDE*, sont égaux en tout (392) : donc on peut mettre le triangle *cde*, à la place du triangle *CDE*.

III°. Mais nous avons d'abord démontré que le triangle *CDE*, est semblable au triangle *CAB* : donc le triangle *cde*, égal en tout au triangle *CDE*, est aussi semblable au triangle *CAB*. Donc le côté quelconque *cd* du petit triangle, est à sa base *de* ; comme le côté homologue *CA* du grand triangle, est à sa base *AB* : donc les bases *de* & *AB* sont proportionnelles, aussi bien que les côtés. Donc en mesurant la base du petit triangle, on trouvera par une simple règle de Trois (180), la base du grand triangle ; base que souvent on ne peut mesurer en elle-même, étant placée dans une espace inaccessible. C. Q. F. D.

REMARQUE. On peut observer ici, à l'occasion de ce théorème, que si la ligne *DE*, parallèle à la base *AB*, coupe par le milieu le triangle *ACB* ; cette ligne *DE* sera la moitié de la base *AB* : puisque les deux triangles *DCE* & *ACB*, étant semblables (401 & 405) ; il est clair que la base *DE* du petit triangle, est à la base *AB* du grand triangle ; comme un côté quelconque *CD* du petit triangle, est au côté homologue quelconque *CA* du grand triangle (400 & 403.)

PARAGRAPHE TROISIÈME.

SECTIONS DANS LE CERCLE.

406. OBSERVATION. **D**eux lignes peuvent s'entre-couper en différentes manières dans un cercle; & en s'entre-coupant, elles ont des propriétés fondamentales, qu'il est important d'observer.

Quand une ligne est coupée en deux portions inégales; on nomme *grand segment*, la partie plus grande de la ligne; & *petit segment*, la partie plus petite de la même ligne.

THÉORÈME I.

407. Dans un cercle quelconque (fig. 47) :

I°. *Tout diamètre ou rayon, qui est perpendiculaire à une corde, coupe cette corde & l'arc soutenu par cette corde, en deux parties égales.*

II°. *Tout diamètre ou rayon, qui coupe une corde en deux parties égales, est perpendiculaire à cette corde.*

III°. *Toute ligne perpendiculaire à une corde, & qui la divise en deux parties égales, est diamètre ou rayon.*

DÉMONSTRATION. Ce théorème renferme trois parties, dont chacune exige sa démonstration à part.

I°. Le diamètre ou le rayon AMC passe par le centre M, qui est également distant des extrémités D & E de la corde DBE. Donc si ce diamètre ou ce rayon est perpendiculaire à la corde DE; il faut que tous les autres points de ce diamètre ou rayon, soient, ainsi que le point M, également éloignés des points D & E (353). Donc le point B de ce diamètre ou rayon, sera également éloigné des extrémités D & E de la corde : donc on aura $BD = BE$: donc par la même raison, on aura aussi l'arc $CD = CE$. (317 & 319.)

II°. Si le diamètre ou le rayon AMC coupe en deux parties égales la corde DE ; le centre M & le point E sont chacun également éloignés des extrémités D & E de cette corde : comme on vient de l'expliquer & de le démontrer. Donc le diamètre ou le rayon AMC , qui a deux points M & B également distans chacun des extrémités D & E de la corde, est perpendiculaire à cette corde. (353.)

III°. Si la ligne AMC divise en deux parties égales la corde DE , & si elle est perpendiculaire à cette corde; d'abord le point B est également éloigné des deux points D & E . Ensuite, étant perpendiculaire, elle passe toujours par des points également éloignés de D & de E : donc elle passe par le centre M . Or toute ligne qui passe par le centre d'un cercle, est rayon ou diamètre : donc la ligne AMC est rayon ou diamètre, $C. Q. F. D.$

THÉORÈME II.

408. Si deux cordes se coupent dans un cercle ; les parties de l'une, seront réciproques aux parties de l'autre, (fig. 46.)

EXPLICATION. En général, deux grandeurs quelconques a & d , sont réciproques à deux autres grandeurs quelconques b & c ; quand ces quatre grandeurs sont telles, qu'elles peuvent former une proportion géométrique dont les deux premières a & d soient, ou les extrêmes, ou les moyens ; & dont les deux dernières b & c soient, ou les moyens, ou les extrêmes. Ainsi le présent théorème signifie que, quand deux cordes se coupent en parties inégales dans un cercle, les quatre segments (406) donnent toujours une proportion géométrique ; proportion dans laquelle les deux parties ou les deux segments d'une même corde quelconque indifféremment, sont, ou les ex-

trêmes, ou les moyens de la proportion. De sorte que les deux segmens d'une corde sont comparés avec les deux segmens d'une autre, non dans l'ordre naturel de leur grandeur, mais dans un ordre renversé : par exemple, le grand segment BE de la premiere corde, est au grand segment DE de la seconde corde ; comme le petit segment EA de la seconde corde, est au petit segment EC de la premiere : ou $a.b::c.d$; & *alternando*, $a.c::b.d$; ou bien, $d.c::b.a$; ou bien encore, $c.a::d.b$.

DÉMONSTRATION. I°. Soient deux cordes quelconques BC & AD, qui se coupent au point E dans un cercle. On aura dans ce cercle, deux triangles EBA, EDC, qui seront semblables (401). Car d'abord, les angles opposés au sommet sont égaux (343). De plus les angles D & B sont aussi égaux : parce qu'ils sont appuyés sur le même arc CA (366). Enfin les angles A & C sont égaux : parce qu'ils sont aussi appuyés sur le même arc DB. Donc les deux triangles sont semblables : donc les côtés homologues de ces triangles, sont proportionnels (403). Donc l'on aura cette proportion, BE.DE::AE.CE, ou $a.b::c.d$: dans laquelle proportion, les parties BE & EC d'une corde, sont réciproques, ou réciproquement proportionnelles, avec les parties DE & EA d'une autre corde.

II°. Soient deux autres cordes quelconques AC & DE, qui se coupent en un point quelconque B (fig. 47) :

On aura les deux triangles BEA & BCD, qu'on démontrera de la même maniere être semblables ; & on aura de même cette proportion : le moyen côté AB du premier triangle, est au moyen côté BD du second ; comme le petit côté BE du premier, est au petit côté BC du second ; ou $AB.BD::BE.BC$: ce qui exprime l'énoncé même du théorème, C. Q. F. D.

409. COROLLAIRE I. Dans un cercle, si une corde quelconque coupe perpendiculairement le diamètre; un segment quelconque de cette corde est une moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre. (fig 47.)

DÉMONSTRATION. Soit le diamètre AMC, coupé perpendiculairement par une corde quelconque DBE: le segment DB ou EB de cette corde, sera une moyenne proportionnelle géométrique entre les deux segments BA & BC du diamètre. Car, par le théorème précédent, on a cette proportion: $AB \cdot BD :: BE \cdot BC$. Or la corde DE étant perpendiculaire au diamètre, la partie BD est égale à la partie BE (407): donc on peut mettre BD, à la place de BE; & on aura cette proportion: $AB \cdot BD :: BD \cdot BC$.

410. COROLLAIRE II. Dans un cercle, une ligne quelconque menée d'un point de la circonférence perpendiculairement sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre. (fig. 49.)

Car cette perpendiculaire quelconque EG, est la moitié d'une corde perpendiculaire au diamètre. Donc, par le théorème & par le corollaire précédens, $DG \cdot GE :: GE \cdot GF$. C'est ici une propriété fondamentale du cercle, & qu'il faut bien remarquer pour la suite.

PARAGRAPHE QUATRIÈME.

PROBLÈMES SUR LES LIGNES.

PROBLÈME I.

411. **E**XPLIQUER l'usage de la ligne des parties égales. (fig. 10.)

SOLUTION. On nomme ligne des parties égales, on

simplement une échelle, une ligne indéfinie AB, que l'on divise exactement en parties de même grandeur par le moyen du compas. Il y a une ligne des parties égales dans l'étui de mathématiques : les divisions d'un pied-droit peuvent aussi tenir lieu d'une ligne des parties égales. Mais le plus souvent on s'en fait une, selon l'exigence & le besoin.

Par exemple, si je divise exactement la ligne indéfinie AB en portions égales, plus ou moins grandes, 1, 2, 3, 4, 5, & ainsi de suite ; cette ligne AB sera une ligne des parties égales : c'est ce qu'on nomme échelle, dans les cartes géographiques. Cette ligne ou cette échelle sert, entre autres choses, pour tracer en petit, les figures qu'on a en grand ; ou pour tracer en grand, les figures qu'on a en petit. Par exemple (fig. 10 & 57) :

I°. Si je veux tracer en petit un carré long ou un rectangle de 15 toises de longueur sur 7 toises de largeur ; je pose une pointe du compas sur le point A, & l'autre pointe sur le point 15 de la ligne des parties égales ; & je tire une ligne AD égale à cette ouverture de 15 parties. Je pose ensuite une pointe du compas sur le point A, & l'autre pointe sur le point 7 de la ligne des parties égales ; & je tire sur le papier où je veux construire mon carré long, une perpendiculaire AB égale à cette ouverture de 7 parties. Ces deux lignes seront la longueur AD & la largeur AB d'un petit rectangle ADCB, semblable au rectangle qu'il falloit réduire en petit.

II°. Si je veux rendre deux fois plus petites les deux dimensions AD & AB de ce rectangle, ce qui rendra sa surface quatre fois plus petite, comme nous le ferons voir dans le traité suivant ; je fais de moitié plus petites les divisions de mon échelle 1, 2, 3, 4, 5, & ainsi de suite : & en opérant comme on vient de dire, on aura un rectangle semblable au rectangle ADCB ; mais dont les dimensions seront chacune

deux fois plus petites, & la surface quatre fois plus petite. (fig. 57.)

III°. Si je voulois rendre trois fois plus grandes les dimensions de ce rectangle, je ferois des divisions trois fois plus grandes dans l'échelle des parties égales; ou bien je prendrois par-tout trois divisions pour une: & en opérant comme auparavant, je formerois un rectangle semblable au rectangle ADCB, mais dont la longueur & la largeur seroient chacune trois fois plus grandes; & la surface, qui est le produit de ces deux dimensions, comme nous le démontrons bientôt, neuf fois plus grande.

IV°. On peut réduire de même, de grand en petit, ou de petit en grand, toute autre figure qu'un rectangle; par exemple, un triangle, un cercle. Il ne s'agit que de construire des figures semblables: car nous démontrerons dans le traité suivant, que toutes les dimensions des figures semblables, sont proportionnelles. (499.)

Quand la longueur & la largeur des figures à tracer, ne renferme que des grandeurs complexes; par exemple, des toises sans pieds & sans pouces, des pieds sans pouces & sans lignes; l'échelle commune, dont nous venons de parler, suffit pour tracer proportionnellement ces figures.

V°. Mais quand l'une des dimensions, ou l'une & l'autre à la fois, renferme des grandeurs hétérogènes, comme des toises & des pieds, on a besoin pour tracer proportionnellement ces figures sans réduire leurs dimensions à la plus petite espèce, d'une échelle différente; qui donne à la fois, toujours proportionnellement, & les grandeurs homogènes & les grandeurs hétérogènes: c'est ce qu'on nomme l'échelle géométrique, ou la règle géométrique, dont nous ferons connoître la construction & l'usage dans le cinquième problème suivant. (fig. 50.)

Cette *échelle géométrique* est un instrument de l'étude de mathématiques, dont l'usage consiste à trouver un nombre de parties semblables & proportionnelles aux parties d'une étendue qu'on veut mesurer sur le terrain. Ainsi on doit regarder l'échelle géométrique, comme une règle divisée, par exemple, en 10, en 100, en 1000, en 10000, ou en tel autre nombre de parties; pour juger des plus grandes mesures, par exemple, des toises ou des lieues, avec lesquelles ces parties de l'échelle géométrique ont une proportion connue:

PROBLÈME II.

412. *Trois lignes étant données, trouver une quatrième ligne qui soit proportionnelle à ces trois lignes.* (fig. 48.)

EXPLICATION. Ce problème, l'un des problèmes fondamentaux de la géométrie, peut être résolu & en lignes & en nombres. Pour en faciliter & l'application & l'usage, nous allons le résoudre en l'une & en l'autre manière.

SOLUTION I. Soient données trois lignes quelconques A, B, C: il s'agit de trouver une quatrième ligne D, qui soit proportionnelle aux trois lignes données, & qui soit ou l'un des extrêmes ou l'un des moyens de la proportion. Pour cela,

1°. Si la quatrième proportionnelle D que l'on cherche, doit être le quatrième terme de la proportion géométrique; d'un point E, tirez deux lignes EM & EN, qui fassent entre elles tel angle plus ou moins grand qu'il vous plaira. Après quoi, prenez sur l'une de ces deux lignes indifféremment, la partie EF égale à la première ligne donnée A; & sur l'autre ligne, la partie EG égale à la seconde ligne donnée B: & menez du point F au point G, la ligne droite FG.

Prenez ensuite sur la ligne EFM prolongée indéfiniment

ment tant qu'il sera besoin, la partie FH, égale à la troisieme ligne donnée C; & tirez la ligne HK, parallele à la ligne FG (363): la ligne GK sera la *quatrieme proportionnelle* cherchée D.

Car si on suppose au point E, une parallele aux deux lignes FG & HK; on aura cette proportion géométrique (400), $EF : EG :: FH : GK$; ou celle-ci qui lui est en tout parfaitement égale, $A : B :: C : D$; puisque les quatre lignes de la premiere proportion, sont égales chacune à la ligne correspondante de la seconde proportion. (11 & 168.)

II°. Si parmi les quatre lignes A, B, C, D, la *ligne inconnue* étoit la premiere ligne A; on feroit changer de place aux deux extrêmes, & on auroit cette proportion $D : B :: C : A$ (174). Après quoi, en opérant comme on vient de faire, on trouveroit la *quatrieme proportionnelle* inconnue A.

III°. Si dans la proportion donnée $A : B :: C : D$, la *ligne inconnue* étoit l'un des moyens, par exemple, la ligne B; on auroit d'abord par les changemens qu'on peut faire dans une proportion sans la détruire, $A : C :: B : D$; & ensuite, $C : A :: D : B$ (174). Après quoi, en opérant comme nous avons d'abord fait, on trouveroit la *quatrieme proportionnelle* auparavant inconnue B.

IV°. S'il n'y a que deux lignes données A & B, & que la ligne B soit moyenne proportionnelle & doive être mise deux fois dans la proportion; on aura, $A : B :: B : C$ ou x . (fig. 49.)

Il est clair qu'en opérant comme nous avons d'abord fait, on trouvera l'inconnue x , par le moyen des deux lignes données A, B, B; & alors cette inconnue s'appelle *troisieme proportionnelle*, quoiqu'elle soit au fond la *quatrieme proportionnelle* ou le *quatrieme terme* de la proportion.

SOLUTION II. Voyez quelle proportion ont entre
Y

elles les trois lignes données, soit en toises, soit en pouces, soit en portions de l'échelle des parties égales (411). Je suppose que la première ligne soit $= 10$: la seconde $= 17$: la troisième $= 24$: nommez la quatrième inconnue x ; & faites cette proportion : $10 . 17 :: 24 . x$. Multipliez les deux moyens l'un par l'autre, pour en avoir le produit : divisez ce produit par le premier extrême 10, pour en avoir le quotient. Ce quotient $30 + \frac{8}{10}$ exprimera la grandeur de la quatrième proportionnelle qu'on cherchoit.

PROBLÈME III.

413. *Diviser une ligne donnée en des parties proportionnelles à celles d'une autre ligne donnée.* (fig. 48.)

SOLUTION I. Soit une ligne donnée en , qu'il faille diviser en des parties proportionnelles aux divisions faites sur une autre ligne donnée em , plus grande ou plus petite que la précédente. Il s'agit de faire sur la ligne à diviser, des divisions semblables à celles qui sont données sur la ligne divisée em : en telle sorte que si la première division donnée est le tiers de la ligne divisée, la première division qu'on fera sur la ligne à diviser, soit le tiers de cette ligne ; & ainsi des divisions suivantes dans l'une & dans l'autre ligne. Pour cela,

1°. Posez les deux lignes données sur un plan, & joignez ces deux lignes en E , par leur extrémité ee ; en telle sorte qu'elles forment un angle quelconque MEN : & par leurs deux autres extrémités mn , ou MN , menez la ligne droite MN . Après quoi, par les points de division donnés sur la ligne em , menez des parallèles à la ligne MN : ces parallèles FG , HK , formeront sur la ligne à diviser en , des divisions semblables ou proportionnelles aux divisions 1 2 données sur la ligne em . Car les triangles EFG , EHK , EMN ,

étant semblables ; il est clair qu'on a les proportions suivantes, $EF . EG :: FH . GK :: HM . KN$; & ainsi de suite. Or dans cette suite de proportions, les antécédens sont les portions de la ligne *em*, dont les divisions sont données ; & les conséquens sont les portions de la ligne à diviser : donc les dernières sont proportionnelles aux premières.

SOLUTION II. On peut aussi résoudre ce problème en cette autre manière, qui pour le fond des choses revient à la précédente. Soit *BC* la ligne à diviser : soit *bc* la ligne donnée & divisée. (fig. 91.)

Ayant posé ou mené ces deux lignes parallèlement (363) sur un plan ; menez par leurs extrémités les lignes *BA* & *CA*, qui iront se réunir en un point plus ou moins éloigné *A*. Ensuite de ce point *A*, tirez des droites par les points de division donnés 1, 2, 3 : ces lignes iront couper proportionnellement la ligne à diviser en *m*, en *n*, en *r*. Car les triangles *Ab 1* & *ABm*, *A 1 2* & *A mn*, *A 2 3* & *Anr*, étant semblables ; on a d'abord *Ab 1 . b 1 :: AB . Bm*. On a ensuite, *A 1 2 :: Am . mn* : & ainsi du reste.

Il résulte de cette seconde solution, que si du sommet d'un triangle quelconque, on mène une ligne droite sur un point quelconque de la base ; toutes les parallèles à la base, seront coupées en parties proportionnelles aux sections faites sur la base. Par conséquent on aura *b 1 . Bm :: 1 2 . mn :: a c . nC* ; & ainsi du reste des autres sections ou divisions qu'on peut faire.

PROBLÈME IV.

414. Deux lignes étant données, trouver une moyenne proportionnelle à ces deux lignes. (fig. 49.)

EXPLICATION. Il s'agit dans ce problème, l'un des problèmes fondamentaux de la géométrie, de trouver une grandeur inconnue ; qui étant multipliée par elle-

même, donne un produit égal au produit de deux autres grandeurs données & multipliées l'une par l'autre. Les deux grandeurs données forment les deux extrêmes d'une proportion géométrique : la grandeur inconnue en formera les deux moyens. Ce problème peut toujours se résoudre en lignes, & quelquefois en nombres : nous allons le résoudre en l'une & en l'autre manière.

SOLUTION I. Soient les deux lignes données A & C : il s'agit de trouver une ligne inconnue B, qui soit *moyenne proportionnelle* entre les deux lignes données ; en sorte qu'on ait cette proportion, $A . B :: B . C$. Pour cela ,

Tirez une ligne indéfinie DF, sur laquelle vous prendrez la partie DG, égale à la ligne donnée A ; & la partie GF, égale à l'autre ligne donnée C. Après quoi, divisez la somme DGF des deux lignes, en deux parties égales, au point M ; & de ce même point M comme centre, & de l'intervalle MD, décrivez un cercle. Ensuite du point G, élevez la perpendiculaire GE, jusqu'à la circonférence : elle sera la *moyenne proportionnelle* cherchée entre A & C ; & si l'on appelle B cette ligne trouvée, on aura $A . B :: B . C$. C'est une suite évidente du second corollaire précédent. (410.)

SOLUTION II. Après avoir déterminé, soit en toises, soit en pieds, soit en pouces, soit en lignes, la valeur des deux lignes données ; multipliez l'une par l'autre ces deux lignes, qui sont les extrêmes d'une proportion géométrique. Ensuite extrayez la racine quarrée du produit (129) : cette racine quarrée exprimera la ligne cherchée. Par exemple, soit la première ligne donnée = 4, la seconde ligne donnée = 25 : le produit de ces deux nombres sera 100, dont la racine quarrée sera 10. Cette racine $10 \times 10 = 100$, donne un produit égal au produit des extrêmes : donc la ligne

10 fera *moyenne proportionnelle* entre les deux lignes données.

Si le produit des extrêmes n'est pas un carré parfait, la racine quarrée qu'on trouvera en nombres, ne fera pas la moyenne proportionnelle parfaitement exacte (130) : mais on approchera, tant qu'on voudra, de la vraie racine quarrée (135), qui est la vraie moyenne proportionnelle que l'on cherche. Dans la pratique, on se dispense de cette trop scrupuleuse précision; & on se contente d'un à-peu-près, qui est presque toujours suffisant.

PROBLÈME V.

415. *Construire la règle ou l'échelle géométrique.*
(fig. 50.)

SOLUTION. Pour construire l'échelle géométrique, dont nous avons déjà donné ailleurs une idée (411) :

I°. Menez une ligne droite indéfinie ABN; & prenez sur cette ligne, six parties égales A 6, 6 5, 5 4, 4 3, 3 2, 2 1, à volonté. Vous transporterez ensuite la distance AB, sur toute la longueur de la ligne ABN, autant de fois qu'il vous plaira.

II°. Elevez au point A une perpendiculaire AC, que vous diviserez en douze parties égales prises à volonté, A 1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, 5 6; & ainsi de suite jusqu'à douze.

III°. De chaque point de division faite dans la perpendiculaire AC, menez des parallèles 1 M, 4 S, 9 Z, à la ligne ABN; & sur la dernière parallèle CDR, transportez de C en D, les six parties auxquelles on a divisé la ligne AB.

IV°. Joignez par des lignes droites, la première partie à gauche, marquée A, avec la seconde à droite, marquée 6 : ensuite 6 de la gauche, avec 5 de la droite, & ainsi de suite. Joignez toujours les divisions de la

gauche avec les divisions de la droite, par des *transversales* A 6, 6 5, 5 4, 4 3, 3 2, 2 1.

EXPLICATION. Il est évident que si AB est supposé être une longueur de six pieds ; les portions A 6, ou 6 5, ou 5 4, seront chacune la longueur d'un pied. Mais les portions 1 1, ou 2 2, ou 3 3, des parallèles 4 x ou *vr*, comprises entre la perpendiculaire AC & la transversale A a, exprimeront des pouces. La portion 1 1 exprimera un pouce : la portion 2 2 exprimera 2 pouces ; & ainsi de suite : de sorte que la dernière portion C 6 exprimera douze pouces ou un pied ; parce que $C 6 = A 6$, par la construction.

DÉMONSTRATION. Supposant que les six parties égales de la ligne AB, sont six pieds ; il faut démontrer que la portion 1 1, donne 1 pouce : que la portion 2 2, donne deux pouces ; que la portion 6 6, donne six pouces ; & ainsi de suite : ce qui est évident. Car les triangles CA a, 1 A 1, sont semblables (401 & 413) : donc (403) on aura cette proportion ; A 1. AC :: 1 1. C 6 ou Ca.

Or par la construction, la portion A 1, n'est que la douzième partie de la ligne AC : donc le côté 1 1, sera la douzième partie du côté Ca : donc puisque le côté Ca vaut douze pouces, le côté 1 1 vaudra un pouce. On démontre de la même manière que le côté 2 2, vaut deux pouces ; que le côté 6 6, vaut 6 pouces ; & ainsi du reste. (413.)

415. REMARQUE. L'usage de l'échelle géométrique, ainsi divisée, est très-commode ; comme on va le voir. (fig. 50.)

1°. Voulez-vous prendre en petit, la valeur de 5 pieds 4 pouces ? Cherchez sur cette échelle, la rencontre x de la quatrième parallèle 4 x S, avec la sixième transversale 2 x D : posez une jambe du compas sur x, qui est le point de rencontre ; & l'autre jambe du compas, sur l'extrémité 4 de la même parallèle x S.

Cette ouverture du compas $\times 4$, vous donnera une longueur correspondante à 5 pieds 4 pouces.

II°. Voulez-vous prendre en petit, la valeur de 27 pieds 9 pouces? Prenez $AM = 12$ pieds; prenez encore une fois $AM = 12$ pieds; ce qui fait déjà 24 pieds: il vous manque encore 3 pieds 9 pouces. Pour les avoir,

Cherchez la rencontre r de la neuvième parallèle $9Z$, avec la quatrième transversale $3r4$: posez une jambe du compas sur r , & l'autre sur 9. Cette ouverture du compas vous donnera $rv = 3$ pieds, $+ v9 = 9$ pouces. En faisant une ligne égale à tout cela, vous aurez $2AM = 24$ pieds, $+ rv = 3$ pieds, $+ v9 = 9$ pouces.

III°. Si la ligne AB exprime 6 toises; alors les divisions 11, 22, 33, 44, exprimeront des demi-pieds, ou des douzièmes de toise.

IV°. Si la ligne AB exprime 6 lieues; alors les divisions, dont on vient de parler, exprimeront des douzièmes de lieue: & ainsi de toute autre mesure en longueur. Par-là, l'usage de l'échelle géométrique devient général, & relatif à toute mesure quelconque de l'étendue en longueur.

PARAGRAPHE CINQUIÈME.

PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES.

PROBLÈME I.

417. *CONNOISSANT deux angles, & un côté d'un triangle; trouver le troisième angle, & les deux autres côtés.* (fig. 45.)

SOLUTION. Soit le triangle ABC, dont on connoisse
Y iv

les deux angles quelconques B & C, avec le côté CA que je suppose de 287 toises.

I°. Deux angles d'un triangle étant connus, on trouve toujours facilement le troisième, qui est le supplément à 180 degrés. Soustrayez donc de 180, la somme des deux angles connus : le reste sera la valeur du troisième angle inconnu A. (387.)

II°. Considérez comme base du triangle, le côté connu CA. Pour trouver les deux autres côtés inconnus AB & BC; avec le compas, prenez sur la ligne des parties égales (411), autant de parties que le côté connu contient de toises, c'est-à-dire ici, 287 parties égales; & tirez une ligne droite *ca*, égale à cette longueur. Ensuite, de l'extrémité *c* de la ligne *ac* que vous venez de tirer; menez une ligne indéfinie *cb*, qui fasse avec la ligne *ca*, un angle *c* égal à l'angle C. De l'autre extrémité *a* de la première ligne tirée *ac*; menez une autre ligne indéfinie *ab*, qui fasse avec la ligne *ca*, un angle *a* égal à l'angle A. Ces deux lignes *cb* & *ab*, indéfiniment prolongées, se réuniront en un point quelconque *b*; & formeront le triangle *abc*, semblable au triangle ABC : par conséquent les côtés de l'un, sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre. (403.)

Ainsi $CA : CB :: ca : cb$: ainsi encore $CA : AB :: ca : ab$. D'où il suit que le côté CA, contient autant de parties égales du côté CB, ou du côté AB; que le côté *ca*, contient de parties égales du côté *cb*, ou du côté *ab*.

III°. Donc si, en prenant avec le compas la longueur du côté *ca*, & portant cette longueur sur la ligne des parties égales, on trouve qu'elle contient 361 parties; on sera assuré que le côté CB contient 361 toises. De même, si en prenant avec le compas la longueur du côté *ab*, & portant cette longueur sur la ligne des parties égales, on trouve qu'elle contient 96 parties; on sera assuré que le côté AB contient 96 toises.

PROBLÈME II.

418. Connoissant deux côtés d'un triangle, & l'angle compris entre ces deux côtés ; trouver le troisieme côté, & les deux autres angles. (fig. 52.)

SOLUTION. Soit le triangle BAC, dont on connoisse le côté AB, que je suppose de 495 toises ; & le côté AC, de 257 toises ; avec l'angle A compris entre ces deux côtés.

I°. Pour trouver le côté BC, il faut prendre sur l'échelle (411), la longueur de 495 parties égales ; & tirer la ligne *ab*, égale à cette longueur. Il faut prendre aussi sur l'échelle 257 parties égales ; & du point *a*, tirer la ligne *ac*, égale à cette autre longueur ; & qui fasse sur la ligne *ab*, un angle *a* égal à l'angle A. Après cela menez une ligne droite, du point *b* au point *c* ; & vous aurez le triangle *bac*, semblable au triangle BAC : puisque les deux côtés *ab* & *ac*, sont proportionnels aux côtés AB & AC ; & que l'angle compris entre les côtés du premier, est égal à l'angle compris entre les côtés du second. (405.)

II°. Par conséquent, si en portant sur l'échelle, la longueur du côté *bc*, on voit combien cette longueur contient de parties égales de l'échelle ; on saura que le côté BC contient tout autant de toises. Par exemple, si le côté *bc* répond à 204 parties de l'échelle ; le côté inconnu BC du triangle semblable, sera de 204 toises.

III°. Pour trouver les angles inconnus B & C, du triangle proposé ; il faut mesurer avec le rapporteur (339), les angles correspondans du petit triangle : l'angle *b* fera la mesure de l'angle B ; & l'angle *c*, la mesure de l'angle C.

419. REMARQUE. On voit par la solution de ces deux problèmes, qu'il ne s'agit que de faire un petit triangle, semblable au grand triangle dont on veut

ouvertures circulaires qui restent invariables sur la partie saillante de l'alidade PD, & du diamètre AB. On peut aussi, pour mieux saisir les objets éloignés, se servir, ou d'une lorgnette simple & à un seul verre, ou d'une petite lorgnette d'opéra, à deux verres, en fixant un objet R.

III°. On adapte quelquefois au graphometre, deux lunettes; l'une immobile & parallèle au diamètre AB, laquelle tient lieu des deux pinnules A & B; l'autre mobile & immobilement fixée sur l'alidade ou sur le diamètre roulant PD, laquelle tient lieu des pinnules P & D. Il faut, pour que les deux lunettes soient convenablement placées l'une au-dessus & l'autre au-dessous du plan gradué du graphometre, que dans chaque lunette la ligne droite menée par les centres de l'objectif & des oculaires, soit parallèle au plan du graphometre; & que ces deux lignes droites se croisent dans une perpendiculaire, élevée sur le centre C du même graphometre.

IV°. Au milieu du plan gradué du graphometre, se trouve communément une grande aiguille aimantée *ab*, en équilibre & mobile sur un pivot élevé perpendiculairement dans le centre d'un cercle *abmn* divisé en degrés & en minutes: c'est la *bouffole*, qui dans le graphometre est couverte d'un verre plan bien transparent & bien solide, & dont le plan se confond souvent avec le plan même du graphometre. Cette aiguille aimantée sert à donner la position du lieu où l'on opere, & des objets auxquels on vise, relativement au nord & au midi, à l'orient & à l'occident.

Pour cela, il faut chercher & déterminer avec précision, la déclinaison de l'aiguille aimantée, pour le lieu où est posé le graphometre: ce que l'on peut faire aisément, en mesurant l'angle que fait sur la méridienne de ce lieu (*Phy.* 1356), une semblable aiguille aimantée, posée sur un petit pivot perpendi-

culaire à cette méridienne. Supposons que cet angle *amn*, formé par la direction de la méridienne du lieu & par la direction de l'aiguille aimantée, soit de 19 degrés & 45 minutes (*Phy.* 592 & 1101, V°):

Quand l'aiguille aimantée *ab* fera un angle *amn* de 19 degrés & 45 minutes, la ligne CM sera dirigée du midi au nord; la ligne AB, du couchant au levant; la ligne PCDR déclinera de 60 degrés AD, du couchant CA vers le nord CM. Quand l'aiguille aimantée tombera sur la ligne nord *mn* du petit cercle; la ligne CM du graphometre, déclinera de 19 degrés & 45 minutes, du nord vers l'orient; & ainsi du reste. Mais pour que tout cela soit exact, il faut qu'il n'y ait aucun fer dans le graphometre, ni au voisinage du graphometre.

V°. Si sur l'alidade PCD d'un graphometre, on fixe parallèlement à cette alidade, un petit tube de verre *rs*, parfaitement cylindrique, de sept à huit pouces de longueur, plein d'esprit de vin coloré; dans lequel se trouve une forte bulle d'air, quand l'alidade & le petit cylindre hermétiquement fermé par ses deux bouts seront dans une position horizontale, la bulle d'air restera immobile vers le milieu du cylindre. Mais quand l'alidade & le cylindre, toujours parallèles entre eux, perdront la position horizontale, la bulle d'air montera vers le côté où l'alidade s'élève. Ce petit cylindre *rs* est un *niveau d'eau*. Par ce moyen on trouvera aisément & assez exactement la ligne horizontale du lieu où l'on prend des angles sur le terrain. Mais il faut pour cela, que la capacité du tube soit par-tout exactement cylindrique; & que l'axe *rs* de cette capacité cylindrique, soit par-tout parallèle à l'alidade & à la direction des angles visuels.

VI°. Comme nous venons de parler de la ligne

horizontale; il est à propos d'en donner ici une notion anticipée.

La *ligne horizontale d'un lieu*, est une ligne qui menée dans une direction quelconque, du midi au nord ou du levant au couchant, seroit parallèle à la surface d'un bassin d'eau tranquille, placée en ce lieu. Le niveau donne par-tout la ligne horizontale, dans une certaine étendue: nous traiterons ailleurs plus au long, & de l'horison & du niveau. (533.)

LE QUART DE CERCLE.

421. DESCRIPTION. 1°. Le *quart de cercle* est communément destiné à prendre des angles dans le ciel, avec la plus grande précision possible. (fig. 3.)

Cet instrument ABDCA est pour l'ordinaire un plan solide de cuivre, dont le milieu VV est vuide, ou qui n'a en matiere solide que l'arc ABD & les deux rayons CD & CA. Cet arc ABD, qui est précisément le quart d'une grande circonférence dont le rayon est communément de deux ou trois pieds de long, & quelquefois plus grand encore, est divisé avec tout le soin possible en degrés, en minutes, en secondes, & quelquefois même en tierces. Sur le centre C roule une *regle solide* MN, qui mesure la grandeur de l'arc BD & de l'angle DCB; & qui porte une lunette d'approche MR, mobile comme elle, & parallèle à elle-même. Au foyer *mn* de la lunette, est un micrometre objectif, dont nous parlerons bientôt. Un *fil à plomb* OP sert à donner à l'instrument une direction perpendiculaire à l'horison. (532.)

Pour se servir de cet instrument, on le fixe immobilement & avec la plus scrupuleuse exactitude, dans la direction qu'on veut lui donner. Par exemple, si la situation immobile du quart de cercle est telle; que

la ligne CD soit horizontale ; la ligne CA , verticale ; le plan CABDC , dans le plan du méridien : alors la règle mobile MN ou CB , qui est un rayon roulant sur le centre C , se portera de B en D , de B en A ; & mesurera tous les angles quelconques DCB , qu'on voudra prendre sur le quart correspondant de la circonférence du méridien céleste ; & qui seront interceptés entre la ligne horizontale indéfinie CD , & la ligne verticale indéfinie CA qui aboutit au zénith. Si l'arc DB est de 46 degrés sur le quart de cercle ; il sera de 46 degrés dans le quart de la circonférence du méridien céleste : puisque ce sont deux arcs de circonférences équivalement concentriques , compris entre les mêmes rayons indéfinis CD & CB. (340.)

Le Micrometre, la Lunette.

422. OBSERVATION. Les grands avantages qu'on tire du quart de cercle , tel que nous venons de le décrire , & tel qu'on l'emploie depuis près d'un siècle dans l'astronomie pratique , ont pour origine deux des plus heureuses inventions de l'astronomie moderne : l'une est l'invention du microscope objectif ; l'autre est l'application du télescope astronomique au quart de cercle.

1°. Le *micrometre objectif* , dont la première idée est due au célèbre Huygens , sert à mesurer avec la plus grande précision , la grandeur des espaces célestes ; comme le pendule à secondes (7. III°) sert à mesurer avec la plus grande exactitude la durée précise du temps qui répond à certaines observations. (*fig. 3.*)

Tout le monde sait que le télescope astronomique MR est communément une lunette d'approche à deux verres convexes , tellement assortis que leurs foyers coïncident en un même petit espace (*Phy. 1001 & 1006*). Au foyer *mr* de l'objectif R se forme une

petite image parfaitement semblable à l'objet, & proportionnée à l'angle optique sous lequel cet objet paroitroit à l'œil nud; & cette image, placée au foyer de l'oculaire *M*, est conduite dans l'œil, apperçue distinctement, & tracée sous un angle optique qui l'amplifie proportionnellement dans toutes ses parties. De sorte que, par ce moyen, un objet paroît & plus éclairé & plus grand & plus près de l'œil qu'il ne paroitroit à la vue simple (*Phy.* 1027); & que si le télescope grossit cinquante fois, par exemple, le diamètre des objets placés devant lui; un objet dont le diamètre apparent à l'œil nud ne seroit que d'une ou deux secondes, & seroit par-là même imperceptible (*Phyf.* 921), se montrera à l'œil aidé du télescope astronomique, sous un diamètre apparent de 50 ou 100 secondes, & deviendra visible. On conçoit par-là, comment on peut voir & saisir distinctement, à l'aide du télescope, un objet ou une distance qui seroit imperceptible à la vue simple, tel que le diamètre d'une comète très-éloignée, qui est souvent insensible à l'œil nud; tel que la parallaxe du soleil, laquelle n'est que de 8 secondes & environ 42 tierces.

Cette image tracée au foyer *mn* de l'objectif, fournit à M. Huygens, un moyen pour connoître & pour mesurer la grandeur apparente de l'objet auquel elle répondoit; & voici comment il s'y prit. Au foyer commun *mn* de l'objectif *R* & de l'oculaire *M*, il plaça une ouverture circulaire *dvdrd*, dont il mesura la grandeur apparente: c'est-à-dire, qu'il mesura le nombre de minutes & de secondes qu'elle laissoit découvrir dans le ciel, par le tems qu'une étoile employoit à parcourir le diamètre *dd* de cette ouverture circulaire (*). Après avoir déterminé avec toute l'e-

(*) Une étoile fait sa révolution diurne en 23 heures 56 minutes 4 secondes de tems moyen; & elle parcourt, zactitude

exactitude requise, quelle grandeur apparente du ciel
 embrassoit l'ouverture circulaire fixée au foyer *mn* de
 son télescope astronomique; lorsqu'il s'agissoit de me-
 surer le disque d'une planète, ou la distance de deux
 corps célestes, il introduisoit par une fente latérale *mn*
 faite au télescope, une petite verge de métal *vr*, d'une
 largeur précisément suffisante pour couvrir cet in-
 tervalle; & cette largeur *c*, comparée par le moyen
 d'une échelle (411) à celle de l'ouverture totale *dd*, lui
 donnoit le diamètre apparent de cet objet. Par exem-
 ple, si le diamètre *dd* de l'ouverture circulaire ré-
 pondoit à 70 minutes de degré; & que la largeur *c*
 de la verge *vr* qui occultoit une planète, fût la soix-
 ante-dixième partie de ce diamètre; il concluoit que
 le diamètre de cette planète étoit d'une minute; &
 ainsi du reste. Tel fut le micrometre qu'employa Huy-
 gens. Cet instrument a été perfectionné par MM.
 de Malvasia, Auzout, Bradley. (*fig. 116 & 113.*)

M. le marquis de Malvasia, noble Boulonois, plaça
 au foyer *mfn* du télescope, un réticule; c'est-à-dire,
 plusieurs fils se croisant à angles droits & formant plu-
 sieurs quarrés *drnd*, à chacun desquels devoit répondre
 un certain intervalle dans le ciel. Et comme il devoit
 souvent arriver que l'objet à mesurer ne comprendroit
 pas précisément un ou plusieurs de ces quarrés; il en
 divisa un en plusieurs autres beaucoup plus petits,
 comme il avoit divisé le champ entier de la lunette
 par les premiers. Par ce moyen, il déterminoit aisé-
 ment combien d'intervalles entre les filets principaux,

en une seconde de tems, 15 secondes de degré, plus en-
 viron un vingt-sixième de seconde de degré: ou plus exac-
 tement, elle parcourt en une seconde de tems, 15 secondes
 de degré $+\frac{11.42}{11.124}$ d'une seconde de degré. Nous avons mar-
 qué ailleurs comment se mesurent exactement les secondes
 de tems; pages 9 & 12.

& combien de portions de ces intervalles, comprenoit l'objet qu'il vouloit mesurer; & par conséquent, quelle étoit sa grandeur apparente. (fig. 116.)

M. Auzour, l'un des premiers membres de l'Académie royale des Sciences, perfectionna encore cette invention, & la rendit plus propre à des déterminations extrêmement délicates. Il ne conserva que des filers parallèles rr , avec un transversal dd qui les coupoit à angles droits: & afin de renfermer toujours l'objet à mesurer entre des filers parallèles, il imagina d'en faire porter un nn par un châssis mobile nm , glissant dans les rainures du châssis auquel les autres étoient fixés. On fait avancer ou reculer ce châssis mobile nm , par le moyen d'une vis portant un index v , dont les révolutions marquent de combien le fil mobile nn se rapproche ou s'éloigne des filers fixes rr . Par exemple, supposons que les fils parallèles rr soient tous éloignés l'un de l'autre, d'un intervalle qui réponde exactement à une minute de degré; & qu'il faille 60 révolutions de la vis v , pour qu'elle se porte par des pas égaux, d'un fil au fil suivant: il est clair que chaque révolution de l'index, embrassera & mesurera une seconde de degré. Ce réticule $drnd$ est renfermé dans le tuyau de la lunette MR , & placé au foyer mn , parallèlement à l'objectif R . La vis v est saillante en dehors, pour donner lieu aux évolutions du filet mobile nn ; & au tuyau de la lunette MR , est pratiquée une petite ouverture convenable, par où l'on puisse éclairer les filers $nrnd$ pendant la nuit par le moyen d'une lampe. (fig. 3, 113 & 116.)

Quand le télescope astronomique est ainsi arrangé, ayant son réticule $drnd$ exactement placé au foyer nm de l'objectif & de l'oculaire; il reste à déterminer la grandeur du champ ABA , ou la quantité de minutes & de degrés qu'embrasse son ouverture circulaire ABA . Pour cela, on dirige le télescope vers le

ciel ; & on mesure la grandeur du champ & l'intervalle d'un fil à l'autre, par le passage d'une étoile, comme nous avons dit que faisoit Huygens ; ou bien, on tourne le télescope vers un petit objet AB éloigné de quelques centaines de toises, dont on a calculé trigonométriquement la grandeur apparente ; d'où l'on conclut celle qui répond à un des intervalles égaux rr , rr , des filets qui embrassent cet objet. Après ces préparations, le micrometre est construit ; & l'on peut le tourner vers le ciel, pour y mesurer la grandeur apparente de quelque objet que ce soit. Veut-on, par exemple, déterminer le diamètre apparent du soleil ? On tourne l'instrument de manière que cet astre paroisse pendant quelques momens suivre la direction d'un des fils parallèles rr ; & en avançant ou en reculant le fil mobile nn , on fait en sorte que son disque soit précisément compris entre eux. Alors on examine, au moyen de l'index v , la distance du fil mobile nn , à un des fixes rr . D'où l'on conclut avec beaucoup de précision, le diamètre apparent de l'astre, ou l'intervalle entre les deux astres, qu'on veut mesurer. Telle est l'idée sommaire qu'on doit se former du micrometre & de ses usages. On a imaginé dans la suite diverses nouvelles constructions de micrometres : mais la plus simple, la plus parfaite, & celle qui sert à un plus grand nombre d'usages, c'est celle que nous venons d'expliquer ; & c'est aussi, à quelques changemens près ; celle qu'ont adopté tous les Astronomes. (*fig. 3 & 116.*)

II°. L'application du télescope astronomique au quart de cercle, est encore une des plus heureuses inventions de l'astronomie moderne : elle est due à MM. Auzout & Picard en France, à MM. Gascoigne & Hook en Angleterre. Tant qu'à l'exemple des anciens, on se servoit de pinnules simples, comme dans le graphometre (420) ; l'observateur n'ayant d'autre secours que celui de ses yeux, ne pouvoit jamais parvenir à

discerner & à déterminer parfaitement le bord de l'astre ou de l'objet auquel il miroit. D'ailleurs, les étoiles fixes paroissent à l'œil nud environnées d'une chevelure, qui leur donne un diamètre apparent beaucoup plus considérable qu'il n'est dans la réalité; & qui induisoit l'observateur en une erreur continuelle. Le télescope astronomique, adapté au quart de cercle, leve tous ces inconvéniens. Le diamètre de l'astre, du soleil, par exemple, paroît distinctement terminé; & l'on peut juger avec précision, de l'instant auquel il arrive aux fils qui se croisent au foyer de l'objectif. Les étoiles sont dépouillées de cette chevelure incommode, qui en augmente l'apparence à l'œil nud; & elles ne paroissent que comme des points lumineux & presque indivisibles, qui souvent sont éclipsés ou occultés par un simple fil de soie, de l'ombre duquel on les voit subitement sortir comme un petit éclair: leur passage par ces fils est par-là beaucoup mieux déterminé; ce qui fournit un moyen commode & beaucoup plus exact que ceux qu'on pratiquoit autrefois, pour mesurer leur déclinaison & leur ascension droite (*Phy.* 1153). Le quart de cercle enfin, garni d'un télescope & d'un micrometre, sert à mille déterminations délicates, auxquelles l'instrument ancien ne pouvoit atteindre: aussi cette invention fut-elle rapidement adoptée par tous les astronomes jaloux de l'exactitude.

Envain objecteroit-on contre l'usage du télescope astronomique, que dans cette manière d'observer les objets, il n'y a aucune *ligne de mire*, ou aucun *axe* de vision: ce qui est cependant nécessaire pour déterminer le lieu de l'objet (*Phy.* 912). Vaine objection; prétention frivole! On démontre facilement par les loix de la Dioptrique, que le rayon passant par le centre de l'objectif & de l'oculaire, forme une ligne invariable (*Phy.* 987 & 1006), qui est l'axe

de vision, ou la ligne droite dans laquelle est vu l'objet : de sorte que ce ne peut être que le point de l'objet, qui est dans la direction de cette ligne, ou qui en est éloigné d'un angle déterminé, qui puisse paroître au point où se croisent ces fils. Il y a donc, lorsque l'instrument est vérifié, & que le télescope ne souffre aucun dérangement à l'égard du quart de cercle ; il y a, dis-je, une ligne équivalente à celle qui seroit menée par les deux ouvertures des pinnules ordinaires, & qui est le vrai rayon par lequel l'objet est aperçu : comme on peut s'en convaincre par l'expérience, en mirant d'abord par le moyen du télescope, un point fixe d'un objet placé à une distance de cent ou deux cents toises ; & en mirant ensuite le même point de l'objet par le moyen de deux pinnules placées aux deux bouts du tuyau du télescope : tuyau qu'on laissera dans la même position, en enlevant les deux verres, l'objectif & l'oculaire.

III°. Quelque perfection qu'ait acquis cet instrument depuis un siècle, il est certain qu'il est encore perfectible ; & ce qui peut lui manquer de perfection, lui vient de l'imperfection des lunettes ordinaires (*Phy.* 1027), qui ont besoin d'être fort longues pour grossir beaucoup ; ce qui les rend fort embarrassantes : & qui manquent de clarté & de netteté ; quand on n'enveloppe pas d'une zone opaque les bords de l'objectif ; ce qui fait que la majeure partie de cet objectif est en pure perte pour l'œil, auquel il ne donne de la lumière que par un petit cercle découvert, pris autour de son centre (*Phy.* 1029). Le desir de parer à ce double inconvénient a fait imaginer dans ces derniers tems, les lunettes achromatiques (*) ; c'est-à-dire des

(*) Les lunettes ordinaires, sur-tout quand on laisse à découvert une trop grande partie de l'objectif, montrent les objets environnés ou enveloppés de plusieurs cercles co-

connoître, ou quelque angle, ou quelque côté : comme nous avons enseigné à le faire dans la solution des deux problèmes précédens. Mais, pour avoir plus de précision dans la pratique, il faut faire le triangle semblable, le plus grand que l'on peut : parce qu'il est plus facile d'éviter les erreurs considérables, en opérant sur des arcs & sur des côtés plus grands & plus sensibles.

LE GRAPHOMETRE.

420. DESCRIPTION. Pour mesurer les angles sur le terrain, on se sert communément d'un instrument qu'on nomme graphometre : nom qui lui vient, de ce qu'il sert à la fois à mesurer & à écrire; de *γραφω*, *scribo*; & de *μετρον*, *metior*. (fig. 5^e)

1^o. Le *graphometre* est un assez grand demi-cercle AMBCA, exactement divisé en degrés, en minutes, en demi-minutes; & en quarts de minutes; & accompagné d'une alidade terminée par deux pinnules.

L'*alidade* est un diamètre DP, roulant sur le centre C. Les *pinnules* D & P, qui terminent de part & d'autre l'alidade, sont deux petites platines de métal, perpendiculairement élevées sur ses deux extrémités, & percées pour diriger le rayon visuel vers l'objet que l'on cherche. Quelquefois deux semblables pinnules sont fixées aux deux extrémités A & B du diamètre ACB.

Qu'un œil vise un objet à travers les pinnules B & A, tandis qu'un autre œil visera un autre objet à travers les pinnules P & D : les deux rayons visuels, qui s'entre-coupent nécessairement au centre commun C du cercle, formeront les deux côtés d'un angle ACD, qui sera mesuré par l'arc AD. Cet angle peut être, ou aigu, ou droit, ou obtus, selon que l'alidade DP s'écartera de A vers M, de M vers B; tandis que le diamètre AB reste immobile.

Le plan du *graphometre* porte sur un genou CIF, par

le moyen duquel ce plan peut se fixer dans une direction quelconque, horisontale, verticale, inclinée à l'horison, vers le nord ou vers le midi, vers l'orient ou vers le couchant. La partie inférieure IF du genou, est un petit *cylindre creux*, qui embrasse un petit cylindre de bois autour duquel il peut se mouvoir ; & ce cylindre de bois qui soutient le genou, est adhérent à un soutien terminé par trois bâtons solides, d'environ trois pieds de hauteur.

II°. A la place des fentes faites aux pinnules *ABDP*, on pourroit former quatre ouvertures circulaires *pbad*, d'environ sept ou huit lignes de diametre ; telles que les centres *c* de ces ouvertures eussent une même hauteur précise au-dessus du plan du graphometre, & que les lignes menées par ces quatre centres *c* s'entre-coupassent toujours dans un même point d'une perpendiculaire élevée sur le centre *C* du graphometre. A chacune de ces quatre ouvertures circulaires s'adapteroient, par le moyen de certaines coulisses pratiquées dans l'épaisseur des pinnules, des plaques de cuivre de deux especes différentes : l'une de ces plaques n'auroit, en *b* ou en *p*, qu'une petite ouverture circulaire, égale à l'épaisseur d'une épingle, pour donner passage au rayon visuel dans l'œil : l'autre plaque, en *a* ou en *d*, auroit une ouverture circulaire d'environ sept à huit lignes de diametre, au centre de laquelle se croiseroient perpendiculairement deux fils de soie, ou deux fils de laiton très-minces. Par ce moyen on feroit plus distinctement le point de l'objet auquel on mire.

Telle est la construction que nous avons donnée au graphometre, dont nous avons fait quelquefois usage. Tout l'art consiste à faire en sorte que les centres des plaques postiches, qui s'enchaînent à la partie saillante de l'alidade par deux coulisses, quadrent exactement une fois pour toutes avec les centres des

piquets sur chacun des deux côtés de l'angle, par exemple au point C & au point B.

II°. Dirigez l'alidade Ab , vers le piquet B, en regardant par les fentes des deux pinnules : faites ensuite tourner l'alidade en Ac , pour la diriger vers le piquet ou jallon C. (*).

III°. Comptez ensuite sur le graphometre (420), les degrés & minutes cdb compris entre les deux directions AB & AC de l'alidade : ce nombre de degrés & de minutes sera la mesure de l'angle CAB qu'il falloit mesurer. On mesurera de même les angles DAB, DAC, ABD, CBD, CBA.

PROBLÈME IV.

424. *Mesurer l'éloignement d'un objet inaccessible, par exemple l'éloignement A de la montagne AM, que l'on suppose inaccessible. (fig. 53.)*

SOLUTION. I°. Choisissez, à quelque distance de la montagne, sur un terrain en plaine & bien uni, deux lieux différens B & G, que l'on nomme *stations*; d'où vous puissiez appercevoir l'extrémité A de la montagne, & les deux stations B & G. Plantez un piquet en B, & un autre piquet en G : après quoi, menez une ficelle bien tendue en ligne droite, de B en G ; & mesurez exactement, avec une perche ou avec une toise, sur la ficelle tendue, la distance BG interceptée entre ces deux piquets ou entre ces deux stations.

II°. Placez un graphometre en B ; & mesurez l'angle $ABG = a$ Bg. placez un autre graphometre ou le

(*) On nomme *jallon*, un long bâton ou une longue perche, qu'on plante en terre, ou qu'on soutient sur la surface de la terre, dans une direction à peu près perpendiculaire à l'horison. On attache assez souvent au jallon, à une plus ou moins grande hauteur, un signal qu'on puisse aisément & nettement distinguer de loin.

même graphometre en G; & mesurez l'angle AGB. Le point A tient lieu de piquet ou de jallon, pour le côté GA. (423.)

III°. Les rayons visuels BA & GA, & la ligne GB qui est l'intervalle des stations, formeront le triangle BAG, dont on connoît l'angle B & l'angle G, & la base BG. Ces trois choses étant connues, on trouvera facilement le côté AB, ou AG, qui exprime l'éloignement du point A au point B ou au point G. (417.)

P R O B L È M E V.

425. *Mesurer une hauteur inaccessible, par exemple, la hauteur de la montagne AM, ou d'un nuage AN. (fig. 53.)*

SOLUTION. I°. Cherchez d'abord par le problème précédent, la distance BA, que vous prendrez pour base du triangle que vous voulez connoître.

II°. Ensuite disposez le plan du graphometre, en sorte qu'il soit perpendiculaire à l'horison: dirigez l'alidade au point A, & remarquez le degré & la minute a , qu'atteint l'alidade sur le graphometre.

III°. Enfin par le moyen du niveau (422), dirigez l'alidade parallèlement à l'horison sous le point A; duquel vous tirerez par la pensée une ligne AM, qui aille couper la ligne horizontale que forme l'alidade; & remarquez sur le graphometre le degré & la minute m , qu'atteint l'alidade horizontale.

Après ces opérations vous aurez un triangle ABM, dont vous connoissez le côté AB, que vous avez mesuré; l'angle B, qui est mesuré sur le graphometre par l'arc am ; l'angle M, qui est droit; & l'angle A qui est le supplément des deux autres angles connus: donc on connoitra la hauteur AM de la montagne au-dessus de l'horison BM de celui qui mesure. (417.)

IV°. S'il faut mesurer la hauteur d'un nuage AN;

il peut arriver ou que le nuage soit immobile, ou qu'il soit mobile. Si le nuage AN est immobile, on mesurera sa hauteur AM précisément comme celle de la montagne AM.

Mais si le nuage est mobile, il faudra que deux observateurs, placés l'un au point A & l'autre au point G, chacun avec son graphometre, dirigent leurs alidades vers un même point du nuage, par exemple, vers le point le plus élevé & le plus occidental A; & qu'ils mesurent les angles du triangle ABGA, dans un même instant qui sera marqué par un signal de convention; par exemple, par un coup de pistolet tiré du milieu x de la distance BG. Après quoi, on mesurera la hauteur AM du nuage, comme on vient de voir qu'on mesure la hauteur AM de la montagne inabordable & inaccessible AM.

Nous donnerons dans la trigonométrie, une autre méthode plus scientifique & moins sujette à erreur, pour résoudre ce problème, & celui qui le précède, & celui qui va le suivre. (702, 705.)

PROBLÈME VI.

426. *Trouver la distance de deux objets inaccessibles, tels que les sommets des deux montagnes C & D. (fig. 51.)*

SOLUTION. Prenez deux stations comme A & B, desquelles on puisse appercevoir les deux extrémités de ces deux montagnes; & mesurez, la perche à la main, la distance AB qui doit vous servir de base. Ensuite, du point A, mesurez l'angle DAB & l'angle CAB formés tous les deux par des rayons visuels. Du point B, mesurez aussi les angles CBA & DBA, formés pareillement par des rayons visuels.

1°. Dans le triangle BDA, on connoîtra les deux angles DAB & DBA, & le côté AB qui est l'inter-

vale des stations que vous aurez mesuré : par conséquent on trouvera le côté AD. (417.)

II°. De même dans le triangle ACB, on connoît les deux angles CBA & CAB, & le côté AB : par conséquent on trouvera aussi le côté AC.

III°. Enfin on considérera un troisième triangle CAD, dont on connoît déjà les deux côtés AD & AC. Ainsi si l'on mesure l'angle compris DAC, on trouvera le côté inconnu CD, qui est la distance cherchée. (418.)

Par le moyen des deux premiers triangles BDA & ACB, on peut trouver aussi la distance de l'autre station B, aux deux objets inaccessibles C & D.

PROBLÈME VII.

427. *Mesurer la hauteur d'un objet accessible & perpendiculaire à l'horison, par exemple, la hauteur d'un clocher ou d'une tour, par le moyen de l'ombre. (fig. 55.)*

SOLUTION. Plantez en terre un piquet *am*, qui soit perpendiculaire à l'horison, & par conséquent parallèle à la tour AC. Après quoi, mesurez l'ombre *aB* du piquet ; la hauteur *am* du piquet, sans y comprendre la partie enfoncée en terre ; l'ombre MB de la tour, prise sur un plan horisontal, ainsi que l'ombre du piquet. Enfin faites cette règle de trois : l'ombre du piquet, est à la hauteur du piquet ; comme l'ombre de la tour est à la hauteur de la tour : les trois premiers termes étant connus, on trouvera facilement le quatrième. (175.)

Il est évident que les deux triangles *aBm*, ABM, sont semblables : puisqu'ils ont leurs trois angles homologues égaux. L'angle *m* ou M formé sur l'horison par le pied du clocher & le pied du piquet, est droit. L'angle *a* ou A, formé sur la pointe du clocher &

sur celle du piquet par le rayon solaire AB ou par un autre rayon parallèle au rayon AB, est aussi égal dans l'un & l'autre triangle. Le troisième angle qui est le supplément à deux angles droits dans l'un & l'autre triangle, sera donc aussi égal dans les deux triangles.

Pour avoir la longueur de l'ombre d'un clocher terminé en pointe, il ne suffit pas de prendre la distance depuis la fin de l'ombre jusqu'au clocher : il faut y ajouter la moitié du diamètre du clocher ; parce que l'extrémité d'un clocher qui forme l'ombre, répond dans sa distance, au milieu du diamètre. Le piquet *ab* peut avoir son ombre & son triangle à part, hors de l'ombre & du triangle de la tour.

PROBLÈME VIII.

428. *Mesurer une hauteur accessible par le pied, par exemple, la hauteur de la tour AC, sans le secours de l'ombre & du graphometre. (fig. 55.)*

SOLUTION. Plantez en terre un piquet *a G*, qui soit perpendiculaire à l'horison, & par conséquent parallèle à la tour. Eloignez-vous de ce piquet à quelque distance, par exemple en *BH* : afin que vous puissiez voir l'extrémité *A* de la tour, par un rayon visuel *BaA* qui rase l'extrémité du piquet. Enfin regardez aussi un point de la tour tel que *M*, par un rayon horizontal *BM* ; & remarquez le point *m* du piquet, par lequel passe le rayon horizontal *BM*.

Tout cela posé, on aura deux triangles équiangles ou semblables ; savoir, *Bam* & *BAM*. Donc (403) dans le petit triangle, le côté *Bm* qu'on mesure, est au côté *ma* qu'on mesure ; comme dans le grand triangle, le côté *BM* qu'on mesure, est au côté *MA* qu'on ne pourroit mesurer.

Au côté trouvé *AM*, ajoutez la partie *MC* inférieure à votre horison : vous aurez la hauteur *AC* de

la tour, ou de tout autre objet semblable, perpendiculaire à l'horison.

PROBLÈME IX.

429. *Mesurer sans graphometre, la largeur inaccessible AD d'une riviere. (fig. 56.)*

SOLUTION. I°. Plantez-en terre un piquet A, sur lequel vous placerez à peu près horizontalement une grande perche droite CB de sept à huit pieds de longueur. Aux deux extrémités C & B de cette grande perche fixez deux petites regles à pinnules, mobiles sur leur centre, que vous dirigerez vers un point remarquable D, à l'autre bord de la riviere : vous aurez le triangle BCD.

II°. Cela posé, sans toucher à la perche & à ses deux regles, faites tourner votre piquet vers la direction accessible du rivage où vous mesurez ; & regardez en quel point *d* du rivage, les deux petites regles croisent leurs directions. La distance accessible du point A au point *d*, sera égale à la distance inaccessible du point A au point D : puisque les deux triangles qui ont leur pointe terminée au point D & au point *d*, sont égaux en tout, ou plutôt sont le même triangle placé sur deux différentes parties du terrain ou de l'étendue. (391.)

III°. Il est évident qu'on peut mesurer par la même méthode, toute autre distance semblable à la largeur de la riviere ; par exemple, la distance d'un point quelconque où sera planté le piquet qui soutient la perche & ses deux regles, au sommet d'un clocher, d'un arbre, d'un monticule. Il n'est peut-être point de méthode moins sujette à l'erreur, plus sûre & plus infaillible, pour mesurer de petites distances inaccessibles.

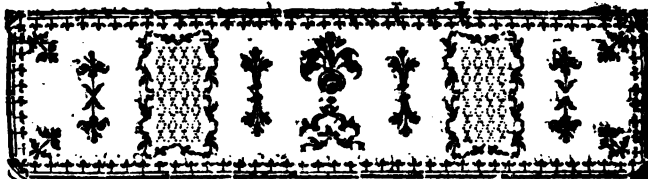
430. REMARQUE. On peut se proposer & résoudre

par les mêmes principes que nous venons de donner , d'expliquer & de démontrer , une foule d'autres problèmes de longimétrie , semblables à ceux que nous avons proposés & résolus.

Mais il faut observer ici en premier lieu , que cette méthode de résoudre les triangles en construisant des triangles semblables , ne donne jamais que des à-peu-près qui suffisent souvent , mais qui ne suffisent pas toujours dans la pratique : en second lieu , que cette méthode de résoudre les triangles , est souvent impossible ; savoir , quand le triangle à résoudre a quelque côté extrêmement grand ou extrêmement petit , par rapport aux autres côtés ; parce qu'alors il est comme impossible de faire un petit triangle qui soit assez exactement semblable au grand ; & que les résultats que l'on trouve , s'éloignent presque toujours très-considérablement du vrai résultat , tantôt en plus & tantôt en moins.

La Trigonométrie nous apprendra à résoudre les mêmes problèmes & une infinité d'autres , par le simple calcul arithmétique , avec la plus rigoureuse précision , & sans crainte d'aucune autre erreur , que celle qui peut se trouver dans quelqu'un des angles ou des côtés donnés ; quelle que soit l'inégalité des côtés & des angles , dans les triangles à résoudre & qu'on résout immédiatement en eux-mêmes.





PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE, OU ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES, GÉOMÉTRIE.

SECOND TRAITÉ.

LES SURFACES, OU LA PLANIMÉTRIE.

431. DÉFINITION. **L**es surfaces sont ou planes ou courbes. Une *surface plane* est une figure qui n'a ni enfoncement, ni élévation, entre ses côtés; ou une figure qui seroit touchée dans tous les points par une ligne droite indéfinie, laquelle seroit une révolution autour d'un des points de la surface pris pour centre: telle est sensiblement la surface des miroirs ordinaires, ou d'un bassin d'eau tranquille. Une *surface courbe* est une figure dont l'aire (380) est formée d'une infinité de points inégalement élevés ou enfoncés: telle est la surface convexe d'une boule, ou la surface concave d'une bombe ou d'un globe de verre creux.

La planimétrie a pour objet & les surfaces planes qu'elle mesure en elles-mêmes, & les surfaces courbes qu'elle mesure par leur rapport avec les surfaces planes.

La *planimétrie* est proprement l'art de mesurer les surfaces planes : elle les mesure en elles-mêmes. Quant aux surfaces courbes, elles se mesurent par leur rapport avec certaines surfaces planes, dont la mesure est connue. Ainsi la planimétrie a pour objet, ou directement ou indirectement, la mesure de toutes les surfaces. Nous traiterons des surfaces courbes dans la stéréométrie : il ne fera ici question que des surfaces planes.

Les surfaces planes peuvent être envisagées ou dans leur *égalité*, ou dans leur *rapport*, ou dans leurs *sections* : nous allons les considérer sous ce triple point de vue.

ARTICLE PREMIER.

ÉGALITÉ DES SURFACES.

Nous traiterons d'abord du quadrilatère, & ensuite des polygones. Les triangles trouveront leur place dans ce que nous avons à dire & sur le quadrilatère, & sur les polygones.

PARAGRAPHE PREMIER.

DU QUADRILATÈRE.

432. DÉFINITION. LE quadrilatère est une figure ou surface plane, terminée par quatre lignes droites. Le quadrilatère prend différens noms, selon la qualité de ses angles & de ses côtés.

I°. On le nomme *parallélogramme* ; lorsque ses côtés opposés sont parallèles. ABCD est un parallélogramme , aussi bien que BEFC. (*fig.* 58.)

II°. On le nomme *quarré* ; s'il a tous ses côtés & tous ses angles égaux. ABFG est un quarré. (*fig.* 1.)

III°. On le nomme *rectangle* ; s'il a tous ses angles droits , & seulement ses côtés opposés égaux. ABCD est un rectangle. (*fig.* 57.)

IV°. On le nomme *trapeze* ; s'il n'a aucun de ses côtés parallèles , ou s'il n'en a que deux. ABCD est un trapeze. (*fig.* 51.)

V°. On le nomme *lozange* ou *rhombe* ; s'il a tous ses côtés égaux , & seulement ses angles opposés égaux. ABCD est un lozange. (*fig.* 60.)

VI°. On le nomme *rhomboïde* ; lorsque ses angles ne sont point droits , & que ses seuls côtés opposés sont égaux. ABCD est un rhomboïde. (*fig.* 59.)

433. REMARQUE. Il suit de ces définitions que le terme de *quadrilatere* , est un nom générique par rapport à toutes les figures terminées par quatre lignes droites , & par conséquent par rapport au parallélogramme & au trapeze : que le nom de *parallélogramme* , est aussi un nom générique , par rapport au quarré , au rectangle , au lozange , au rhomboïde.

434. DÉFINITION. Une ligne droite , tirée d'un angle d'un quadrilatere quelconque , à l'angle opposé , s'appelle *diagonale*. Par exemple , dans le quadrilatere ABDCA , les lignes AD & BC , sont deux diagonales (*fig.* 51). De même , AC & BC , sont deux autres diagonales. (*fig.* 57 , 59.)

Un quadrilatere quelconque se désigne & se marque indifféremment , ou par quatre lettres , placées aux sommets des angles ; ou seulement par deux lettres AD , qu'on place au sommet de deux angles opposés. (*fig.* 59.)

THÉORÈME I.

435. Dans tout quadrilatère, la somme des quatre angles, est égale à quatre angles droits. (fig. 51.)

DÉMONSTRATION. Soit le quadrilatère ABCD. Si on tire la diagonale AD, elle divisera le quadrilatère en deux triangles, dont les angles seront formés des angles même du quadrilatère.

Or dans tout triangle, les trois angles sont égaux à deux angles droits (384) : donc la somme des angles des deux triangles ADB & ADC, vaudra quatre angles droits : donc la somme des quatre angles du quadrilatère, égale aux angles de ces deux triangles, vaut aussi quatre angles droits. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

436. La diagonale divise un parallélogramme quelconque, en deux parties égales, qu'en deux triangles égaux en tout. (fig. 59.)

DÉMONSTRATION. Soit un parallélogramme quelconque ABCD. La diagonale AC divise ce parallélogramme en deux triangles, dont les trois angles & les trois côtés sont égaux en tout. Car,

1°. Par l'hypothèse, & par la définition du parallélogramme, le côté AB du premier triangle est égal au côté CD du second : le côté AC est égal au côté BD : le côté BC est commun aux deux triangles.

De même par l'hypothèse (432), l'angle A du premier triangle, est égal à l'angle D du second. Ensuite l'angle ABC du premier est égal à l'angle BCD du second : puisqu'ils sont alternes-internes (359). Par la même raison, l'angle ACB du premier triangle est égal à l'angle DCB du second : donc les deux triangles ABC & DCB sont égaux en tout.

III°. On peut démontrer aussi la même proposition, par la preuve de *superposition* (10). Placez par la pensée, D sur A, DC sur AB : alors (392) DB tombera sur AC, & BC sera commun aux deux triangles ; donc ces deux triangles ABC & DBC sont égaux en tout. C. Q. F. D.

P R O B L È M E.

437. *Faire un parallélogramme qui ait ses côtés égaux aux lignes données M & N ; & un angle égal à l'angle donné O. (fig. 59.)*

SOLUTION. I°. Sur un point quelconque A, menez une ligne indéfinie AC ; & sur cette ligne, faites l'angle A égal à l'angle donné O (344). Après quoi, sur les côtés indéfinis AC & AB de l'angle A, prenez AC égal à la ligne donnée M ; & AB égal à l'autre ligne donnée N.

II°. Ensuite du point C, tirez la ligne indéfinie CD, parallèle au côté AB (363) ; & sur cette parallèle indéfinie, prenez $CD = AB$: vous aurez le troisième côté CD du parallélogramme. Après quoi, du point B menez au point D, la droite BD : elle sera le quatrième côté du parallélogramme à construire.

É L É M E N S D E S S U R F A C E S.

438. OBSERVATION. Comme la ligne est composée de points contigus ; de même la surface est composée de lignes posées les unes à côté des autres. Or comme on ne peut concevoir que des points sans aucune étendue quelconque, forment une longueur ; de même on ne peut concevoir que des lignes sans aucune largeur quelconque, forment une surface (*Phys.* 47 & 69). C'est pourquoi il faut considérer ces lignes contigües, qui forment une surface, comme ayant

une largeur extrêmement petite, qui soit la même dans chacune.

Ainsi le *point mathématique* doit être considéré ou comme un petit quarré ou comme un petit cercle ; moindres que tout ce qu'on peut imaginer de plus petit ; & la *ligne mathématique*, comme une suite de petits cercles ou de petits quarrés, égaux chacun au point mathématique. Si les quarrés de la ligne AB sont infiniment petits ; ce sera une ligne mathématique, composée d'une infinité de points mathématiques. (*fig. 10.*)

I°. Les *éléments des surfaces* en général, sont des lignes d'une largeur infiniment petite & égale dans chacune de ces lignes ; en telle sorte que cent millions de ces lignes contiguës dans une surface quelconque X, forment une largeur précisément égale à la largeur que forment cent millions d'autres lignes contiguës dans une autre surface quelconque Y. L'inégale densité des corps, leur plus ou moins de pores, ne change en rien la nature de ces lignes géométriques : parce qu'on fait ici abstraction de ces inégalités ; & que l'on considère tous les corps comme sans pores, & leurs lignes élémentaires, comme non interrompues par des vuides.

Ces lignes, éléments des surfaces, sont considérées par les géomètres, comme des *éléments indivisibles* : parce que n'ayant qu'une largeur infiniment petite, dont on fait abstraction, on les regarde comme indivisibles selon leur largeur ; quoique dans le fond elles puissent absolument être divisées même selon cette dimension.

II°. Les *éléments d'un parallélogramme*, sont une infinité de lignes parallèles & égales à la base, lesquelles remplissent l'espace compris entre ses côtés. Cet espace s'appelle surface, superficie, ou aire. Le nombre de ces éléments se mesure dans les parallélogrammes, par une *perpendiculaire à la base*, qui est la *hauteur* du pa-

rallélogramme. De sorte que si la hauteur d'un parallélogramme, est double de la hauteur d'un autre parallélogramme ; le nombre des élémens du premier, est double du nombre des élémens du second : si la hauteur est triple, le nombre des élémens est triple, & ainsi du reste. La ligne AB mesure le nombre des élémens du parallélogramme ABCD. (*fig. 57.*)

III°. Les *éléments d'un triangle*, sont une infinité de lignes parallèles à la base, qui sont d'autant plus courtes, qu'elles sont plus éloignées de la base. Le nombre de ces élémens se mesure dans le triangle, comme dans le parallélogramme, par une *perpendiculaire* tirée du sommet du triangle sur la base, prolongée s'il le faut. La ligne AB mesure le nombre des élémens du triangle ACB. (*fig. 57.*)

IV°. Les *éléments d'un cercle* sont une infinité de circonférences concentriques ; c'est-à-dire, qui ont le même centre que le cercle. Dans le cercle, le nombre des circonférences concentriques qui en sont les élémens, est mesuré par le *rayon* : parce que le cercle étant rempli de circonférences, il est clair que le nombre des circonférences est égal au nombre des points du rayon. La ligne CA mesure le nombre des élémens du cercle ADA. (*fig. 54.*)

V°. Les *éléments des autres surfaces*, comme des trapeses, des polygones, des secteurs de cercle, sont une infinité de lignes que l'on peut réduire à celles des figures précédentes : ainsi qu'on le verra par la suite de cet ouvrage.

Comme nous ferons assez fréquemment usage de cette *méthode des indivisibles* ; il est à propos d'en donner ici une idée suffisamment développée. Cette méthode doit son origine & son succès à un célèbre géometre du dernier siècle, à Bonaventure Cavalleri, natif de Milan, de l'ordre des Hiéronimites, qui la publia en 1635 dans un ouvrage latin, sous un titre

qui répond à celui de géométrie des indivisibles dans le continu. Cavalieri imagine le continu (Phy. 44-) comme composé d'un nombre infini de parties qui sont ses derniers élémens, ou qui sont les derniers termes de la décomposition qu'on peut en faire, en le divisant continuellement en tranches paralleles entre elles. Ce sont ces derniers élémens qu'il appelle *indivisibles*; & c'est dans le rapport selon lequel ils croissent ou décroissent, qu'il cherche la mesure des figures, ou leur rapport entre elles. Voici comment nous concevons ces élémens des surfaces, que nous envisagerons aussi dans la suite comme élémens des solides. (fig. 57.)

VI°. Si dans le rectangle ABCD, par exemple, on conçoit que les deux lignes BC, *bc*, soient paralleles & infiniment près l'une de l'autre, sans être contiguës; l'infiniment petit espace compris entre ces deux lignes, ou une ligne d'une infiniment petite largeur qui couvrirait cet espace, sera un *élément* du rectangle ABCD ou du triangle ACB. Or il est clair qu'un nombre indéterminé d'éléments semblables, tous égaux & tous contigus, formera la surface du rectangle ABCD. (fig. 57.)

Quoiqu'on ne puisse pas déterminer le nombre absolu de ces élémens infiniment petits, dont la somme forme une surface quelconque ABCD: en supposant que la hauteur AB du rectangle soit d'un pouce, & que cette hauteur embrasse un million d'éléments tous égaux à celui dont nous venons de parler; il est clair qu'un autre rectangle de même base & d'une hauteur double, ayant sa surface formée de semblables élémens, en contiendra le double ou deux millions; & qu'un troisieme rectangle qui aurait la hauteur du premier & une base double, aurait le double de surface: puisqu'il aurait le même nombre d'éléments, & que chacun de ces élémens seroit double en longueur; & ainsi du reste. De même (fig. 4);

Si dans le carré ABCDA, on conçoit que les deux lignes mn , rs , soient parallèles & infiniment près l'une de l'autre ; l'infiniment petite largeur comprise entre ces deux parallèles, ou une ligne d'une infiniment petite largeur qui couvrirait cet espace, sera un *élément de la surface carrée* ABCDA.

Et si on conçoit que l'infiniment petite largeur comprise entre ces deux lignes soit la hauteur infiniment petite d'une tranche plane & infiniment mince $mmxrr$ formée dans le cube BF ; cette tranche infiniment mince & considérée comme indivisible dans son infiniment petite hauteur ou épaisseur, sera un *élément du cube* AF. En supposant que la hauteur totale AB du cube, égale à une toise, renferme un billion d'éléments égaux à la tranche $mmxrr$; il est clair qu'un cube double en hauteur renfermera un nombre double d'éléments semblables, & que chacun de ces éléments sera double en longueur & double en profondeur, ou quadruple en surface ; & que les deux cubes seront entre eux en solidité, comme 1 est à 4 $\times 2 = 8$. De même encore (*fig. 68*).

Si dans le triangle ACB, les deux lignes AB, mn , sont parallèles & infiniment proches sans être contiguës ; l'infiniment petite surface comprise entre ces deux lignes, ou une ligne d'une infiniment petite largeur qui couvrirait cette infiniment petite surface, sera un *élément de ce triangle*. Et si dans le cercle ADA, les deux circonférences ADA, mm , sont de même infiniment proches sans être contiguës ; l'infiniment petite surface circulaire comprise entre ces deux circonférences, ou une ligne circulaire d'une infiniment petite largeur qui couvrirait cette infiniment petite surface, sera un *élément de la surface circulaire* ; élément qui en se développant, ou en se convertissant en surface rectiligne infiniment peu large, deviendra l'infiniment petite trapèze $AmmB$.

VII°. Les oreilles accoutumées à l'ancien langage d'Euclide & d'Archimede , se révolterent contre le langage nouveau de Cavalleri , qui , mal conçu , leur parut peu géométrique. Mais Cavalleri montra & fit sentir que sa méthode ne s'écartoit en rien de la rigueur géométrique ; & qu'elle n'étoit au fond que la *méthode d'exhaustion* des anciens simplifiée. En effet , dit l'auteur de l'histoire des Mathématiques , ces surfaces , ces lignes , dont Cavalleri examine les rapports & les sommes , ne sont autre chose que les petits solides , ou les triangles inscrits & circonscrits d'Archimede , poussés à un si grand nombre , que leur différence avec la figure qu'ils environnent , soit moindre que toute grandeur donnée. Mais tandis qu'Archimede , à chaque fois qu'il entreprend de démontrer le rapport d'une figure curviligne avec une autre connue , emploie un long circuit de paroles & un tour indirect de démonstration ; le géometre moderne , s'élançant en quelque sorte dans l'infini (238) , va saisir par l'esprit le dernier terme de ces divisions & sous-divisions continuelles , qui doivent enfin anéantir la différence des figures rectilignes inscrites ou circonscrites , avec la figure curviligne qu'elles renferment.

C'est à peu près ainsi que , quand on détermine la somme d'une progression géométriquement décroissante (295) , on suppose le dernier terme égal à zero. Car quoiqu'on ne puisse jamais atteindre à ce dernier terme ; l'esprit voit cependant avec évidence , qu'il est plus petit qu'aucune grandeur assignable , quelque petite qu'elle soit : par conséquent , il ne peut le désigner que par zero ; puisqu'il n'y a que le rien , qui soit moindre que toute grandeur possible. De même , on doit concevoir les lignes & les surfaces dont Cavalleri fait les élémens des figures ou des solides , comme les dernières divisions dont nous avons

parlé : ce qui suffit pour corriger ce que son expression peut avoir de dur & de contraire à la rigoureuse géométrie. D'ailleurs il n'est aucun cas dans la méthode des indivisibles, qu'on ne puisse facilement réduire à la forme ancienne de démonstration : ainsi c'est s'arrêter à l'écorce, que de chicanner sur le mot d'indivisibles. Il est impropre, si l'on veut (*Phys.* 68) : mais il n'en résulte aucun danger pour la géométrie ; & loin de conduire à l'erreur, cette méthode a servi à atteindre à des vérités qui avoient échappé jusques-là aux efforts de tous les géomètres.

On peut faire contre cette *méthode des indivisibles*, quelques frivoles objections, qui lui sont communes avec toute géométrie théorie de l'infini, théorie adoptée avec tant de succès par les modernes géomètres, soit dans la géométrie élémentaire, soit dans la géométrie transcendante ; théorie dans laquelle on regarde & on doit avec raison toujours regarder comme nulle, toute *différence* qui n'est qu'une infiniment petite partie de deux grandeurs que l'on compare entre elles (241). On verra dans plusieurs articles de ce traité & du traité suivant, quelle élégance & qu'elle facilité cette méthode met dans les démonstrations d'une foule d'objets de la géométrie.

De l'observation que nous venons de faire, & de l'explication simple & lumineuse qui en fixe & l'idée & l'objet, découle la proposition suivante ; dont l'évidence se fait sentir par elle-même, & qu'on peut mettre au rang des axiomes.

439. AXIOME. *Deux figures ou surfaces sont égales entre elles, lorsque les élémens de l'une sont égaux aux élémens de l'autre, & que le nombre de ces élémens est égal dans l'une & dans l'autre : soit que ces deux figures ou surfaces soient semblables, soit qu'elles soient dissimilaires. Par exemple, un triangle & un cercle sont égaux en surface ; si le triangle a le même*

nombre de lignes élémentaires , que le cercle ; & si toutes les lignes du triangle , sont égales à toutes les lignes correspondantes du cercle.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

440. *Un rectangle , & un parallélogramme obliqu'angle , de même base & de même hauteur , sont égaux en surface. (fig. 58.)*

DÉMONSTRATION. Soit le rectangle ABCD , & le parallélogramme obliqu'angle BCEF : ils ont une même base BC : ils ont aussi une même hauteur ; puisqu'ils sont compris entre les mêmes parallèles BCK & ADF.

I°. D'abord le rectangle & le parallélogramme obliqu'angle ont en commun , le triangle ou la partie BOC. Il n'y a donc plus qu'à faire voir que l'autre partie ABOD du rectangle , est égale à la partie EOCF du parallélogramme : ce que je démontre ainsi.

II°. Le triangle ABE , est égal en tout au triangle DCF. Car en premier lieu , la perpendiculaire AB du premier , est égale à la perpendiculaire DC du second : puisque ce sont des côtés opposés d'un rectangle. En second lieu , les deux obliques BE & CF , sont aussi égales : puisque ce sont des côtés opposés d'un parallélogramme ; & que ces côtés opposés sont nécessairement égaux. En troisième lieu , les lignes AE & DF , sont encore égales. Car d'abord elles ont une partie commune DE : les deux autres parties AD & EF , sont égales entre elles ; puisqu'elles sont égales chacune à la base BC. Par conséquent les trois côtés du premier triangle ABE , sont égaux aux trois côtés du second DCF. Ainsi ces deux triangles sont égaux en tout. (392 & 432.)

III°. Otez donc la partie DOE , qui est commune aux deux triangles : le reste ABOD du premier triangle , sera égal au reste EOCF du second. Or ces restes

font les deux parties du rectangle & du parallélogramme obliqu'angle, qu'il falloit démontrer égales: par conséquent le rectangle & le parallélogramme obliqu'angle sont égaux. C. Q. F. D.

441. REMARQUE. 1°. Si on prend pour élémens du parallélogramme obliqu'angle BCFE, des élémens parallèles à la base BC; les élémens du rectangle & du parallélogramme seront évidemment égaux en nombre & en longueur.

II°. Si on prend pour élémens du parallélogramme obliqu'angle, des élémens parallèles au côté CF, qu'on peut considérer comme base; le parallélogramme aura moins d'élémens que le rectangle, mais il les aura plus grands; & l'excès en grandeur compensera le défaut en nombre. La hauteur du rectangle sera toujours AB: la hauteur du parallélogramme obliqu'angle, si on prend CF pour base, sera OH. Le parallélogramme obliqu'angle aura donc moins de hauteur, s'il a plus de longueur: l'une peut donc compenser l'autre. Par exemple,

Que le rectangle ait un pouce de long sur un pouce de large; & le parallélogramme obliqu'angle, cent pouces de long sur un centième de pouce de large. Dans le rectangle, on aura, $1 \times 1 = 1$. Dans le parallélogramme, on aura $100 \times \frac{1}{100} = 1$. (67.)

THÉORÈME II.

442. Un triangle quelconque est à la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur. (fig. 57.)

DÉMONSTRATION. 1°. Soit le triangle ABC. Qu'il me soit permis de rendre tous les élémens qui le composent, égaux en longueur à la base BC: j'aurai le parallélogramme ABCD, divisé en deux parties égales par la diagonale AD (436). Or une de ces parties

égales du parallélogramme, est le triangle ABC : donc le triangle est la moitié du parallélogramme.

II°. Il est clair qu'on peut faire la même démonstration sur un triangle quelconque, rectangle, obtusangle, acutangle. Car soit le triangle ABC (fig. 59). Tirez la ligne CD, égale & parallèle au côté AB ; & formez le parallélogramme ABDC. Ensuite tirez par la pensée, des lignes parallèles à la base AC, autant qu'il en faudra pour remplir la surface du parallélogramme. La diagonale BC divisera la surface de ce parallélogramme en deux parties égales, dont l'une sera la surface du triangle. C. Q. F. D.

THÉORÈME III.

443. *Un triangle, qui a même base qu'un parallélogramme, & qui a une hauteur double, est égal en surface au parallélogramme. (fig. 61.)*

DÉMONSTRATION. Soit le parallélogramme quelconque ABDC ; & le triangle CED, dont la base CD est la même que celle du parallélogramme, & dont la hauteur EH est double. Il s'agit de démontrer que le triangle & le parallélogramme sont égaux en surface. Pour cela,

I°. Supposons un autre parallélogramme CGFD, formé entre les côtés prolongés du premier, & qui ait même base & même hauteur que le triangle CED. Ce second parallélogramme CGFD, sera double du premier CABD : puisqu'il a évidemment un nombre double d'éléments de même longueur ; ou parce qu'ayant une même longueur CD, il a une hauteur double EH.

II°. Cela posé, je raisonne ainsi. Le parallélogramme ABCD, est égal à la moitié du parallélogramme CGFD : comme on vient de le démontrer. Le triangle CED, est aussi égal à la moitié du même parallélogramme CGFD ; selon le théorème précédent. Donc

le parallélogramme $ABDC$, & le triangle CED , sont égaux entre eux : puisqu'ils sont égaux chacun en surface, à la moitié du parallélogramme $CGFD$.

III°. On conçoit aisément que la même démonstration auroit lieu, si le triangle ayant toujours la même base CD , portoit son sommet E , en F , ou en G , ou en M , en conservant toujours la même hauteur, ou en aboutissant toujours aux deux mêmes parallèles CD & MF ; puisqu'il seroit toujours la moitié du parallélogramme $CGFD$ de même base & de même hauteur (442). Donc dans toute position & sous toute figure possible, un triangle, qui a même base qu'un parallélogramme, & qui a une hauteur double, est égal en surface à ce parallélogramme. $C. Q. F. D.$

T H É O R È M E I V.

444. *La surface d'un trapeze, dont les bases supérieure & inférieure sont parallèles, est égale à un parallélogramme de même hauteur ; dont la base seroit égale à une ligne qui couperoit le trapeze par le milieu, parallèlement à ses deux bases. (fig. 62.)*

DÉMONSTRATION. Soit le trapeze $CABD$, dont les deux bases AB & CD soient parallèles. Tirez la ligne LH , parallèle aux deux bases, & également éloignée de l'une & de l'autre base. Du point H , tirez encore la ligne PE , parallèle au côté AC (363). Je dis que le trapeze $CABD$ est égal en surface, au parallélogramme $CAEP$.

I°. D'abord le pentagone $ACPHB$ est commun au parallélogramme & au trapeze : il reste donc à démontrer que la partie PHD du trapeze, est égale à la partie BHE du parallélogramme.

II°. La partie PHD du trapeze, est égale à la partie BHE du parallélogramme. Car ces deux triangles sont

égaux en tout, dans leurs angles & dans leurs côtés. D'abord l'angle H, est égal dans l'un & dans l'autre ; puisque ce sont deux angles opposés au sommet. L'angle D & l'angle B sont aussi égaux : puisqu'ils sont alternes-internes. L'angle P & l'angle E sont aussi égaux ; pour la même raison. (359). Ensuite la ligne DH est égale à la ligne BH : puisqu'elles occupent l'une & l'autre , avec le même degré d'inclinaison, la moitié de l'espace compris entre les deux bases parallèles AB & CD. Donc, en donnant pour bases à ces deux triangles, les côtés égaux DH & BH ; on trouvera que les deux triangles BHE & PHD sont égaux en tout. (391.)

III°. Ainsi le trapeze & le parallélogramme ont pour partie commune le pentagone ACPHB. Le trapeze a de plus le triangle PHD : le parallélogramme a de plus le triangle BHE. Ces deux triangles sont égaux : donc en les ajoutant au pentagone commun, on aura deux tous égaux, qui sont le trapeze & le parallélogramme. C. Q. F. D.

MESURES DES SURFACES.

445. OBSERVATION. *Mesurer une ligne*, ou une étendue en simple longueur, c'est porter sur cette étendue, des mesures connues de même dimension ; par exemple, des pouces, des pieds, des toises, des lieues. *Mesurer une surface*, ou une étendue en longueur & en largeur, c'est porter sur cette étendue, des mesures connues de même dimension, ou des mesures qui aient à la fois & une longueur & une largeur ; par exemple, des pouces carrés, des pieds carrés, des toises carrées, des lieues carrées.

446. DÉFINITION. On nomme *toise carrée*, une étendue qui a une toise de longueur & une toise de largeur, & dont la figure est un carré. De même un *piéd carré* est une figure égale à un carré d'un piéd

de longueur & d'un pied de hauteur ou de largeur. (fig. 4.)

1°. Si la surface carrée BADC représente une *toise carrée* de six pieds de longueur BC, sur six pieds de largeur BA; elle renfermera 36 carrés, égaux chacun à un pied carré. Chaque *pied carré* A, de douze pouces de longueur sur douze pouces de largeur, contiendra 144 pouces carrés. Chaque *pouce carré*, de douze lignes de longueur sur douze lignes de largeur, contiendra 144 lignes carrées. On conçoit par-là ce qu'on doit entendre par une *lieue carrée*, qui est un carré d'une lieue de longueur sur une lieue de largeur; & ainsi du reste.

II°. Comme la mesure d'un carré est très-facile à saisir, on tâche de réduire toutes les surfaces à des carrés; & une surface est censée mesurée, quand on a trouvé & démontré qu'elle est égale à un carré connu, ou à une figure qu'on réduit facilement en carré ou dont on connoît le rapport avec un carré; telle qu'est un rectangle: comme on va le voir dans le théorème suivant, qui apprenant à évaluer en mesures connues la surface d'un rectangle, apprend par conséquent à évaluer toute surface qui sera égale à ce rectangle, ou à la moitié de ce rectangle; & ainsi du reste.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

447. *La surface d'un rectangle quelconque, est égale au produit de sa base par sa hauteur. (fig. 63.)*

DÉMONSTRATION. 1°. Soit le rectangle ABCD, dont la base BC contienne quatre toises; & dont la hauteur AB en contienne trois. Si on multiplie la base $= 4$, par la hauteur $= 3$; le produit sera 12: il faut faire voir que la surface de ce rectangle contient 12, toises carrées.

Pour cela, divisez le côté ou la hauteur AB en trois toises, & la base BC, en quatre. Ensuite par les points

de division du côté AB, menez des parallèles à la base; & par les points de division de la base, tirez des parallèles au côté AB. Toutes ces parallèles, en s'entre-coupant, formeront des toises quarrées, disposées en rangs parallèles à la base. Chacun de ces rangs contiendra autant de toises quarrées qu'il y a de toises en longueur dans la base; c'est-à-dire, quatre.

Mais d'ailleurs, il y aura autant de rangs de ces toises quarrées, qu'il y a de toises en longueur dans le côté ou dans la hauteur AB du rectangle; c'est-à-dire, trois. Donc la somme des toises quarrées du rectangle, est égale à 3 fois 4, ou à 4×3 ; qui est le nombre des toises de la base, multiplié par le nombre des toises de la hauteur AB.

II°. Si la base BC, au lieu de quatre toises de longueur, en avoit mille, la hauteur AB du rectangle restant la même; on conçoit que cette surface auroit trois rangs de toises quarrées, qui contiendroient chacun mille toises quarrées: ce qui feroit 3000 toises quarrées, produit de la base 1000 par la hauteur 3.

III°. Si la base BC ayant mille toises de longueur, la hauteur AB du rectangle en avoit cent; on conçoit que cette surface auroit cent rangs de mille toises quarrées chacun, ou cent fois mille toises quarrées: ce qui donneroit 100000 toises quarrées, produit de la base 1000 par la hauteur 100; & ainsi de suite à l'infini. C. Q. F. D.

448. COROLLAIRE I. La surface d'un rectangle étant le produit de la base, par la hauteur; il est évident que *ce même produit exprimera la surface de toute figure, égale en surface au rectangle*. Par exemple, quand on aura démontré que tel parallélogramme obliqu'angle, ou que tel triangle, a la même surface que le rectangle; en prenant la mesure du rectangle, on aura celle du parallélogramme ou du triangle, qui lui est égale. D'où il résulte :

I°.

I°. Que la surface d'un parallélogramme obliqu'angle est le produit de sa base, par sa hauteur; c'est-à-dire, par une perpendiculaire menée du côté parallèle à la base, sur la base: puisque ce parallélogramme est égal en surface à un rectangle de même base & de même hauteur. (440.)

II°. Que la surface d'un triangle quelconque est le produit de sa base, par la moitié de sa hauteur; c'est-à-dire, par la moitié d'une perpendiculaire menée du sommet du triangle sur la base, prolongée s'il le faut: puisque ce triangle est la moitié d'un parallélogramme, & par là même d'un rectangle, de même base & de même hauteur. (442.)

III°. Que la surface d'un trapeze dont les deux bases sont parallèles, est le produit d'une moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux bases, par sa hauteur: puisque ce trapeze CABD, est égal en surface au parallélogramme CAEP (444), lequel est égal en surface à un rectangle de même base & de même hauteur. (fig. 62.)

La ligne LH, égale à la base CP du parallélogramme, est moyenne proportionnelle arithmétique entre la base supérieure & la base inférieure du trapeze: c'est-à-dire, que la base CD, surpasse la ligne LH; autant que la ligne LH, surpasse la base AB: de sorte que la somme des deux bases AB & CD est égale à la moyenne proportionnelle arithmétique LH, prise deux fois; & qu'en prenant la moitié de la somme des deux bases, on a la moyenne proportionnelle arithmétique LH. (185.)

IV°. Que si aucun des côtés du trapeze ABDCA, n'est parallèle au côté opposé; il faut tirer une diagonale d'un angle quelconque à l'angle opposé. La diagonale AD ou BC divisera la surface du trapeze en deux triangles égaux ou inégaux, qu'on mesurera chacun séparément pour en avoir la surface. La somme

des deux surfaces de ces deux triangles ACB & CBD, sera la surface totale du trapeze. (fig. 51.)

449. COROLLAIRE II. *Si on a plusieurs rectangles, ou plusieurs parallélogrammes obliqu'angles de même hauteur; on trouve la somme de leurs surfaces, en multipliant la somme des bases par une seule hauteur. (fig. 63.)*

DÉMONSTRATION. I°. Soient plusieurs rectangles égaux ou inégaux AB nn , $nnrr$, $rrDC$, renfermés entre les parallèles AD & BC : ils auront la même hauteur AB ou nn . Multipliez la base totale BC, par la hauteur d'un de ces rectangles, par exemple, par la hauteur nn : vous aurez la surface de tous ces rectangles; selon le théorème précédent.

II°. Plusieurs parallélogrammes obliqu'angles, de même base & de même hauteur que ces rectangles, leur seroient égaux en surface, chacun à chacun (440) : donc en multipliant la base totale de tous ces parallélogrammes obliqu'angles par la hauteur commune d'un d'entre eux, on aura la surface totale de tous ces parallélogrammes obliqu'angles.

III°. Il est indifférent que ces parallélogrammes, rectangles ou obliqu'angles, soient contigus ou séparés : puisqu'il est évident qu'en séparant les rectangles AB nn , $nnrr$, $rrCD$, on ne leur donne ni plus ni moins de surface. Par exemple (fig. 16) :

Soient les rectangles séparés a AB b , m MNH, TrS x , renfermés entre les mêmes parallèles CT & AR. Il est évident qu'en multipliant AB + MN + rs , par une hauteur a A ou m M, on aura la surface totale de ces trois rectangles; & qu'on auroit de même la surface totale de trois parallélogrammes obliqu'angles, tels que TRV x , qui auroient même base & même hauteur que chacun de ces rectangles.
C. Q. E. D.

450. COROLLAIRE III. Si on a plusieurs triangles de même base & de même hauteur ; on trouve la somme de leurs surfaces en multipliant la somme des bases par la moitié d'une hauteur. (fig. 16.)

DÉMONSTRATION. Soient les triangles ACB, MHN, RTS, qui ont une même hauteur, étant renfermés entre les mêmes parallèles CT & AS. Ces triangles sont chacun respectivement la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur (442), lequel est égal en surface au rectangle de même base & de même hauteur ab BA, ou m HNM, ou T r Sx (440) ; donc ces triangles sont la moitié de ces rectangles. Or en multipliant toutes les bases de ces rectangles, par une seule hauteur, on a la somme des surfaces de ces rectangles (449) : donc en multipliant toutes ces mêmes bases, par la moitié d'une hauteur ; on aura un produit de moitié plus petit (221), qui exprimera la surface de tous ces triangles. C. Q. F. D.

451. REMARQUE. Quand on a, en nombres ronds & en grandeurs homogenes, la base & la hauteur d'un rectangle, d'un parallélogramme obliqu'angle ; d'un triangle ; il est facile de trouver la surface de ces figures : puisqu'il ne s'agit que de multiplier le nombre qui exprime la base, par le nombre qui exprime la hauteur ou la moitié de la hauteur ; comme on vient de l'expliquer & de le démontrer.

Mais il arrive très-fréquemment que les deux dimensions, la base & la hauteur, ne sont pas des mesures ou des grandeurs en tout homogenes : par exemple, la base sera de 18 toises & 4 pieds ; & la hauteur, de 7 toises & 5 pouces. Alors, pour trouver la surface de ces figures ; il faut chercher le produit de la base par la hauteur, ou par la voie des parties aliquotes (70) ; ou par une autre méthode que nous donnerons bientôt, & qui a beaucoup de rapport avec les parties aliquotes. (462.) Bb ij

PROBLÈME I.

452. *Mesurer la surface d'une petite étendue de pays, par exemple, d'un pré ou d'un champ.*

SOLUTION. I°. Si le terrain à mesurer, est un parallélogramme rectangle ou obliqu'angle, dont on puisse prendre tout d'un coup, & la longueur qui sera la base, & la largeur qui sera la hauteur; il est facile d'en trouver la surface. Par exemple (*fig. 57*),

Soit ABCD le terrain à mesurer. D'abord prenez le côté BC pour base; & ayant tendu une ficelle de B en C, mesurez, la perche à la main, la longueur ou la base BC, sur la ficelle en ligne droite. Ensuite, d'un point quelconque C de cette base, menez perpendiculairement sur le côté opposé AD du parallélogramme, une autre ficelle CD; & avec la même perche, mesurez la longueur de la perpendiculaire CD, qui sera la hauteur du parallélogramme ABCD. Le produit de la base BC, par la hauteur CD, sera la surface du terrain à mesurer ABCD. (448.)

II°. Si le terrain à mesurer est irrégulier, en telle sorte que sa figure ne soit ni un parallélogramme, ni un trapeze, ni un triangle; observez qu'il n'y a aucun terrain que vous ne puissiez réduire en triangles, en le divisant en parties égales ou inégales. Par exemple (*fig. 64*),

Soit le terrain à mesurer, l'espace ou la figure ABFGKIECDA. En plantant des piquets ou des jallons dans tous ces points; vous aurez votre terrain divisé en huit triangles, que vous mesurerez chacun séparément; comme vous avez mesuré le parallélogramme précédent.

Menez donc une ficelle tendue en ligne droite, de A en B; & mesurez exactement, la perche à la main, cette ligne AB que vous prendrez pour base.

Ensuite du point ou du piquet C, menez une autre ficelle perpendiculairement sur la base AB, prolongée s'il le faut; & mesurez, la perche à la main, cette perpendiculaire, qui sera la hauteur du triangle ABC. Après quoi multipliez la base AB, par la moitié de la perpendiculaire menée du point C sur la base AB: le produit sera la surface du triangle ABC. (448. II^o.)

En opérant de la même manière sur le triangle BDF, & sur chacun des autres triangles; vous trouverez la surface de chacun des huit triangles: la somme de ces huit surfaces, est la surface du terrain à mesurer.

III^o. Ce problème est, comme on voit, la règle & le fondement de l'*arpentage*, qui n'est autre chose que l'art géométrique de mesurer & d'évaluer en arpens quarrés, la superficie d'un terrain renfermé entre certains points donnés, & entre certaines lignes droites menées par ces points. La dénomination d'*arpentage* a été donnée en France, à cette petite partie de la géométrie pratique: parce que l'*arpent* (7. V^o.) y est la mesure la plus usitée dans les dimensions des terrains un peu considérables.

Les problèmes suivans seront de même la règle & le fondement de la *topographie*, qui n'est autre chose qu'un arpentage plus en grand, ou que l'art géométrique de prendre & de tracer les dimensions d'un pays plus ou moins étendu, tel qu'une province ou un royaume. Topographie: de *τοπος*, *locus*, *regio*; & de *γράφω*, *scribo*.

PROBLÈME II.

453. *Mesurer la surface d'une Province ou d'un Royaume. (fig. 64.)*

SOLUTION. Pour mesurer la surface d'une province ou d'un royaume, il faut diviser cette surface en plusieurs triangles, comme dans l'exemple

Bb iij

précédent, par le moyen de certains signaux placés en des lieux élevés, par exemple, au sommet des collines, des montagnes, de certains édifices remarquables ; & trouver la surface de chaque triangle à part. Ces triangles ABC, KID, seront formés par des rayons visuels dirigés d'un signal à l'autre, par le moyen des graphomètres. Par exemple, un graphomètre étant placé en A, & un autre graphomètre en B (420) ; du point A, on dirigera à travers les pinnules, un rayon visuel vers le signal de la montagne B, & un autre rayon visuel vers le signal de la montagne C : ensuite du point B, on dirigera de même un rayon visuel vers le signal de la montagne A, & un autre rayon visuel vers le signal de la montagne C. En prenant sur le graphomètre la mesure des angles A & B (423), on aura un triangle ABC, dont on connoît les trois angles. On peut mesurer de la même manière les angles de tout autre triangle CDE, FKD. Ainsi,

I°. Il faut d'abord trouver la distance d'un signal à l'autre : afin que cette distance quelconque AB puisse servir de base connue dans le triangle ABC. Pour trouver cette distance AB, choisissez dans un terrain bien uni, deux stations *a* & *b* ; dont vous mesurerez la distance *ab*, la perche à la main, avec toute la précision possible. Après quoi vous placerez un graphomètre en *a*, & un autre graphomètre en *b* ; & par le moyen du triangle A *a* B, vous trouverez la distance AB. (426.)

II°. La distance AB étant connue, vous irez en A & en B, mesurer avec le graphomètre, les angles ABC & BAC. Dans le triangle ABC, vous connoîtrez la base AB, & les deux angles formés sur cette base : vous connoîtrez donc tout le triangle. (427.)

III°. Par le moyen d'un graphomètre placé en B, dirigez un rayon visuel en C, & un autre rayon visuel

en D ; & mesurez sur le graphometre l'angle CBD. Par le moyen d'un autre graphometre ou du même graphometre placé en C, dirigez un rayon visuel en B, & un autre rayon visuel en D, où vous aurez fait placer auparavant un signal ; & mesurez l'angle BCD. Vous aurez le triangle CDB, dont vous connoissez la base CB, qui est un côté du triangle précédent, & les deux angles sur cette base : vous connoîtrez donc encore tout le triangle ; & le côté BD deviendra la base connue du triangle BDF que vous mesurerez de même. Le côté DF étant connu, il servira de base à son tour au triangle suivant DKF ; & ainsi de suite à l'infini.

IV°. Par ce moyen vous connoîtrez tous les triangles qu'on peut former sur la surface d'une province ou d'un royaume ; & en multipliant la base de chaque triangle par la moitié de sa hauteur, vous aurez la surface de chaque triangle (448). En prenant ensuite la somme des surfaces de tous ces triangles, vous aurez la surface de toute la province ou de tout le royaume à mesurer : puisque cette surface n'est point distinguée de celle de tous les triangles que vous avez formé sur elle, & qui l'embrassent toute entiere.

On verra dans la Trigonométrie, comment on peut trouver par le calcul, & sans le secours d'un triangle semblable en petit, la surface de chaque triangle mesuré en grand sur le terrain. (704.)

454. REMARQUE. Nous supposons ici que toutes les stations A, B, C, D, I, & ainsi du reste, sont de niveau, ou à égale distance du centre de la terre. Nous montrerons ailleurs comment il faut s'y prendre, pour éviter les erreurs plus ou moins notables, que peut occasionner l'inégalité de hauteur dans les points que l'on prend pour stations. (538.)

PROBLÈME III.

455. *Lever la carte d'un pays. (fig. 65.)*

SOLUTION. I°. Prenez & mesurez exactement une grande base AB, d'où vous puissiez appercevoir les objets les plus remarquables de ce pays, tels que les villes, les bourgs, les villages, les principaux côteaux; que l'on suppose désignés par les lettres C, D, E, F, G, H. On peut mesurer cette base AB, ou la perche à la main, si le terrain est uni & accessible; ou par le secours de la longimétrie (424), si on ne peut pas aller en ligne droite du point C au point D. Ces deux points doivent être marqués par des jallons & par des signaux.

II°. Au point A placez un graphometre, dont deux pinnules soient persévéramment dirigées vers le point B; & tandis que l'alidade se dirigera avec ses deux autres pinnules vers tous les objets visibles; prenez & marquez exactement la grandeur des angles que forment sur ce graphometre A les rayons visuels qui passent par les pinnules, savoir les angles CAB, DAB, EAB, FAB, GAB, HAB; & ainsi du reste.

III°. Au point B placez le même graphometre ou un autre graphometre, dont deux pinnules soient persévéramment dirigées vers le point A; & tandis que les deux autres pinnules de l'alidade mobile se portent vers les objets remarquables & déjà remarqués, prenez exactement sur ce graphometre B les angles CBA, DBA, EBA, FBA, GBA, HBA. Vous aurez dans tous ces triangles, une base AB, que vous avez mesurée sur le terrain; & deux angles, que vous avez mesurés sur le graphometre: donc vous connoîtrez tout dans ces triangles. (417.)

IV°. Il ne reste donc plus qu'à rapporter ces trian-

gles sur une plus ou moins grande feuille de papier, en les traçant en petit ; & en donnant à tous les objets qui les terminent , la même position respective qu'ils ont sur le terrain. Pour cela , ayez une échelle exactement divisée en parties égales , plus ou moins grandes (411) ; & tirez sur le papier où vous voulez tracer la carte , une ligne AB , qui ait autant de parties égales , que la base mesurée sur le terrain , a de toises.

Après quoi , tracez au point A , en lignes indéfinies , par le moyen du rapporteur , les mêmes angles CAB , DAB , que vous avez trouvés sur le terrain : tracez de même au point B , les mêmes angles CBA , DBA , &c , que vous avez trouvés sur le terrain. Ces lignes indéfinies , AC & BC , AD & BD , & ainsi du reste , vont s'entre-couper en C , en D , en E , en F , en G , en H , en C ; & l'intersection de ces lignes vous donnera la position respective de tous les objets qu'il falloit tracer sur la carte : puisque cette carte renferme une foule de triangles respectivement semblables aux triangles qu'on a mesuré sur le terrain. On aura de la même manière , la position respective des objets placés dans les intersections *a* , *b* , *c* , *d*.

V°. On conçoit que si on fait la même opération sur toutes les lignes de la figure 64 , en prenant pour base la ligne quelconque AB ; on aura la position respective de tous les objets remarquables qui sont placés dans l'enceinte de tous les triangles qui forment cette province ou ce royaume. En rapportant & ces triangles & tous les objets remarquables qu'ils contiennent , sur la toile ou sur le papier , avec leurs angles respectifs ; on aura la carte géographique de cette province ou de ce royaume.

LA PLANCHETTE, LA BOUSSOLE.

456. REMARQUE. Il y a une autre manière de lever

des plans, qui est d'autant plus commode qu'elle exige peu d'appareil, & qu'en même tems qu'on observe les différens points dont on veut avoir les positions, on les trace sur le plan sans les perdre de vue.

1°. L'instrument qu'on emploie pour cet effet, est une planche d'environ un pied & demi de longueur & de largeur, portée sur un pied, comme le graphomètre. Sur cette planche on étend une feuille de papier, qu'on arrête par le moyen d'un châssis qui entoure la planche. Sur ce papier & sur la planche, on fixe par le moyen d'une vis, une grande regle ou alidade, garnie de pinnules, qui puisse en roulant sur son centre, se diriger vers les objets qu'on veut tracer sur le papier. Cet instrument s'appelle *planchette*. Une simple table ordinaire peut tenir lieu de la planche dont nous venons de parler. (*fig. 55.*)

Pour lever un plan par le moyen de cet instrument; après avoir mesuré une base AB, placez la planchette en A, & élevez un piquet ou un jallon en B. Donnez d'abord à l'alidade A, la direction AB; & tracez sur le papier une ligne indéfinie AB, à laquelle vous donnerez autant de parties AB de l'échelle du plan (411), que vous avez trouvé de mesures, de toises, par exemple, dans la base AB sur le terrain. Ensuite laissant la planchette ou la table dans sa même position, faites tourner sur son centre l'alidade A vers C, vers D, vers E, vers F, vers G, vers H; & tracez sur le papier & le long de l'alidade, les lignes AC, AD, AE, AF, AG, AH, Aa, Ab, Ac, Ad.

Après cela, prenez avec un fil à plomb, le point précis A du plan; & ôtant votre planchette, élevez un jallon dans ce point. Portez ensuite votre planchette ou votre table en B; & faites en sorte que la ligne AB de votre plan, soit placée dans la direction AB des jallons BA. Fixez la regle mobile au point B; & la dirigeant vers les mêmes objets que ci-dessus,

menez successivement les lignes BC, BD, BE, BF, BG, BH, Ba, Bb, Bc, Bd : les intersections de ces lignes vous donneront sur le papier, la position respective de tous les objets observés sur le terrain.

II°. Pour orienter le plan ainsi levé & tracé, ou pour trouver quelle est la direction d'une ligne quelconque AB de ce plan vers le nord & le midi, vers l'orient & vers l'occident ; on se sert communément d'une boussole, dont l'aiguille aimantée se dirige vers le nord & le midi sous un angle de déclinaison qu'on connoît ou qu'on trouvera aisément, (*Phy.* 592.)

Quand on leve un plan par le moyen du graphometre ; la position de l'aiguille aimantée *ab*, fait voir aisément (420) quelle est la direction de la ligne AB ou CM. (*fig.* 5.)

Quand on leve un plan par le moyen de la planchette ; on se sert, pour l'orienter, d'une boussole de figure rectangulaire MN (*fig.* 9) qu'on pose sur la planchette même, au tems où on le leve. On pose le point M de la boussole, sur un point de la ligne du plan qui joint les deux stations ; & on fait tourner la boussole sur ce point fixe M, jusqu'à ce que l'aiguille aimantée fasse l'angle précis *acs* de déclinaison qu'elle doit former en ce lieu sur la méridienne *sv*. Après quoi on tire sur le plan parallèlement au côté MN, une ligne indéfinie MNX : cette ligne oriente le plan, & en marque le nord & le midi. Une perpendiculaire à cette ligne, en marquera l'orient & l'occident,

On peut aussi & plus sûrement encore orienter un plan, par le moyen du seul graphometre & sans le secours de la boussole ; en dirigeant le soir l'alidade vers le pôle arctique, & en mesurant l'angle que fait l'axe ou la direction du graphometre sur la ligne des deux stations. (*Phy.* 1355.)

PROBLÈME IV.

457. *Mesurer la surface d'une province ou d'un royaume, sur la carte géographique. (fig. 64 & 65.)*

SOLUTION. Divisez cette carte en parallélogrammes ou en triangles ; & remarquez combien chaque parallélogramme ou chaque triangle contient dans sa base & dans sa hauteur, de parties égales de l'échelle. Si la carte est exacte, le pays qu'elle représente doit avoir autant de lieues quarrées, que la carte contient de mesures quarrées marquées par l'échelle, supposé que l'échelle marque des lieues.

Ainsi en multipliant la base de chaque parallélogramme par sa hauteur, vous aurez la surface de chaque parallélogramme. En multipliant aussi la base de chaque triangle par la moitié de sa hauteur, vous aurez la surface de chaque triangle. En prenant enfin la somme de tous ces produits, vous aurez la surface de la province ou du royaume que représente la carte.

PROBLÈME V.

458. *Faire un quarré égal en surface à un parallélogramme donné.*

SOLUTION. La surface d'un parallélogramme étant le produit de la base multipliée par la hauteur ; il faut chercher une moyenne proportionnelle à ces deux lignes (414) : cette moyenne proportionnelle, multipliée par elle-même, donnera un produit qui sera un quarré égal au produit des deux autres lignes, qui sont les deux extrêmes de la proportion.

PROBLÈME VI.

459. *Faire un quarré égal en surface à un triangle donné.*

SOLUTION. La surface d'un triangle étant la base multipliée par la moitié de la hauteur (448); il faut chercher une *moyenne proportionnelle* à ces deux lignes (414): cette moyenne proportionnelle multipliée par elle-même, donnera un produit qui sera un carré égal en surface au produit des deux autres lignes.

Le carré est la mesure la plus simple des surfaces: une figure ou une surface est censé mesurée, quand elle est réduite à un carré dont on connoît une dimension.

TOISÉ DES SURFACES.

460. DÉFINITION. Le *toisé des surfaces* est l'art géométrique d'évaluer en toises carrées & en portions de toises carrées, une surface plane dont les deux dimensions, la longueur & la largeur, sont trouvées ou données en toises ou en portions de toises.

I°. Quand une surface; qu'il faut évaluer, ne contient dans ses deux dimensions que des grandeurs homogènes, par exemple, des toises; on l'évalue aisément en prenant le produit de la base par la hauteur: ce produit exprime en toises la valeur de la surface. Il en seroit de même si la surface ne contenoit que des pieds, ou que des lieues, dans ses deux dimensions: en multipliant les deux dimensions indifféremment l'une par l'autre, on auroit un produit qui exprimeroit en pieds, ou en lieues, la valeur de la surface.

II°. Mais il est fort rare que les deux dimensions d'une surface soient en tout homogènes. Par exemple, dans un rectangle qu'il faut évaluer, la base sera de 24 toises 2 pieds 8 pouces: la hauteur sera de 16 toises 10 pouces: & alors cette évaluation devient plus compliquée & plus difficile.

On peut évaluer cette surface, en réduisant à la

plus petite espece les deux dimensions , qu'on multiplie l'une par l'autre , & en divisant le produit par le quarré du nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece contient la plus petite en laquelle ont été réduites les deux dimensions. (58.)

Mais comme la méthode de réduire les deux dimensions à la plus petite espece, est fort embarrassante pour le calcul ; en voici une autre qu'on lui a substituée : elle est fondée sur une maniere de diviser la toise quarrée , qui ne differe point de la toise courante.

461. EXPLICATION. Soit la toise quarrée ABCDA. (fig. 4.)

I°. Je divise le côté AB en six parties égales , qui valent chacune un pied ; & des points de division , je mene des paralleles à la base , sur l'autre côté DC : ce qui divise la toise quarrée en six rectangles égaux , que l'on nomme *pieds de toises quarrée* ; parce qu'ils ont chacun un pied de hauteur , & une toise de base.

II°. Je divise de même la hauteur *mn* de chaque pied de toise quarrée, en douze rectangles *mm*, *rr*, *nn*, que l'on nomme *pouces de toises quarrée* : parce qu'ils ont chacun un pouce de hauteur , & une toise de base.

III°. Je divise de même encore chaque pouce *mr* de toise quarrée , en douze rectangles , qui seront des *lignes de toise quarrée* : parce qu'ils ont une ligne de hauteur , & une toise de base.

Cette division de la *toise courante* , ou de la toise en longueur , convient très-bien , non-seulement au calcul , mais encore à la nature des choses. Car il est visible que lorsqu'on multiplie une toise de longueur , par un pied de hauteur ; par exemple , le produit n'est ni un pied , ni une toise , mais un rectangle AD d'une toise de base & d'un pied de hauteur , ou un sixieme de la toise quarrée. De même , si on multiplie une toise par quatre pouces ; il est évident que le produit

n'est ni une toise ni quatre pouces , mais un rectangle *mm* d'une toise de base & de quatre pouces de hauteur , ou le tiers d'un pied de toise quarrée : & ainsi du reste.

Sur ces principes , dont l'évidence se fait sentir par elle-même , est fondée la méthode que nous allons employer dans la solution des deux problèmes suivans.

P R O B L È M E I.

462. Trouver le contenu d'une surface plane , qui a 360 toises & 4 pieds de largeur ou de base , sur 4 toises & 8 pouces de hauteur.

SOLUTION. Il faut entendre ici par largeur & par hauteur , deux dimensions qui donnent un rectangle. Par exemple , si la surface dont on cherche le contenu est un triangle , après avoir mesuré sa base & sa hauteur , on prendra toute la base pour une dimension , & la moitié de la hauteur pour l'autre dimension : parce que dans une surface triangulaire , la dimension qui répond à la hauteur , n'est pas toute la hauteur du triangle , mais simplement la moitié de cette hauteur (448). Pour trouver la surface proposée ,

I°. Je multiplie d'abord les toises par les toises ; & j'ai pour produit 1440 toises quarrées. J'ai déjà multiplié les toises du multiplicande , par les toises du multiplicateur : il me reste à multiplier les mêmes toises du multiplicande , par les 8 pouces du multiplicateur.

II°. Je fais ici une *fausse supposition* , dont on verra l'utilité. Je suppose que le multiplicateur , au lieu de 0 pieds , ait 1 pied. Après quoi je multiplie les toises du multiplicande par un pied , en disant : si je multipliois 360 toises par une toise , le produit seroit 360 toises. Mais je multiplie seulement par un pied , qui est le sixieme de la toise : donc le produit doit

n'être que le sixième de 360 toises (66). Je prends donc le sixième de 360, & j'ai 60 toises quarrées que j'écris sous les toises, en les effaçant par un trait, pour me rappeler que ce produit 60 doit simplement me servir de *partie aliquote* entre les toises & les pouces, sans entrer dans la somme des toises.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
360.	4.	0.	.
× 4.	0.	8.	.
<hr/>			
1440.	.	.	.
60.	.	.	.
40.	.	.	.
2.	4.	4.	16.
<hr/>			
1482.	4.	5.	4.
<hr/>			
Toises quarrées.	Pieds de toise quarrée.	Pouces de toise quarrée.	Lignes de toise quarrée.

III°. Je passe aux 8 pouces, & je dis : 8 pouces sont les deux tiers d'un pied : donc ils doivent me donner les deux tiers de 60 toises quarrées que donneroit un pied. J'écris donc 40 sous les toises. J'ai donc déjà le produit des toises du multiplicande, par tout le multiplicateur. Il me reste encore à trouver le produit des 4 pieds du multiplicande, par tout le multiplicateur. Ainsi,

IV°. Je viens maintenant aux 4 pieds du *multiplicande*, & je dis : si j'avois à multiplier 4 toises 8 pouces par 1 toise, le produit seroit 4 toises 8 pouces. Mais je ne multiplie 4 toises 8 pouces que par 4 pieds, qui sont les deux tiers de la toise : le produit ne sera donc que les deux tiers de 4 toises 8 pouces, qui sont 2 toises quarrées, 4 pieds de toise quarrée, 2 pouces & 16 lignes de toise quarrée.

V°. Après cela j'ajoute tous les produits ensemble (28) ; & la somme ou le produit total 1482 toises quarrées, plus 4 pieds de toise quarrée qui sont les deux tiers de cette toise ou 24 pieds quarrés, plus 5 pouces

5 pouces & 4 lignes de toise quarrée, sont le contenu de la surface proposée.

PROBLÈME II.

463. Trouver le contenu d'une surface plane qui a 34 toises 2 pieds 9 pouces 8 lignes de base ou de largeur ; sur 23 toises 4 pieds 6 pouces 8 lignes de hauteur.

SOLUTION. I°. Je multiplie les nombres des toises l'un par l'autre, 34 par 23 : les deux multiplicateurs donnent chacun-leur produit, & ces deux produits 102 & 68 seront rangés l'un sous l'autre ; comme on voit dans le cadre.

II°. Je multiplie ensuite les 34 toises par 4 pieds, en disant : si je multipliois 34 toises par 1 toise, le produit seroit 34 toises. Mais je multiplie seulement par 4-pieds, qui sont les deux tiers de la toise : donc le produit doit n'être que les deux tiers de 34 toises (66). Je prends donc le tiers de 34, & j'ai 11 toises 2 pieds que j'écris deux fois.

III°. Je passe aux 6 pouces, & je dis : six pouces sont le quart de 2 pieds ou de 24 pouces : prenant donc le quart de

ce que deux pieds m'ont rendu, c'est-à-dire, le quart

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	
34.	2.	9.	8.	
× 23.	4.	6.	8.	
<hr/>				
102.	.	.	.	
68	.	.	.	
<hr/>				
11	2	.	.	
11.	2	.	.	
<hr/>				
2.	5	.	.	
.	1	10.	8	
<hr/>				
7	5	6	1	+ $\frac{2}{3}$.
1	5	10	6	+ $\frac{2}{3}$.
.	5	11	3	+ $\frac{2}{3}$.
.	.	11	10	+ $\frac{2}{3}$.
.	.	3	11	+ $\frac{2}{3}$.
<hr/>				
818.	5.	6.	6.	+ $\frac{2}{3}$.

de 11 toises 2 pieds qui font 68 pieds, j'ai 2 toises 5 pieds.

IV°. Huit lignes sont la neuvième partie de 6 pouces ou de 72 lignes : ainsi prenant le neuvième de ce que m'ont produit 6 pouces, c'est-à-dire, le neuvième de 2 toises 5 pieds ; j'ai 0 toises 1 pied 10 pouces 8 lignes.

V°. Je viens maintenant aux 2 pieds 9 pouces 8 lignes du *multiplie* (93) ; & commençant par les 2 pieds, je dis : si j'avois à multiplier 23 toises 4 pieds 6 pouces 8 lignes, par 1 toise, le produit seroit 23 toises 4 pieds 6 pouces 8 lignes. Mais je n'ai à multiplier que par 2 pieds, qui sont le tiers d'une toise : donc je ne dois avoir que le tiers de ce produit ; & ce tiers est 7 toises 5 pieds 6 pouces 2 lignes $\frac{2}{3}$.

VI°. Je passe aux 9 pouces du *multiplie*, & je dis : 9 pouces ne sont pas exactement contenus dans deux pieds : c'est pourquoi je partage 9 en deux parties 6 & 3, dont l'une 6 est le quart de 2 pieds ou de 24 pouces ; & l'autre 3 est la moitié de la précédente 6.

Or puisque 6 pouces sont le quart de 2 pieds ; en prenant le quart de ce que 2 pieds ont produit, c'est-à-dire, le quart de 7 toises 5 pieds 6 pouces 2 lignes $\frac{2}{3}$; j'ai 1 toise 5 pieds 10 pouces 6 lignes $\frac{2}{3}$. Ensuite pour 3 pouces, je prends la moitié de ce dernier produit : ce qui donne 5 pieds 11 pouces 3 lignes $\frac{1}{3}$. (650.)

VII°. Je passe ensuite aux huit lignes du *multiplie* ; & voyant que huit lignes ne sont pas exactement contenues dans trois pouces ou 36 lignes, je partage 8 en deux parties 6 & 2 ; dont la première 6 est le sixième de trois pouces, & l'autre 2 est le tiers de 6. Ainsi prenant le sixième de ce que 3 pouces ont produit ; j'ai 11 pouces 10 lignes $\frac{1}{3}$; & prenant le tiers de ce dernier produit, j'ai 3 pouces 11 lignes $\frac{1}{3}$.

VIII°. Enfin je fais l'addition de tous ces produits (28) ; & la somme ou le produit total, 818 toises 5

pieds 6 pouces 6 lignes $\frac{1}{2}$, est le contenu de la surface proposée, exprimé en dimensions de toise quarrée : comme dans le problème précédent.

464. REMARQUE I. Pour faciliter le calcul, il est quelquefois nécessaire de faire de fausses suppositions : par exemple, si le second nombre donné eût été 23 toises 0 pieds 6 pouces 8 lignes ; j'aurois supposé un pied à la place de 0 pieds, & j'aurois eu pour produit un sixieme de 34 toises, ou 5 toises 4 pieds que j'aurois écrit pour me servir d'*aliquote intermédiaire* entre les toises & les pouces, & que j'aurois effacé par un trait oblique ; pour me rappeler de ne point mettre dans la somme ce produit supposé, en faisant l'addition. On en a vu un exemple dans le problème précédent.

465. REMARQUE II. On peut aussi évaluer les surfaces, par le calcul des *fractions décimales* : mais comme ce calcul, appliqué à des toises, à des pieds, à des pouces, à des lignes, qui ne sont point des dixiemes de la grandeur précédente, nous paroît plus difficile & plus long que celui que nous employons ici ; nous nous abstenons d'en parler. Il est inutile de fatiguer l'attention du lecteur par des méthodes plus longues & plus difficiles, quand on lui en a présenté de plus courtes & de plus aisées. Il nous suffira donc d'observer ici,

1°. Qu'on nomme *fractions décimales*, des quantités fractionnaires dont le dénominateur est toujours un nombre décimal ; c'est-à-dire, l'unité suivie d'un ou de deux ou de tant de zeros qu'on veut ; lesquels augmentent toujours l'unité du dénominateur, en raison décuple (18). Par exemple, si on suppose le rayon terrestre divisé en dix parties ; $\frac{10}{10} = 1$ seront le rayon ; $\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ seront la moitié du rayon ; $\frac{20}{10} = 2$ seront le double du rayon. Si on suppose ce même rayon divisé en cent parties ; $\frac{100}{100} = 1$ seront la dixieme partie de ce rayon ; $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ en seront la moitié. Si on suppose le

même rayon divisé en mille parties ; $\frac{10}{1000}$ feront la centieme partie de ce rayon : $\frac{100}{10000}$ en feront la dixieme partie ; & ainsi de suite à l'infini.

De même, si on suppose une somme quelconque, grande ou petite, divisée en 10 parties ; ces dix parties feront le dénominateur décimal, & l'expression de la somme totale, dont le numérateur marquera le nombre de parties qu'il faut prendre dans cette somme. Ainsi on aura $\frac{10}{10}$; égal à toute la somme ; $\frac{2}{10}$, égal au cinquieme de la somme. Mais si cette somme étoit supposé divisée en mille parties ; la fraction auroit pour dénominateur le nombre 1000 ; & alors on auroit, $\frac{1000}{1000} = 1$, ou égal à la somme totale ; $\frac{1000}{1000} = \frac{1}{2}$, ou égal à la moitié de la somme ; & ainsi du reste. (188 & 190.)

II°. Que les fractions décimales s'expriment de différentes manieres abrégées , chez les différens auteurs qui en traitent. La maniere la plus commune de les exprimer & de les écrire par abréviation, c'est de n'écrire que le numérateur suivi d'un point ; & de mettre après le point, autant de zeros qu'en a le dénominateur décimal sous-entendu. Ainsi on aura $\frac{1}{10} = 5.0$: on aura de même $\frac{37}{100} = 37.00$: on aura de même encore $\frac{104}{1000} = 104.000$; & ainsi du reste.

PARAGRAPHE SECOND.

DES POLYGONES.

466. DÉFINITION. **O**N appelle *polygone*, toute figure terminée par plus de quatre lignes droites, qui sont ses côtés. Le polygone prend différens noms selon le nombre de ses côtés : on l'appelle *pentagone*, s'il en a cinq ; *exagone*, s'il en a six ; *eptagone*, s'il en a sept ; *oïogone*, s'il en a huit ; *ennéagone*, s'il en a

neuf; *décagone*, s'il en a dix; *endécagone*, s'il en a onze; *dodécagone*, s'il en a douze; *chiliogone*, s'il en a mille.

I°. Le *polygone* est *régulier*, quand tous ses angles & tous ses côtés sont égaux. (*fig. 66.*)

II°. Le *polygone* est *irrégulier*, quand ses angles & ses côtés ne sont pas tous égaux.

III°. Deux *polygones réguliers* sont *semblables*, quand ils ont le même nombre de côtés. Ainsi deux pentagones, deux dodécagones, deux chiliogones réguliers de différente grandeur, sont semblables.

467. COROLLAIRE. On peut concevoir le cercle, comme un *polygone régulier* d'une infinité de côtés.

EXPLICATION. Un point quelconque d'une circonférence, joint au point immédiatement suivant, fait nécessairement une ligne droite. (*fig. 18.*)

Du centre du cercle, tirez par la pensée deux rayons qui aboutissent à ces deux points contigus : vous aurez un triangle isocèle. Faites la même chose pour tous les points suivans de la circonférence : vous aurez dans le cercle autant de triangles isocèles, qu'il y a de points infiniment petits à la circonférence, c'est-à-dire une infinité. C. Q. F. D.

468. DÉFINITION II. On appelle *périmètre* d'un *polygone*, la somme de toutes les lignes qui forment ses côtés. Les lignes AB, BC, CD, DE, EF, FA, sont le périmètre de l'exagone ABCDEF. (*fig. 66.*)

Deux polygones, par exemple, un pentagone & un octogone, sont *isopérimètres* ; quand le périmètre de l'un est précisément égal au périmètre de l'autre.

L'étymologie de ces dénominations est toute grecque. Elle vient de *περι*, *circum*, à l'entour ; de *μετρον*, *metron*, je mesure ; & de *ισος*, *aqualis*, égal. Ces dénominations s'appliquent aussi à d'autres figures, différentes des polygones. *Polygone* : de *πολλος*, *multus* ; & de *γωνια*, *angulus*. Cc iij

469. DÉFINITION III. On distingue dans un polygone, deux sortes de rayons, un rayon oblique & un rayon droit qu'on nomme aussi apothème. (fig. 66.)

I°. On appelle *rayon oblique* d'un polygone, une ligne droite, tirée du centre du polygone à l'angle formé par deux côtés du périmètre. Par exemple, MA ou MB ou MD, est un rayon oblique.

II°. On appelle *rayon droit* ou *apothème* d'un polygone, une ligne droite, tirée du centre perpendiculairement sur un côté quelconque AB du polygone. Par exemple, MK est un rayon droit ou un apothème de ce polygone.

III°. On distingue aussi dans les polygones, des angles saillans & des angles rentrans. L'*angle saillant* est celui qui a son sommet hors de la figure ; l'*angle rentrant* est celui dont le sommet entre dans la figure. Si ACDHEA est un polygone ; l'angle DHE est un angle rentrant : tous les autres sont des angles saillans. (fig. 61.)

470. COROLLAIRE. Plus le polygone a de côtés ; plus le rayon droit approche du rayon oblique. (fig. 69.)

DÉMONSTRATION. Il est évident que si du centre C, on mène un rayon droit sur le côté MN d'un hexagone, & un autre rayon droit sur le côté MB d'un dodécagone ; le dernier rayon sera plus grand que le premier. L'apothème Cx du dodécagone approchera donc plus du rayon oblique CM, que l'apothème Cb de l'hexagone.

Il est évident de même, que plus l'arc MB deviendra petit, plus sa corde se rapprochera de la circonférence ; & plus l'apothème Cx de cette corde deviendra grand, en approchant toujours de plus en plus à l'infini, de l'égalité avec le rayon oblique CM. D'où il résulte que dans le cercle, le rayon droit diffère infiniment peu du rayon oblique. C. Q. F. D.

T H É O R È M E I.

471. *Tous les angles d'un polygone quelconque, régulier ou irrégulier, sont égaux à deux fois autant d'angles droits moins quatre, que le polygone a de côtés.* (fig. 66.)

DÉMONSTRATION. Soit un polygone de tant de côtés que vous voudrez, par exemple, de cent côtés. Tirez par la pensée, du centre du polygone des lignes qui aboutissent à tous les angles formés par les côtés. Vous aurez autant de triangles qu'il y a de côtés. Tous ces triangles sont égaux chacun à deux angles droits (384) : cent triangles vous donneront donc 200 angles droits. Retranchez de la somme de tous ces triangles, la somme de tous les angles au centre, que vous avez ajoutée aux angles du périmètre, par exemple, les angles AMB, BMC, CMD, &c ainsi du reste. Vous retrancherez quatre angles droits : puisque tous les angles au centre embrassent précisément une circonférence, & par conséquent valent quatre angles droits. Donc la somme des angles de ce polygone, est égale à deux fois autant d'angles droits moins quatre, que le polygone a de côtés. C. Q. F. D.

472. PROBLÈME. *Trouver l'angle au centre d'un polygone régulier, ou l'angle opposé à un côté.* (fig. 69.)

SOLUTION. La somme de tous les angles au centre, formés par des rayons obliques, vaut quatre angles droits, ou 360 degrés : puisqu'elle répond à toute la circonférence d'un cercle circonscrit au polygone. Mais il y a dans le polygone régulier, autant d'angles au centre tous égaux entre eux, que le polygone régulier a de côtés, tous égaux entre eux. Divisez donc 360 degrés, par le nombre de côtés qu'a le polygone régulier : par exemple, si c'est un hexagone, divisez 360

par 6; si c'est un dodécagone, divisez 360 par 12 : le quotient exprimera la valeur de l'angle au centre MCN ou NCB; & ainsi du reste.

THÉORÈME II.

473. *Les périmètres des polygones réguliers de même nombre de côtés, sont entre eux comme les rayons droits ou obliques. (fig. 66.)*

DÉMONSTRATION. Soit le petit polygone *abcdef*, placé sur le grand polygone semblable *ABCDEF*. Il faut démontrer que le périmètre ou le contour du petit, est au périmètre du grand; comme le rayon droit ou oblique du petit, est au rayon droit ou oblique du grand.

I°. Quand deux triangles sont semblables ou équiangles, les côtés homologues sont proportionnels (403) : or les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont évidemment une suite de triangles équiangles ou semblables : donc chaque côté *ab* d'un polygone régulier, est au côté homologue *AB* d'un autre polygone régulier de même nombre de côtés; comme le rayon *aM* ou *kM* du premier, qui peut être considéré comme base, est au rayon *AM* ou *KM* du second, qui peut être aussi considéré comme base.

II°. Chaque côté du premier polygone est proportionnel à chaque côté du second : donc la somme de tous les côtés du premier est proportionnelle à la somme de tous les côtés du second (222) : donc tous les côtés du premier sont à tous les côtés du second, comme le rayon du premier est au rayon du second. Donc les périmètres des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont entre eux comme leurs rayons droits ou obliques. C. Q. F. D.

474. COROLLAIRE. *Les circonférences des cercles inégaux, sont entre elles comme les rayons.*

DÉMONSTRATION. On vient de démontrer que dans les polygones réguliers d'inégale grandeur & de même nombre de côtés, les périmètres sont entre eux comme les rayons. Or les cercles peuvent être considérés comme des polygones réguliers d'une infinité de côtés (467) : donc leurs périmètres, qui sont leurs circonférences, sont entre eux comme leurs rayons. Donc si le rayon d'un cercle est la moitié ou le quart ou le centième du rayon d'un autre cercle ; la circonférence du premier sera la moitié, ou le quart, ou le centième de la circonférence du second : & réciproquement.

475. **COROLLAIRE II.** Les rayons de deux cercles étant entre eux comme les circonférences ; *ils sont aussi comme les demi-circonférences, comme les quarts, comme les dixièmes, comme les centièmes, comme les millièmes des circonférences, & généralement, comme tous les arcs semblables* ou d'un même nombre de degrés : en sorte que si l'on a deux cercles d'inégale grandeur ; le rayon du premier est au rayon du second, comme un arc de 30 degrés du premier, est à un arc de 30 degrés du second ; & ainsi du reste.

476. **COROLLAIRE III.** Les rayons étant moitié des diamètres ; *les diamètres de deux cercles sont entre eux comme leurs rayons* : parce que la raison qui est entre deux grandeurs, est égale à celle qui est entre leurs deux moitiés, & réciproquement (163). Par conséquent, *dans deux cercles, les diamètres sont entre eux, comme les circonférences, comme les demi-circonférences, comme tous les arcs semblables.*

THÉORÈME III.

477. *Le côté de l'hexagone régulier, inscrit dans un cercle, est égal au rayon de ce cercle. (fig. 66.)*

DÉMONSTRATION. Soit l'hexagone régulier ABCDEF, inscrit dans un cercle. Les six côtés de l'hexagone

sont six cordes égales, qui soutiennent six arcs égaux, dont la somme est toute la circonférence.

Du centre M, tirez les rayons MA & MB sur les extrémités d'un des côtés AB de l'exagone : ce côté AB est égal au rayon MA ou MB. Car dans le triangle AMB, l'angle M a pour mesure l'arc AB (336); & cet arc AB est de 60 degrés : puisque cet arc est la sixième partie de la circonférence. Par conséquent l'angle AMB est un angle de 60 degrés.

L'angle M valant 60 degrés, il faut nécessairement que les deux autres angles A & B pris ensemble, valent 120 degrés (384). Or ces deux angles A & B sont égaux : puisqu'ils sont opposés à deux côtés égaux, qui sont deux rayons du cercle circonscrit (389). Donc chacun de ces angles A & B vaut la moitié de 120 degrés, ou 60 degrés.

Par conséquent, dans le triangle AMB, les trois angles sont égaux : donc les trois côtés, opposés à ces angles égaux, sont aussi égaux entre eux (389). Or le côté AM ou BM est le rayon du cercle circonscrit : donc le côté AB, qui est égal au côté AM ou BM du triangle AMB, est aussi égal au rayon du cercle circonscrit à l'exagone régulier. C. Q. F. D.

478. COROLLAIRE I. *Le périmètre de l'exagone régulier, inscrit dans un cercle, contient six fois précisément le rayon du cercle circonscrit : puisque le côté AB est égal au rayon MA; & que le périmètre de l'exagone régulier contient nécessairement six côtés égaux au côté AB. (fig. 66.)*

Ce périmètre contenant six fois précisément le rayon, il est évident qu'il contient aussi trois fois précisément le diamètre, double du rayon.

478. COROLLAIRE II. La circonférence du cercle circonscrit, est évidemment plus grande, que le périmètre de l'exagone inscrit : donc la circonférence contient plus de trois fois le diamètre. Donc le rapport de la

circonférence au diamètre, est plus grand que le rapport de 3 à 1, ou de 21 à 7. Mais quel est ce rapport exact & précis?

Rapport du diamètre à la circonférence.

479. OBSERVATION. Nous ferons voir ailleurs, comment & par quelle méthode géométrique, on a pu chercher dans le cercle, le rapport de la circonférence au diamètre, ou du diamètre à la circonférence (663). Ce rapport précis & parfait reste encore à trouver; mais on a tellement approché du vrai rapport, qu'on n'a plus rien à désirer en ce genre.

1^o. Archimède a trouvé & démontré, que le rapport du diamètre à la circonférence est à très-peu près le rapport de 7 à 22 : que le rapport exact & précis du diamètre à la circonférence est renfermé entre le rapport de 7 à 21 + $\frac{7}{71}$, & le rapport de 7 à 21 + $\frac{7}{71}$ = 22 : que parmi ces deux rapports fractionnaires, le premier est un peu trop grand; le dernier, un peu trop petit; mais que le dernier approche plus du rapport exact & précis, que le premier.

Ce rapport de 7 à 22, est égal au rapport de 1 à 3 + $\frac{1}{7}$; mais on ne se sert pas de ce dernier; parce qu'étant exprimé en fraction, il est trop embarrassant dans le calcul. Selon ce rapport d'Archimède, toute circonférence, grande ou petite, renferme à très-peu près, trois fois son diamètre, plus un septième de son diamètre.

Depuis Archimède jusqu'à nos jours, tous les géomètres ont adopté le rapport de 7 à 22, comme le rapport suffisamment exact du diamètre à la circonférence : ce rapport suffit en effet pour donner toute la précision qu'on peut communément espérer d'atteindre dans la pratique. Cependant comme ce rapport est un peu trop petit (160), il donne la circonférence un

peu plus grande qu'elle n'est en réalité. Par exemple , si le diamètre est de 1000 toises , la circonférence qu'on trouvera par ce rapport sera plus grande que la vraie circonférence , d'environ 2 toises , qui sont la cinq-centième partie du diamètre donné. C'est pourquoi les géomètres qui se piquent d'une grande exactitude , & qui ont quelquefois besoin d'une très-grande précision dans le calcul , ont cherché des rapports plus rigoureusement exacts que celui d'Archimède.

II°. Metius , géometre Hollandois , a trouvé un autre rapport du diamètre à la circonférence , *le rapport de 113 à 355*. De tous les rapports qui peuvent s'exprimer en un petit nombre de chiffres sans fraction , il n'y en a point qui approche plus du vrai rapport.

Le rapport de 100 à 314 , dont on se sert assez souvent , est trop grand (160) : il donne la circonférence un peu plus petite qu'elle n'est en réalité. Le rapport de 10000 à 31415 , approche du vrai rapport , à peu près autant que celui de Metius , dont il ne diffère qu'infiniment peu : on peut employer celui-ci , qui est d'un usage plus commode que celui de Metius.

III°. D'autres géomètres ont cherché & trouvé des rapports du diamètre à la circonférence , encore plus exacts que celui de Metius : mais on ne s'en sert point ; parce qu'étant exprimés par un trop grand nombre de chiffres , ils causent un trop grand embarras dans le calcul , sans être d'aucune utilité dans la pratique. Par exemple , Ludolphe de Ceulen , qui a poussé à l'excès les spéculations sur cet objet , a trouvé le rapport suivant ;

100,000,000,000,000,000,000,000,000,000 ;
314,159,265,358,979,323,846,264,338,327,950 ;
& a démontré que le diamètre d'un cercle quelconque , étant supposé divisé en autant de parties

qu'en exprime le premier nombre, la circonférence de ce cercle sera plus petite que le second nombre, mais plus grande que ce second nombre, si on change le dernier chiffre zero en une unité. Le premier nombre est l'antécédent, & le second nombre est le conséquent, d'une raison qui exprime le rapport du diamètre à la circonférence.

On peut, par ce rapport de Ludolphe de Ceulen, approcher à l'infini du vrai rapport du diamètre à la circonférence; en prenant un égal nombre de chiffres à gauche, dans le nombre qui répond au diamètre, & dans le nombre qui répond à la circonférence. Par exemple, en prenant les six premiers chiffres de l'antécédent & les six premiers chiffres du conséquent, on aura ce rapport 100000 à 314159. Si on cherche par ce dernier rapport, la circonférence d'un cercle dont le diamètre est d'un million de toises, la circonférence qu'on trouvera sera plus petite que la vraie; mais la différence entre la circonférence trouvée & la vraie circonférence ne sera que d'environ deux toises, qui ne sont que la cinq-cent-millième partie du diamètre donné. Le rapport d'Archimède donneroit à cette même circonférence, 1265 toises de plus qu'elle n'a en réalité.

Ce rapport de Ludolphe de Ceulen est très-commode dans la pratique des grands calculs: parce que le nombre qui exprime le diamètre, n'étant que l'unité suivie de plusieurs zeros; il dispense ordinairement d'une multiplication & d'une division.

P R O B L È M E.

480. *Trouver à peu près par ces rapports, la circonférence d'un cercle, dont on connoît le diamètre; ou le diamètre d'un cercle, dont on connoît la circonférence.*

SOLUTION. 1°. Soit le diamètre connu = 450: appelez x la circonférence inconnue; & faites cette

regle de trois : $7.22 :: 450.x$. Le produit des deux moyens, divisé par le premier extrême, vous donnera la circonférence cherchée.

II°. Soit la circonférence connue $= 9000$: appelez x le diamètre inconnu ; & faites de même cette règle de trois : $22.7 :: 9000.x$. Le produit des deux moyens, divisé par le premier extrême, vous donnera le diamètre cherché.

Si on veut avoir avec plus de précision le diamètre ou la circonférence que l'on cherche ; à la place du rapport donné par Archimede, on mettra le rapport donné par Metius, ou le rapport exprimé par les cinq ou six premiers chiffres de la longue suite de Ludolphe de Ceulen (479) ; & les deux proportions précédentes seront transformées en celles-ci : $113.355 :: 450.x$; ou $355.113 :: 9000.x$; ou bien en celles-ci : $10000.31415 :: 450.x$; ou $31415.10000 :: 9000.x$. Le produit des deux moyens divisé par le premier extrême, donnera ou la circonférence qui répond au diamètre de 450 toises ; ou le diamètre qui répond à la circonférence de 9000 toises.

THÉORÈME IV.

481. *La surface d'un cercle est égale à la surface d'un triangle rectangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base une ligne droite égale à la circonférence. (fig. 68.)*

DÉMONSTRATION. Soit le cercle ADA, & le triangle rectangle ACB. Ces deux figures sont égales en surface, si elles ont autant d'élémens l'une que l'autre ; & si tous les élémens de l'une sont égaux à tous les élémens correspondans de l'autre : or,

I°. *Il y a autant d'élémens dans le cercle, qu'il y en a dans le triangle.* Car les élémens du cercle, sont des circonférences concentriques, & les élémens du triangle, sont des lignes parallèles à la base. (438.)

Or il y a autant de circonférences concentriques

dans le cercle , que de lignes parallèles à la base dans le triangle : puisque le nombre en est mesuré de part & d'autre par la ligne CA , qui est en même tems rayon du cercle & hauteur du triangle.

II°. Tous les élémens du cercle sont égaux à tous les élémens correspondans du triangle. Prenons dans le cercle deux circonférences AD , *ad* ; & dans le triangle deux bases AB , *ab* , correspondantes à ces deux circonférences. D'abord dans le cercle , les circonférences étant entre elles comme les rayons (474) ; on a cette proportion : AD . *ad* :: CA . Ca.

Ensuite dans le triangle , les deux triangles CAB & Cab étant semblables , on a encore cette proportion : AB . *ab* :: CA . Ca.

Dans ces deux proportions , la seconde raison est la même : donc les deux premières raisons sont égales entre elles , étant égales chacune à la même raison. On a donc encore cette proportion : AD . *ad* :: AB . *ab* & alternando (174) AD . AB :: *ad* . *ab*

Or dans cette dernière proportion , l'antécédent & le conséquent de la première raison sont égaux , par l'hypothèse ; puisqu'on suppose la circonférence du cercle égale à la base du triangle : donc dans la dernière raison , l'antécédent est aussi égal à son conséquent.

On peut démontrer de la même manière , que chaque autre circonférence comme *mm* , est égale à la base *mn* qui lui correspond dans le triangle : ainsi dans le cercle & dans le triangle , les élémens correspondans sont égaux & en nombre & en grandeur : donc le cercle & le triangle sont égaux en surface. G. Q. F, D.

THÉORÈME V.

482. La surface d'un secteur de cercle , est égale à la surface d'un triangle rectangle , dont la hauteur est égale au rayon du secteur ; & dont la base est égale à l'arc du secteur. (fig. 67.)

DÉMONSTRATION. Soit CAD un secteur d'une grandeur quelconque, par exemple, de 80 ou 90 degrés. Soit aussi un triangle ACB, dont la base AB soit égale à l'arc AD du secteur; en sorte que la base AB & l'arc AD soient deux lignes composées d'un même nombre de points: ce qui est toujours évidemment possible, & ce qui peut toujours évidemment être supposé. Dans cette hypothèse,

I°. *Le triangle & le secteur ont un même nombre d'éléments*: puisque ce nombre d'éléments est mesuré de part & d'autre par la ligne CA, qui est le rayon du cercle & la hauteur du triangle. (438.)

II°. *Les éléments du secteur sont égaux chacun aux éléments correspondans du triangle*: ce qu'on démontre, comme dans le théorème précédent, par deux proportions qui en donnent une troisième & ensuite une quatrième, où est établie cette égalité.

Dans le cercle (474) . . . AD . *ad* :: CA . Ca.

Dans le triangle (400) . . AB . *ab* :: CA . Ca.

Donc, (166) . . . AD . *ad* :: AB . *ab*.

Donc, *alternando*, . . . AD . AB :: *ad* . *ab*.

Donc l'arc ou l'élément AD du secteur, étant supposé égal à la base ou à l'élément AB du triangle; chaque élément suivant & quelconque *ad* du secteur, sera égal à chaque élément correspondant *ab* du triangle.

Le triangle & le secteur, ayant & un même nombre d'éléments, & des éléments par-tout respectivement égaux, sont donc évidemment égaux en surface; quelle que soit la grandeur & du secteur & du triangle. C. Q. F. D.

DE LA QUADRATURE DU CERCLE.

483. DÉFINITION. Chercher la quadrature du cercle, c'est chercher une méthode géométrique de faire un carré égal en surface à un cercle dont le diamètre ou la circonférence sont donnés.

Si

Si on avoit pu trouver un rapport géométrique parfaitement exact, sans aucune différence sourde & infiniment petite, entre le diamètre & la circonférence; on auroit la quadrature du cercle: puisque le cercle étant égal en surface à un triangle qui auroit pour hauteur le rayon, & pour base, une ligne égale à la circonférence (481); il ne s'agiroit que de trouver une moyenne proportionnelle entre la base & la hauteur de ce triangle (414). Cette moyenne proportionnelle, multipliée par elle-même, donneroit un quarté égal en surface au triangle, égal en surface au cercle dont la surface est égale à celle de ce triangle.

Ce rapport géométrique, parfaitement exact & précis, entre le diamètre & la circonférence, reste encore à trouver; comme nous l'avons déjà observé. Mais celui qui le trouveroit aujourd'hui ne rendroit absolument aucun service aux sciences: parce que les rapports découverts & démontrés par Archimède, par Mélius, par Ludolphe de Ceulen, approchent tellement du vrai rapport; qu'avec un rapport parfaitement exact & précis, on ne pourroit se flatter dans la pratique, d'atteindre à une plus grande précision. (479.)

P R O B L È M E I.

484. *Trouver, à très-peu près, la surface d'un cercle dont on connoît le rayon.*

SOLUTION. Par le double du rayon connu, égal au diamètre, trouvez la circonférence inconnue (479). Multipliez cette circonférence par la moitié du rayon: le produit donnera la surface cherchée; puisque ce produit donne la surface d'un triangle égal au cercle dont le rayon a été donné. (481.)

P R O B L È M E II.

485. *Trouver, à très-peu près, la surface d'un secteur*

Dd

de cercle , dont on connoît l'arc & le rayon.

SOLUTION. I°. Par le double du rayon donné , que je suppose égal à 7 toises , trouvez la circonférence entière de ce cercle , en faisant cette règle de trois : $7 . 22 :: 14 . x$: la circonférence cherchée sera 44 toises. (489.)

II°. Pour trouver la mesure inconnue de l'arc donné , que je suppose de 54 degrés , faites cette autre règle de trois : la mesure connue de la circonférence entière 44 toises , est à la mesure inconnue de l'arc de 54 degrés ; comme la circonférence entière 360 degrés , est à l'arc donné 54 degrés : ainsi $44 . x :: 360 : 54$. Vous aurez $x = 6$ toises $-\frac{2}{3}$ environ.

III°. Multipliez la mesure trouvée 6 toises $-\frac{2}{3}$ de l'arc donné , par la moitié du rayon : le produit exprimera la surface cherchée. (462.)

PROBLÈME III.

486. *Trouver la surface d'un polygone. (fig. 66.)*

SOLUTION. I°. Si le polygone est régulier , tous ses angles & tous ses côtés sont égaux : il y a donc autant de triangles égaux que le polygone a de côtés. Tirez une perpendiculaire MK, du centre du polygone sur un côté quelconque AB : vous aurez la hauteur & la base du triangle AMB : vous connoîtrez donc la surface de ce triangle. Multipliez la surface trouvée de ce triangle AMB du polygone régulier , par le nombre des côtés du polygone , moins un dont la surface est déjà prise ; le produit donnera la surface cherchée.

II°. Si le polygone est irrégulier , il faut mesurer tous les triangles dissemblables l'un après l'autre ; & prendre la somme de toutes les surfaces des triangles qui forment le polygone , pour avoir la surface totale du polygone.

PROBLÈME IV.

487. *Faire un polygone régulier de la grandeur d'un rayon donné & d'un nombre donné de côtés. (fig. 68.)*

SOLUTION. Décrivez une circonférence qui ait pour rayon, le rayon oblique donné : divisez cette circonférence ou 360 degrés, par le nombre de côtés que doit avoir le polygone ; par 6, si c'est un hexagone ; par 12, si c'est un dodécagone. Le quotient exprimera la grandeur des arcs qui doivent correspondre au nombre donné de côtés ; lesquels côtés seront des cordes égales : puisqu'elles soutiendront des arcs égaux. (318.)

PROBLÈME V.

488. *Inscrire ou circoncrire un polygone régulier à un cercle. (fig. 69.)*

SOLUTION. I°. Pour inscrire un polygone régulier à un cercle ; tirez du centre à un des angles, un rayon oblique CA ; & du même centre & de la grandeur de ce rayon CA , décrivez une circonférence : le polygone sera inscrit dans ce cercle $ABDRA$.

II°. Pour circoncrire un polygone régulier à un cercle ; du centre du polygone, menez une perpendiculaire Cb sur un des côtés ; & du même centre & de la grandeur de cette perpendiculaire Cb , qui sera le rayon droit ou l'aphotème, décrivez une circonférence : le polygone sera circonscrit à ce cercle $abdra$.

PARAGRAPHE SECONDE.

RAPPORT DES SURFACES.

489. OBSERVATION. I°. COMME il y a un rapport ou une raison géométrique, entre deux grandeurs
Dd ij

linéaires ; il y a aussi un rapport ou une raison géométrique entre deux surfaces , qui sont chacune le résultat de deux grandeurs linéaires , d'une longueur par une largeur , ou d'une base par une hauteur. Par exemple , (fig. 92.)

Il y a un rapport entre la base B & la base b , & un autre rapport entre la hauteur H & la hauteur h . En multipliant d'une part la base B par la hauteur H ; & en multipliant de l'autre , la base b par la hauteur h ; on aura deux surfaces S & s , qui auront aussi entre elles un rapport.

11°. Comme le rapport ou la raison géométrique de deux grandeurs simples ou linéaires , est la manière dont la première contient la seconde ou une partie de la seconde (156) ; de même la raison géométrique de deux surfaces , est la manière dont la première contient la seconde ou une partie de la seconde. Ainsi le rapport ou la raison de la surface S à la surface s , est la manière dont la première surface contient la seconde , ou une partie de la seconde. Si la première contient trois fois la seconde , la raison de la première à la seconde est $= 3$. Si la première ne contient qu'un tiers de la seconde , la raison de la première à la seconde est $= \frac{1}{3}$; & ainsi du reste.

490. DÉFINITION. Le rapport d'une surface à une autre , est une raison composée qui quelquefois est une raison doublée. (fig. 92.)

1°. La raison composée est le produit de deux raisons , égales ou inégales , antécédent par antécédent , & conséquent par conséquent (217). Par exemple , en comparant la hauteur H à la hauteur h , & la base B à la base b , si on exprime ainsi ces deux raisons simples $\frac{H}{h}$ & $\frac{B}{b}$; on en fera une raison composée $\frac{HB}{hb}$. Cette dernière raison , HB est à hb , sera une raison composée , qui exprimera le rapport de la surface S à la surface s .

II°. La *raison doublée*, dont il est ici question, est le produit d'une même raison simple, dont l'antécédent & le conséquent sont élevés à leurs quarrés. Par exemple, dans cette raison, H est à B; si on élève l'antécédent & le conséquent chacun à son quarté, on aura cette raison HH est à BB, qui sera doublée de la précédente.

III°. Dans la mesure des surfaces, on appelle *produisans*, les deux termes que l'on multiplie l'un par l'autre, pour avoir le produit d'une surface. Par exemple, si on multiplie une base $B = 4$, par une hauteur $H = 3$; la grandeur B est un produisant: l'autre grandeur H est l'autre produisant.

De même la base BC est un produisant, & la hauteur AB est l'autre produisant du rectangle ABCD. (*fig. 57.*)

De ces définitions découle la proposition suivante, qui porte en elle-même son évidence, & qu'on peut mettre au rang des axiomes.

491. AXIOME. *Deux surfaces sont entre elles, comme le produit des deux dimensions de l'une, est au produit des deux dimensions de l'autre: puisque ces deux produits expriment la mesure des deux surfaces. On pourroit dire aussi que ces deux surfaces sont en raison composée de leurs deux dimensions respectives: ce qui revient à la même chose.*

RAPPORT DES RECTANGLES.

492. OBSERVATION. Les deux produisans d'un rectangle quelconque, sont la base & la hauteur (447). Pour trouver le *rappôrt de deux rectangles*, semblables ou dissemblables, il faut donc multiplier la base du premier par sa hauteur, & la base du second par sa hauteur. Le rapport qui sera entre les deux produits respectifs, exprimera le rapport qui sera entre les sur-

faces des deux rectangles. Par exemple, si le premier est $12 \times 10 = 120$; & que le second soit $8 \times 6 = 48$; la surface du premier rectangle, sera à celle du second, comme 120 est à 48.

RAPPORT DES PARALLÉLOGRAMMES.

493. OBSERVATION. Les parallélogrammes obliqu'angles étant égaux en surface à des rectangles de même base & de même hauteur (440); leurs deux produisans sont aussi la base & la hauteur. Par conséquent, pour trouver le rapport de deux parallélogrammes, rectangles ou obliqu'angles, semblables ou dissemblables, il faut multiplier dans l'un & dans l'autre, la base par la hauteur: les produits exprimeront le rapport de leurs surfaces. Dans deux parallélogrammes, rectangles ou obliqu'angles, semblables ou dissemblables,

I°. Si les bases sont égales, les surfaces sont entre elles comme les hauteurs. (221. II°.)

II°. Si les hauteurs sont égales, les surfaces sont entre elles comme les bases. (221. II°.)

III°. Si les deux dimensions sont en raison inverse, les deux surfaces sont égales. Car si la base du premier est double de la base du second, tandis que la hauteur du second est double de la hauteur du premier; il est clair que ce que l'un a de plus en largeur, l'autre l'a de plus en hauteur: & ainsi du reste.

RAPPORT DES TRIANGLES.

494. OBSERVATION. Les triangles étant la moitié des parallélogrammes, rectangles ou obliqu'angles, de même base & de même hauteur (442); leurs deux produisans sont la base par la moitié de la hauteur. Par conséquent, pour trouver le rapport de deux trian-

gles quelconques, semblables ou dissemblables, il faut multiplier dans l'un & dans l'autre, la base par la demi-hauteur : les produits exprimeront le rapport de leurs surfaces. Dans deux triangles quelconques, ainsi que dans les parallélogrammes dont ils sont des moitiés :

I°. *Si les bases sont égales, les surfaces sont entre elles comme les hauteurs, ou comme les demi-hauteurs.*

II°. *Si les hauteurs sont égales, les surfaces sont entre elles comme les bases. (221. II°.)*

III°. *Si les deux dimensions sont en raison inverse dans l'un & dans l'autre, les surfaces sont égales entre elles. La raison de tout cela, c'est que le rapport qui est entre les tous qui sont les parallélogrammes, est aussi entre les moitiés qui sont les triangles.*

De cette théorie sur le rapport des triangles, découlent deux corollaires qui renferment la même démonstration fondamentale que nous avons donnée ailleurs sur les lignes proportionnelles (396, 400) : Elle que nous donnons ici, & qu'on pourra, si l'on veut, regarder comme superflue, est indépendante de l'égale inclinaison des lignes.

495. COROLLAIRE I. *Si les deux côtés d'un triangle quelconque sont coupés par une parallèle à la base, les deux côtés seront coupés proportionnellement. (fig. 72.)*

DÉMONSTRATION. Soit le triangle BAD : tirez la parallèle EF, & les deux lignes ED, BF. Je dis que $AB : EB :: AF : FD$.

I°. Considérez les deux triangles AFE, EFB, comme ayant leur sommet au point F, & leurs bases sur la même ligne AB : ils ont même hauteur FE ; ils sont donc entre eux comme leurs bases (494). Donc la base

DE IV

AE est à la base EB; comme le triangle EAF, est au triangle EBF.

II°. Les deux triangles BFE, DFE, qui ont même base EF, & même hauteur, puisqu'ils sont entre les mêmes parallèles, sont égaux : donc le triangle EAF a le même rapport avec ces deux triangles,

III°. Considérez les deux triangles EAF, EFD ; comme ayant leur sommet, au point E, & leurs bases sur la même ligne AD ; ils ont même hauteur EF ; ils sont donc entre eux comme leurs bases. Donc la base AF, est, à la base FD ; comme le triangle EAF, est au triangle EED.

IV°. Il s'agit de ce qu'on vient de démontrer, qu'on a deux raisons égales à une troisième, & par-là même égales entre elles : savoir,

La Ligne. La Ligne. Le Triangle. Le Triangle.

$$AF \cdot FD :: EAF, EFD. = EFB.$$

Dans ces deux proportions, la dernière raison est la même : donc les deux premières raisons, égales chacune à la même raison, sont égales entre elles ; & donnent cette nouvelle proportion $AE, EB :: AF, FD$. Et *alternando*, $AE, AF :: EB, FD$.

- Cette dernière proportion exprime le rapport des côtés coupés par la ligne EF, parallèle à la base BD: donc les deux côtés sont coupés proportionnellement par la parallèle à la base, C, Q, F, D.

496. COROLLAIRE II. Si les deux côtés d'un trian-
gle quelconque sont coupés par une parallèle à la base ;
la partie AE, est au côté entier AB ; comme la partie
-AF, est à l'autre côté entier AD.

DÉMONSTRATION. Par le corollaire précédent, on a cette proportion AE.EB :: AF.FD.
Donc, *componendo* (174) AE.AE+EB::AF.AF+FD.
& en simplifiant, AE.AB :: AF.AD.

Par conséquent, la section du premier côté, est à la section correspondante du second côté; comme le premier côté entier, est au second côté entier. C. Q. F. D.

497. PROBLÈME. *Diviser un triangle en tant de parties qu'on voudra, selon des raisons données ou prises sur la base.* (fig. 91.)

SOLUTION. Soit le triangle quelconque ACB: supposons qu'on veuille diviser sa surface en quatre portions qui soient entre elles comme Bm, mn, nr, rC.

Du sommet A du triangle, menez la ligne AP, parallèle à la base BC; & les lignes Am, An, Ar, aux points donnés qui marquent le rapport des divisions à faire.

Le triangle sera divisé en quatre portions, qui sont entre elles selon les raisons données. Car ces quatre triangles partiels, dont la somme est égale en surface au triangle total, étant compris entre les mêmes parallèles AP & BC, ont tous la même hauteur: ils sont donc entre eux comme leurs bases Bm, mn, nr, rC, qui expriment les rapports des divisions à faire. (494.)

On pourra par ce moyen & par cette méthode, diviser un pré ou un champ triangulaire, en telles portions qu'on voudra.

RAPPORT DES FIGURES SEMBLABLES.

498. DÉFINITION. Deux surfaces ou deux figures sont semblables, quand tous leurs angles sont respectivement égaux, & que de plus leurs côtés homologues sont proportionnels: en telle sorte qu'elles ne diffèrent entre elles que par la grandeur de leurs périmètres & de leurs surfaces; & qu'étant placées l'une sur l'autre par un de leurs angles égaux, la plus petite devienne une partie de la plus grande, & reste toujours semblable à la plus grande. Par exemple (fig. 66),

I°. Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés $ABCDEF$ & $abcdef$, sont semblables : puisqu'e l'un étant placé sur l'autre par leurs centres, ils forment un même nombre de triangles dont les angles sont égaux, & dont les côtés sont proportionnels. On peut dire la même chose de deux cercles, placés l'un sur l'autre par leurs centres. De même (fig. 45),

II°. Deux triangles CAB & cab sont semblables, si les trois angles du petit triangle sont égaux aux trois angles correspondans du grand triangle, chacun à chacun : car alors les trois côtés du petit triangle, seront proportionnels aux trois côtés homologues du grand triangle. (403.)

III°. Deux carrés sont toujours semblables : parce que tous leurs angles sont toujours égaux, & tous leurs côtés toujours proportionnels. (fig. 1.)

IV°. Deux rectangles sont ou semblables ou dissemblables. Ils sont semblables, quand la hauteur du premier est à la hauteur du second ; comme la base du premier est à la base du second. Ils sont dissemblables, quand cette proportion n'a pas lieu. (fig. 52.)

V°. Deux Parallélogrammes sont semblables, quand les quatre angles du premier sont égaux aux quatre angles correspondans du second, chacun à chacun ; & que de plus, la hauteur du premier est à la hauteur du second, comme la base du premier est à la base du second. (fig. 16 & 57.)

VI°. Deux polygones irréguliers sont semblables, quand ayant le même nombre de côtés, ils ont leurs angles correspondans, égaux ; & leurs côtés homologues, proportionnels.

T H É O R È M E.

499. Quand deux figures sont semblables, leurs surfaces sont entra elles, comme les carrés d'une de leurs dimensions homologues. (fig. 52.)

DÉMONSTRATION. Quand deux figures sont semblables, leurs deux dimensions, savoir la hauteur & la largeur, sont proportionnelles ; selon la définition précédente. Il s'agit donc de démontrer que, lorsque ces deux dimensions sont proportionnelles, les deux surfaces sont entre elles comme les quarrés d'une de ces dimensions quelconques ; comme les quarrés de la hauteur, ou comme les quarrés de la largeur ou de la base. Comme toutes les figures semblables peuvent être réduites en triangles, prenons d'abord pour exemple général deux triangles, les deux triangles semblables CAB & *cab*, dont les deux dimensions proportionnelles sont la base & la demi-hauteur.

1°. J'appelle *a* la première dimension du petit triangle, ou sa base : j'appelle *b* sa seconde dimension, ou sa demi-hauteur. De même, j'appelle *A* la première dimension du grand triangle, ou sa base : j'appelle *B* sa seconde dimension, ou sa demi-hauteur. La quantité *n* fait la fonction d'un multiplicateur indéterminé, qui rend la base & la hauteur du grand triangle proportionnellement plus grandes que la base & la hauteur du petit. Par exemple, si la base du grand triangle est deux fois plus grande que la base du petit ; le multiplicateur indéterminé *n* marque qu'il faut prendre cette base du petit triangle 2 fois, ou la multiplier en longueur par 2. Ainsi le multiplicateur indéterminé *n* représentera l'exposant de la raison qui est entre les bases & entre les hauteurs ; & signifiera que la grandeur à laquelle il est joint, est prise un certain nombre de fois, par exemple, une fois & demi, ou 3 fois, ou 5 fois & un quart, ou 100 fois & un dixième, ou 100000 fois & un cent-cinquante-septième ; & ainsi du reste.

Comme les deux triangles sont semblables, par la supposition, & que leurs deux dimensions sont proportionnelles ; j'aurai pour expression de ces deux

dimensions, cette proportion : . . . $a . an :: b . bn$.

II°. Il s'agit de démontrer que la petite surface est à la grande, comme le carré de a est au carré de an , ou comme le carré de b est au carré de bn ; & je le démontre ainsi.

Le produit ou l'expression de la petite surface est ab : le produit ou l'expression de la grande surface est $anbn$ (491). Donc la raison ou le rapport de la petite surface à la grande, est la raison de ab à $anbn$. Donc $s . S :: ab . anbn$.

III°. Mais à la place de cette dernière raison, je puis en mettre une autre qui lui soit égale (168): je mets donc à la place de cette dernière raison, ou la raison des carrés des bases, ou la raison des carrés des hauteurs; & je démontre que ces deux dernières raisons sont égales à la précédente $ab . anbn$.

ou que $aa . anan :: ab . anbn$;

& que $bb . bnb n :: ab . anbn$.

Car deux raisons sont égales entre elles, quand elles forment une proportion; & elles forment une proportion, quand le produit des extrêmes est égal au produit des moyens (172). Or si je mets en proportion les quatre premières & les quatre dernières grandeurs précédentes, le produit des extrêmes $aaabnn$ ou $bbbann$, est évidemment égal au produit $aaabnn$ ou $bbbann$ des moyens, qui ont pour expression les mêmes lettres: donc les deux premières raisons sont égales à la dernière. Donc à la place de la dernière raison, on peut mettre indifféremment l'une ou l'autre des deux premières qui lui sont égales. Donc puisqu'on

a déjà $s . S :: ab . anbn$;

on aura aussi $s . S :: aa . aann$;

ou bien $s . S :: bb . bbn n$.

IV°. Appliquez la même méthode algébrique aux deux produisans ou aux deux dimensions de deux rectangles semblables, de deux parallélogrammes sem-

blables, de deux trapèzes semblables, de deux polygones semblables; & vous aurez par-tout la même démonstration, de laquelle il résultera que les deux figures semblables sont entre elles en surface, ou comme les quarrés de leurs bases, ou comme les quarrés de leurs hauteurs: en telle sorte que si le quarré d'une de ces dimensions est neuf fois plus grand que le quarré de la dimension homologue, la surface à laquelle appartient cette dimension plus grande, surpassera neuf fois, ou contiendra neuf fois l'autre surface; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

500. APPLICATION. *Deux cercles sont entre eux en surface, comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs circonférences.* (fig. 68.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux cercles ADA & ada: il faut démontrer que la surface du grand est à la surface du petit, comme le quarré du grand rayon est au quarré du petit rayon; ou comme le quarré de la grande circonférence, est au quarré de la petite circonférence.

I°. Les deux produisans de la surface d'un cercle sont la circonférence par la moitié du rayon: puisque la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle qui auroit une base égale à la circonférence, & une hauteur égale au rayon (481); & que les deux produisans d'un tel triangle sont la base par la moitié de la hauteur (448). D'ailleurs, dans deux cercles inégaux, la grande circonférence est à la petite, comme le grand rayon est au petit: ainsi ces deux dimensions sont proportionnelles. (474.)

II°. Désignant donc ces deux produisans comme dans le théorème précédent, la petite circonférence sera a ; la grande circonférence sera an : le petit rayon sera b ; le grand rayon sera bn . Le produit de la petite

surface sera ab : le produit de la grande surface sera $abnn$.

Le rapport de la petite surface à la grande sera donc $s . S :: ab . abnn$,

ou bien $s . S :: aa . aenn$,

ou bien $s . S :: bb . benn$.

Car les deux dernières raisons de ces deux dernières proportions, étant égales à la dernière raison de la première proportion, elles peuvent leur être substituées. (499. III^o.)

Ainsi pour évaluer la surface de ces deux cercles, il faut prendre dans l'un & dans l'autre, le produit de la circonférence par la moitié du rayon. Mais pour évaluer le rapport de ces deux surfaces, on peut prendre indifféremment du le rapport des quarrés des rayons; ou le rapport des quarrés des circonférences; ou le rapport des produits de la circonférence par le rayon ou par le demi rayon, dans l'un & dans l'autre cercle. C. Q. F. D.

501. COROLLAIRE. Deux cercles sont aussi entre eux en surface, comme les quarrés de leurs diamètres, & comme les quarrés de tous leurs arcs semblables.

DÉMONSTRATION. I^o. Si, au lieu des rayons, on quarré les diamètres des deux cercles; les deux derniers quarrés seront quadruples des deux premiers. Ainsi deux cercles étant entre eux en surface comme les quarrés de leurs rayons; ils sont aussi entre eux en surface comme le quadruple de ces quarrés des rayons: puisque si on multiplie deux grandeurs par une même grandeur 4, on ne change point le rapport des deux grandeurs multipliées, dont les produits sont entre eux comme les racines. (164.)

II^o. Deux cercles étant entre eux en surface comme les quarrés de leurs circonférences, ils sont aussi entre eux comme les quarrés de tous les arcs semblables de

ces circonférences : puisque deux grandeurs étant divisées par une même grandeur , leurs quotiens conservent le même rapport (465) ; & que substituer aux quarrés des circonférences , les quarrés de leurs arcs semblables , c'est comme les diviser l'une & l'autre par une même grandeur. Par exemple , les deux surfaces circulaires étant entre elles comme les quarrés de leurs circonférences ; si au lieu de ces quarrés on prend les quarrés des demi-circonférences , on aura des quarts des deux grandeurs primitives ; & c'est comme si on avoit divisé l'une & l'autre , par une même grandeur 4 : si on prend les quarrés des quarts de l'une & de l'autre circonférence , on aura des seizièmes des deux grandeurs primitives ; & c'est comme si on les avoit divisé l'une & l'autre , par une même grandeur 16 : & ainsi du reste. C. Q. F. D.

RAPPORT DES POLYGOÑES.

502. OBSERVATION. Les deux produisans d'un polygone régulier , sont le périmètre par la moitié du rayon droit , ou le rayon droit par la moitié du périmètre. Les surfaces de deux polygones réguliers , semblables ou dissemblables , sont donc entre elles ; comme le produit du périmètre de l'un par la moitié de son rayon droit , est au produit du périmètre de l'autre par la moitié de son rayon droit.

I°. On peut considérer un polygone régulier , d'un nombre quelconque de côtés , comme une suite de triangles dont le périmètre seroit la base : la surface de tous ces triangles est le produit de la base , par la moitié de la hauteur. (450.)

II°. Quand deux polygones , réguliers ou irréguliers , sont semblables , leurs surfaces sont entre elles comme les quarrés d'une de leurs dimensions homologues quelconque (499). Par-là on trouvera aisément le rapport de surface entre deux villes ou deux cita-

des semblables, dont on connoît ou le diamètre ou le périmètre : par exemple, si deux villes dont les figures sont semblables, ont l'une un quart de lieue & l'autre trois quarts de lieue de diamètre; leurs surfaces sont entre elles comme 1 est à 9.

THÉORÈME I.

503. *Si on inscrit dans un même cercle, deux polygones réguliers de différens nombres de côtés; le polygone qui aura le plus de côtés, aura le plus de surface, & le plus grand périmètre. (fig. 69.)*

DÉMONSTRATION. Si dans un même cercle ABDRA, au lieu d'un exagone, on inscrit un dodécagone; la sixième partie de l'exagone, savoir, le triangle rectiligne $CM \hat{b} NC$, aura pour périmètre & pour surface $MCN \hat{b} M$; au lieu que le sixième du dodécagone, savoir, les deux triangles rectilignes BCM & BCN , aura pour périmètre & pour surface $BMCNB$; & fera plus grand de toute la quantité triangulaire $BM \hat{b} NB$: donc tout le dodécagone a plus de surface & un plus grand périmètre que tout l'exagone. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

504. *De toutes les figures inscrites dans un même cercle, la plus grande en surface & en périmètre, est le cercle: la plus petite, est le triangle. (fig. 69.)*

DÉMONSTRATION. Toute figure inscrite au cercle, a pour côtés, des cordes MN ou MB , lesquelles s'approchent d'autant plus de la circonférence, & laissent d'autant moins d'espace entre elles & la circonférence, qu'elles deviennent plus petites. Or dans un polygone régulier d'une infinité de côtés, tel qu'est le cercle, les cordes qui forment ses côtés infiniment petits se confondent avec la circonférence; & ne
laissent

laissent aucun vuide entre elles & cette circonférence ; au lieu que le triangle laisse beaucoup de vuide & plus de vuide qu'aucune autre figure , entre ses côtés & la circonférence ; comme il est facile de le concevoir en inscrivant un triangle dans un cercle , & en convertissant successivement ce triangle en un quadrilatere , en un pentagone , en un exagone , en un dodécagone (*fig. 123 & 124*) , par la division d'un ou de plusieurs de ses côtés. C. Q. F. D.

THÉORÈME III.

505. *De tous les polygones réguliers circonscrits à un même cercle , celui qui aura le plus de côtés , aura un plus petit périmètre & une plus petite surface. (fig. 69.)*

DÉMONSTRATION. Soit un polygone circonscrit à un cercle *abdra*. Plus le polygone aura de côtés ; plus son périmètre s'approchera de la circonférence du cercle inscrit , laquelle est plus petite qu'aucun des polygones circonscrits. Par exemple , la sixieme partie CDEC de l'exagone circonscrit , est plus grande que la sixieme partie CdmnC du dodécagone circonscrit au cercle.

On peut dire & démontrer la même chose , à l'égard de toutes les figures qu'on voudra circoncrire à un même cercle (*fig. 123 & 124*). On trouvera que le triangle circonscrit a plus de périmètre & de surface , que le quadrilatere ; le quadrilatere , plus que le pentagone ; & ainsi de suite à l'infini. C. Q. F. D.

THÉORÈME IV.

506. *Tout polygone régulier donné , peut être inscrit ou circonscrit à un cercle. (fig. 69.)*

DÉMONSTRATION. 1°. Dans tout polygone régulier , tous les rayons obliques sont égaux ; donc si du centre
E

du polygone, avec un rayon oblique quelconque CA , on décrit une circonférence $ABDRA$; elle passera par tous les sommets des angles, & le polygone sera inscrit.

II°. Dans tout polygone régulier, tous les rayons droits Cb ou Cr sont égaux : donc si du centre du polygone, avec un rayon droit Cb , on décrit une circonférence $abda$, elle atteindra le milieu b & r de tous les côtés MN , DE , EF ; & le polygone sera circonscrit. C. Q. F. D.

RAPPORT DES FIGURES ISOPÉRIMETRES.

507. DÉFINITION. On nomme *figures isopérimètres*, celles qui ont un même périmètre, ou dont les périmètres sont égaux. Par exemple, si la somme des quatre côtés d'un rectangle, est égale à la somme des quatre côtés d'un autre rectangle égal ou inégal en surface; ces deux rectangles sont isopérimètres : parce que leurs contours ont précisément la même dimension. (467.)

THÉORÈME I.

508. Deux polygones réguliers quelconques d'un même nombre de côtés, qui ont des périmètres & des rayons droits égaux, sont égaux en surface : puisque leurs surfaces de part & d'autre, sont le produit des rayons droits égaux, par les demi-périmètres égaux. (502.) C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

509. Si les polygones réguliers ont un même périmètre & un nombre différent de côtés ; celui qui aura plus de côtés, aura plus de surface.

DÉMONSTRATION. La surface de chacun de ces polygones, est égale au produit du rayon droit par la

moitié du périmètre : donc le périmètre étant supposé le même dans chaque polygone , la surface sera d'autant plus grande , que le rayon droit sera plus grand.

Or plus le polygone aura de côtés , plus son rayon droit sera grand (469). Par exemple , en supposant qu'un pentagone & un exagone aient le même périmètre , il faut nécessairement que le rayon droit de l'exagone soit plus grand que celui du pentagone.

Car si le rayon droit de l'exagone & du pentagone étoient égaux , on pourroit circonscrire le pentagone & l'exagone à un même cercle (506) ; & alors le périmètre de l'exagone approchant plus de la circonférence du cercle inscrit , seroit plus petit que le périmètre du pentagone (505) : ce qui est contre la supposition. Donc si le pentagone & l'exagone ont un même périmètre , il faut nécessairement que le rayon droit de l'exagone soit plus grand que le rayon droit du pentagone : ce qui donne à l'exagone un plus grand produisant & par-là même une plus grande surface qu'au pentagone. Donc si deux polygones réguliers d'un nombre différent de côtés , sont isopérimètres ; celui qui aura plus de côtés , aura plus de surface. C. Q. F. D.

§ 10. COROLLAIRE. *Le cercle étant un polygone régulier d'une infinité de côtés (466) ; il contient plus de surface , que toute autre figure dont le périmètre est égal au périmètre du cercle : puisque tout polygone régulier , différent du cercle & de même périmètre que le cercle , a moins de côtés que le cercle.*

THEOREME III.

§ 11. *Parmi les figures isopérimètres qui ont un même nombre de côtés , les angles correspondans étant supposés égaux ; celles dont les côtés seront égaux ou approcheront plus de l'égalité , auront plus de surface.*

Ee ij

DÉMONSTRATION. Soient, par exemple, deux rectangles, dont les périmètres soient égaux, mais dont l'un ait plus de longueur & moins de hauteur que l'autre; en telle sorte cependant que les deux bases & les deux côtés de l'un, donnent une somme égale à celle des deux bases & des deux côtés de l'autre. Les périmètres de ces deux rectangles seront égaux: mais celui dont la hauteur & la largeur approcheront plus de l'égalité, aura plus de surface que l'autre.

Car supposons que la surface de chaque rectangle soit le produit d'une hauteur & d'une largeur dont la somme soit 8.

I°. Si l'on divise la somme 8, ou la hauteur & la largeur, en deux parties égales 4 & 4, on aura pour la surface le produit $4 \times 4 = 16$.

II°. Si l'on divise la somme des deux mêmes produisans 8, en deux parties inégales 5 & 3; on aura pour la surface, le produit $5 \times 3 = 15$, plus petit que 16.

III°. Si l'on divise la somme des deux mêmes produisans 8, en deux parties encore plus inégales 6 & 2; on aura pour la surface, le produit $6 \times 2 = 12$, encore plus petit que 15.

IV°. Si l'on divise encore la somme des deux mêmes produisans 8, en deux parties encore plus inégales 7 & 1; on aura pour la surface le produit 7, encore plus petit que 12.

V°. Si l'on divise encore la somme des deux mêmes produisans 8, en deux parties encore plus inégales 7 & demi d'une part, & un demi de l'autre; on aura pour la surface le produit $7 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{4}$, encore plus petit que 7: & ainsi de suite à l'infini.

On conçoit que la même théorie peut s'appliquer à deux parallélogrammes, à deux triangles, dont la surface est le produit d'une base plus ou moins grande,

par une hauteur ou une demi-hauteur plus ou moins grande aussi. Les produits, qui expriment les surfaces, seront d'autant plus petits, que les deux produits seront plus inégaux. C. Q. F. D.

512. COROLLAIRE. Il résulte de-là, que le *quarré* a plus de surface que le rectangle isopérimètre, qui n'est pas un quarré : que le *rectangle* a plus de surface que le parallélogramme obliqu'angle dont les quatre côtés sont égaux à ceux du rectangle, chacun à chacun : que le *triangle équilatéral* a plus de surface que le triangle isocèle ou scalène, isopérimètre ; & ainsi du reste.

P R O B L È M E.

513. *Trouver un cercle, dont la surface ait un rapport donné, avec la surface d'un autre cercle donné ; par exemple, qui soit double ou sous-double, triple ou sous-triple.*

SOLUTION. Prenez une ligne qui ait avec le diamètre a du cercle donné, un rapport égal à celui que doit avoir le cercle cherché. Par exemple,

1°. Si le cercle cherché, doit être *double* du cercle donné ; prenez une ligne $2a$, qui soit double du diamètre a de ce cercle donné ; & cherchez ensuite une moyenne proportionnelle m (414), entre cette ligne $2a$ & le diamètre connu a : vous aurez cette proportion continue : $\div 2a . m . a$; & par la même, $\div a . m . 2a$.

Cette moyenne proportionnelle m fera le diamètre d'un cercle double du cercle cherché. Car dans cette dernière proportion continue, le quarré du premier terme, est au quarré du second ; comme le premier est au troisieme ; c'est-à-dire, que $aa . mm :: a . 2a$. (234.)

Or dans cette seconde raison, le conséquent est le double de son antécédent : donc dans la première raison, le conséquent est aussi le double de son antécé-

dent ; c'est-à-dire , que le quarré du diametre m est double du quarré du diametre a . Mais d'ailleurs les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs diametres (501) : donc le cercle dont m est le diametre , est double du cercle dont a est le diametre.

II°. Si le cercle cherché doit être *sous-triple* du cercle donné ; on aura d'abord , $\div \frac{1}{3} a . m . a$: ensuite , $\div a . m . \frac{1}{3} a$: enfin , $\div aa . mm . a . \frac{1}{3} a$.

RAPPORT DE L'HYPOTHÉNUSE AUX CÔTÉS.

514. DÉFINITION I. Dans un triangle rectangle , on nomme *hypothénuse* , le côté opposé à l'angle droit. Dans le triangle ABC , qu'on suppose rectangle en B , le côté AC est l'hypothénuse : la ligne BD est une perpendiculaire , menée de l'angle droit sur l'hypothénuse. (fig. 70.)

De même dans le triangle BDC , rectangle en m ; le côté BC est l'hypothénuse. De même encore , dans le triangle BDA , rectangle en n , le côté AB est l'hypothénuse.

On voit par-là , qu'une même ligne BC , par exemple , peut à la fois être côté , à l'égard d'un triangle ACB ; & hypothénuse , par rapport à un autre triangle BDC.

515. DÉFINITION II. Le *quarré d'une ligne* , est un quarré dont les quatre côtés sont égaux à cette ligne. Par exemple (fig. 71) :

Dans le triangle ACB , rectangle en B , le quarré de l'hypothénuse AC , est le quarré ACCE : le quarré du grand côté BC , est le quarré BN : le quarré du petit côté AB , est le quarré BM.

Le quarré d'une ligne quelconque AC , s'exprime ou se marque communément en cette maniere AC ; ce qui signifie simplement que ces lignes ne représentent pas des grandeurs linéaires , mais des grandeurs élevées à leurs quarrés. Ainsi AC est simple-

ment une grandeur linéaire : \overline{AC} est une grandeur linéaire élevée à son carré.

L E M M E.

316. Si dans un triangle rectangle ABC , on abaisse du sommet de l'angle droit, une perpendiculaire sur l'hypothénuse ; on aura trois lignes moyennes proportionnelles ; savoir (fig. 70),

I°. Le petit côté AB , moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière AC , & le segment adjacent AD . Le petit triangle ABD , & le grand triangle ABC , sont équiangles ou semblables. Car ils ont chacun un angle droit ; & de plus l'angle en A est commun à l'un & à l'autre : donc le troisième angle est aussi égal de part & d'autre ; savoir, l'angle $\phi = C$. Donc les côtés homologues de ces deux triangles, sont proportionnels ; & on a cette proportion : l'hypothénuse AC du grand triangle, est à l'hypothénuse AD du petit triangle ; comme le petit côté AB du grand triangle, est au petit côté AD du petit triangle ; ou $AC . AB :: AB . AD$.

II°. Le grand côté BC , moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière & le segment adjacent DC . Le moyen triangle BDC , & le grand triangle ABC , sont équiangles. Car ils ont chacun un angle droit ; & de plus l'angle en C est commun à l'un & à l'autre : donc le troisième angle est aussi égal de part & d'autre ; savoir, l'angle $\epsilon = A$. Donc les côtés homologues de ces deux triangles, sont proportionnels ; donc on a cette proportion : l'hypothénuse AC du grand triangle, est à l'hypothénuse BC du moyen triangle ; comme le grand côté BC , du grand triangle, est au grand côté DC du moyen triangle ; ou $AC . BC :: BC . DC$.

III°. La perpendiculaire BD , moyenne proportion-

Eiv

nelle entre les deux segmens AD & DC. Le petit triangle ABD, & le moyen triangle BDC, sont équiangles. Car ils ont chacun un angle droit : de plus l'angle α vient d'être démontré égal à l'angle A : par conséquent l'angle α est aussi égal à l'angle C. Donc les côtés homologues de ces deux triangles, sont proportionnels : donc le petit côté AD du petit triangle, est à son moyen côté BD ; comme le petit côté BD du moyen triangle, est à son moyen côté DC : ou AD, BD :: BD, DC. Ce qu'il falloit démontrer,

THÉORÈME FONDAMENTAL.

§ 17. Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal au carré des deux autres côtés. (fig. 71.)

DÉMONSTRATION. Soit le triangle rectangle ABC ; dont AC est l'hypothénuse : l'angle B est droit ; puisque c'est un angle inscrit, appuyé sur le diamètre AC (368). Du sommet de l'angle droit, tirez sur l'hypothénuse AC, la perpendiculaire BDG : elle partagera le carré AF de l'hypothénuse, en deux rectangles AG, DF. Je démontre que AG est égal à BM, qui est le carré de AB ; & que DF est égal à BN, qui est le carré de BC. (§ 15.)

I°. On a démontré dans le lemme précédent, que le côté AB est moyen proportionnel entre la base entière AC & le segment AD. Or $AE = AC$: donc $AE, AB :: AB, AD$: donc le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Or le produit des extrêmes est le rectangle AG ; & le produit des moyens est le carré BM : donc le rectangle AG est égal au carré BM,

II°. Il a été aussi démontré dans le lemme précédent, que l'autre côté BC est moyen proportionnel entre la base entière AC & l'autre segment DC. Or $AC = CF$: donc $CF, BC :: BC, DC$: donc le rectangle

DF, qui est le produit des extrêmes, est égal au carré BN, qui est le produit des moyens.

III°. Le rectangle AG est égal au carré BM; le rectangle DF est égal au carré BN. Ces deux rectangles, pris ensemble, sont le carré de l'hypothénuse; & les deux autres carrés sont les carrés des deux côtés du triangle: donc le carré de l'hypothénuse, est égal au carré des deux autres côtés d'un triangle rectangle. C. Q. F. D.

§ 18. REMARQUE. Ce théorème est une source immense de lumières dans les Mathématiques, surtout pour la Trigonométrie. Pythagore, qui découvrit & démontra ce mémorable rapport, en connut si bien l'importance & le mérite, en faisoit & en suivit si ingénieusement toutes les applications & toutes les dépendances, qu'il immola, dit-on, cent taureaux à ses dieux protecteurs: soit pour les remercier avec le plus grand éclat, de lui avoir accordé une lumière si utile à la perfection de l'esprit humain; soit pour manifester plus authentiquement au monde éclairé, l'enthousiasme que lui inspiroit l'admirable découverte qu'il venoit de faire & qui devoit éterniser sa mémoire.

T H É O R È M E I I.

§ 19. *La diagonale d'un carré, quoiqu'incommensurable en nombres, est commensurable en lignes, avec le côté d'un carré (fig. 73.)*

DÉMONSTRATION. I°. La diagonale AC est *incommensurable en nombres* avec le côté quelconque AD. Car le carré de la diagonale AC, est égal au carré du côté AD; plus au carré du côté DC: puisque la diagonale AC est l'hypothénuse du triangle rectangle ADC. Or les deux côtés AD & DC sont égaux: donc le carré de la diagonale AC, est double du carré du côté AD. Ainsi ces deux derniers carrés sont entre eux comme 2 & 1: la diagonale AC est donc

au côté AD; comme la racine de 2, est à la racine de 1. Mais il n'y a aucun nombre assignable, qui puisse exprimer ce rapport : donc la diagonale est incommensurable avec le côté d'un carré. (6 & 216.)

Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette première partie, qu'il nous importe peu de démontrer plus rigoureusement. Il suffit de savoir qu'il n'y a point d'aliquote commune, ni en nombres entiers, ni en fractions, qui puisse mesurer exactement la diagonale & le côté : il reste toujours une quantité *sourde*, un rapport *incommensurable*, entre l'un & l'autre, qu'il est impossible d'assigner en nombres.

II°. La diagonale est *commensurable en lignes* avec le côté. Car prenez la diagonale AC & le côté AD, dont vous ferez une seule ligne totale. Du milieu de cette ligne, décrivez une circonférence (*fig. 49*), qui ait pour rayon la moitié de la ligne entière : ensuite sur la ligne totale prenez une partie égale à la diagonale; & élevez du point qui la termine, une perpendiculaire GE jusqu'à la circonférence : cette perpendiculaire (414) sera moyenne proportionnelle entre la diagonale & le côté du carré. Or une moyenne proportionnelle entre deux lignes, exprime un rapport commun entre ces deux lignes : donc le rapport entre la diagonale & le côté d'un carré, peut être exprimé & assigné en lignes. C. Q. F. D.

520. REMARQUE. La seconde partie de ce théorème, résout une difficulté qu'on pourroit faire contre la proportion qui est entre les côtés homologues des triangles semblables, sur laquelle proportion porte toute la Géométrie.

Voici l'objection. Soient les deux côtés d'un triangle, égaux l'un au côté & l'autre à la diagonale d'un carré. Dans ce cas, dira-t-on, une ligne parallèle à la base du triangle, ne coupe pas proportionnellement les deux côtés de ce triangle : puisque les deux

côtés entiers étant incommensurables, leurs parties semblables sont aussi incommensurables. (fig. 44.)

RÉPONSE. Il est facile, après ce qu'on vient de démontrer, de faire évanouir cette difficulté. La diagonale & le côté du carré sont incommensurables en nombres, mais commensurables en lignes. Pour donner plus de jour à cette réponse, supposons que la parallèle DE, coupe la moitié de l'espace compris entre la base AB & la parallèle FG tirée du sommet du triangle: ce qui est évidemment possible. Dans ce cas, la parallèle DE coupera sur l'un & sur l'autre côté, cette moitié approchante qui peut être exprimée en nombres, plus la moitié de ce *reste sourd* ou *irrationnel* ou *incommensurable*, qu'aucun nombre ne peut exactement exprimer.

P R O B L È M E.

521. *Faire un carré double ou sous-double d'un autre carré.* (fig. 73.)

SOLUTION. 1°. Pour faire un *carré double* d'un carré donné, prenez la diagonale du carré donné; & sur cette diagonale AC faites un nouveau carré, dont les quatre côtés soient égaux à cette diagonale. Ce carré GH, fait sur cette diagonale, sera égal aux deux carrés faits sur les deux côtés du carré donné. Par exemple, le carré fait sur la diagonale ou hypothénuse AC, est égal au carré du côté AB, plus au carré du côté BC (517). Ensuite, (fig. 124):

II°. Pour faire un *carré sous-double*, ou de moitié plus petit en surface, qu'un carré donné ABCD; prenez un des côtés AD, & faites-en la diagonale *ac* d'un nouveau carré. Ce nouveau carré sera de moitié plus petit en surface, que le carré ABCD de son hypothénuse $ac = AD$: puisque le carré de cette hypothénuse *ac*, sera égal aux deux carrés faits sur les

deux côtés égaux ad & dc , du quarré $abcd$ dont elle sera l'hypoténuse (517). Ainsi, $ABCD = 2 abcd$.

ARTICLE TROISIEME.

SECTIONS DES SURFACES.

§ 22. OBSERVATION. APRÈS avoir considéré les surfaces planes, dans leur égalité & dans leur rapport; il nous reste à les considérer comme des *plans*, propres à couper ou des lignes ou des surfaces ou des solides.

Toute surface plane est considérée comme sans profondeur : parce qu'étant seule, elle n'a qu'une profondeur infiniment petite, dont on fait abstraction, & qui n'est & ne doit être comptée pour rien ; par la raison, qu'elle auroit besoin d'être prise une infinité de fois, pour donner une profondeur sensible. (238.)

§ 23. DÉFINITION. *Un plan est une surface, telle qu'une ligne droite qui lui est appliquée en tout sens, convient par-tout avec elle ; ou telle que si une ligne droite indéfinie fait une révolution sur cette surface, la droite passera par tous les points de la surface. Telle est sensiblement la surface des miroirs ordinaires, qu'on nomme miroirs plans.*

De cette définition découlent les corollaires suivants, qu'on pourroit regarder comme autant d'axiomes, auxquels nous allons donner une succinte explication.

§ 24. COROLLAIRE I. *Un plan est la plus petite surface qu'on puisse concevoir entre les lignes qui le terminent..* Ainsi la surface plane est plus petite que la surface convexe ou concave, comprise entre les mêmes extrémités. Par exemple, la surface plane est plus petite que toute autre surface, comprise entre les quatre

lignes AB, BC, CD, DA. (fig. 57.)

525. COROLLAIRE II. *La commune section d'une ligne avec un plan, est un point : celle d'un plan avec un plan, est une ligne droite : celle d'un plan avec un solide, est une surface plane.* Ces trois conséquences portent avec elles-mêmes leur évidence, que la plus simple attention fait sentir. Par exemple (fig. 122),

Si une ligne AER coupe un plan MCNB; il est évident que leur commune section est le point E. De même si un plan MCNB coupe un autre plan ARDS; il est clair que leur commune section est la ligne EF. De même encore si un plan coupe une sphere; il est clair que la partie de la sphere coupée, qui de part & d'autre touche le plan coupant & convient avec ce plan coupant, est elle-même un plan.

526. COROLLAIRE III. *Si deux points d'une ligne droite sont sur un plan; la ligne droite y est toute entiere.* Car si cette ligne droite AC n'étoit pas toute entiere sur ce plan, elle ne conviendrait pas avec ce plan; & par conséquent ce plan ne seroit plus un plan. (fig. 57.)

527. COROLLAIRE IV. *Pour déterminer la position d'un plan; il suffit de connoître sur ce plan, la position de trois de ses points, qui ne soient pas en ligne droite :* puisque tous les autres points de ce plan ont nécessairement la même direction que les trois points connus; qui joints par des lignes droites formeroient toujours un triangle plan.

528. COROLLAIRE V. *Deux plans sont paralleles entre eux, quand le premier a trois points qui ne soient pas pris en ligne droite, également éloignés de trois points du second.* (fig. 122.)

EXPLICATION. Il est clair que deux rectangles SE & AF peuvent être également éloignés l'un de l'autre, par exemple, d'un pouce, dans une infinité de points,

dans une ligne entière EF, sans être parallèles. Mais si trois points du premier, qui forment sur lui les trois sommets d'un triangle, sont également éloignés de trois points quelconques du second, par exemple, d'un pouce; les deux plans sont nécessairement parallèles.

Le parallélisme de deux plans se détermine par des perpendiculaires égales, élevées sur différens points de l'un des deux plans, & terminées à l'autre plan, prolongé, s'il le faut.

529. COROLLAIRE VI. *Deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre; quand le premier est élevé sur le second, sans pencher ni d'un côté ni d'autre.*

Par exemple, le plan MCNB & le plan ARDS, dont la commune section est EF, sont obliques l'un à l'autre: parce que l'angle AEM est aigu. Que cet angle s'agrandisse jusqu'à ce qu'il devienne droit: les deux plans seront perpendiculaires l'un à l'autre. (fig. 122.)

Si sur un point d'un plan quelconque on pose un côté de l'équerre (364), en telle sorte que ce côté de l'équerre convienne en plein avec ce plan; un plan qui passera le long du côté élevé & perpendiculaire de l'équerre, sera perpendiculaire au plan que touche l'autre côté de l'équerre.

530. COROLLAIRE VII. *Trois points quelconques; pris dans l'espace infini, sont toujours nécessairement dans un plan.*

DÉMONSTRATION. Soient ces trois points quelconques le centre du soleil, le centre de la terre, le centre de la lune. Il est clair qu'on peut concevoir trois lignes droites, menées, l'une du centre de la terre au centre du soleil; l'autre, du centre du soleil au centre de la lune; l'autre, du centre de la lune au centre de la terre: ces trois lignes droites forment évidemment un triangle.

Maintenant , que l'on conçoive une ligne droite indéfinie , qui du sommet quelconque de ce triangle , glisse sur les côtés vers la base opposée : cette ligne droite décrira évidemment un plan , qui passera par les trois points donnés , le centre de la terre , le centre de la lune , le centre du soleil : donc ces trois points sont dans un plan. On peut démontrer de même que le centre de la terre , de Saturne , & d'une étoile quelconque Syrius , sont dans un plan. C. Q. F. D.

531. REMARQUE. Dans la longimétrie & dans la planimétrie , ainsi que dans plusieurs parties de la physique , on a souvent besoin de trouver la ligne horizontale , & des perpendiculaires à cette ligne horizontale. De-là , la nécessité de connoître & la *ligne de niveau* , & la *ligne d'à-plomb* , dont nous allons parler.

LA LIGNE D'A-PLOMB :

532. DESCRIPTION. La *ligne d'à-plomb* , qui se trouve dans les écus de mathématique , n'est autre chose qu'un fil à l'extrémité duquel on a attaché un plomb. L'usage de ce fil est de déterminer les directions perpendiculaires à l'horison ; de juger de la position des plans , de leur parallélisme , de leur inclinaison plus ou moins grande , par rapport à l'horison. Pour cet effet , on suspend la ligne d'à-plomb par une de ses extrémités , au sommet de l'angle formé par les deux branches de l'équerre , entre lesquelles on adapte aussi un quart de cercle gradué DE. (*fig. 75.*)

1^o. Si l'on pose sur un plan quelconque les points B & C de l'équerre , de façon que le fil AP puisse se mouvoir librement le long du quart de cercle ; on jugera si le plan est ou parallèle , ou perpendiculaire , ou incliné plus ou moins à l'horison , suivant que le fil répondra au point *m* , milieu du quart de cercle , ou qu'il s'en écartera plus ou moins. Le rapporteur , adapté à l'équerre , peut tenir lieu de quart de cercle.

Par exemple, on jugera que le plan BC est parallèle à l'horison, si le fil AP répond au milieu du quart de cercle DE : que le plan BC a un degré d'inclinaison en s'élevant de tel côté ; si le fil AP s'écarte du milieu du quart de cercle de la valeur d'un degré dans le sens opposé : que le plan BC a 45 degrés d'inclinaison ; si le fil AP devient parallèle au côté AB ou AC de l'équerre ; & ainsi du reste.

II°. Un corps pesant quelconque, attaché au bout d'une ficelle, sert à faire découvrir si une ligne ou une surface est perpendiculaire à l'horison : parce que cette ficelle, sollicitée par la pesanteur du corps, prend une direction vers le centre de la terre ; & que telle est la direction perpendiculaire à l'horison (*Phy.* 247). Donc si la ligne ou la surface sont perpendiculaires à l'horison, leur direction doit quadrer avec celle de la ficelle.

NIVEAU VRAI ET APPARENT.

533. DÉFINITION. La *ligne de niveau* est une ligne dont tous les points sont sensiblement à égale distance du centre de la terre ; ou qui seroit par-tout parallèle à une mer tranquille, répandue autour de toute la terre. Or comme la figure de la terre approche beaucoup de la figure sphérique (*Phy.* 1364), il s'ensuit que la *ligne de niveau* est une ligne à peu près circulaire. Ainsi, *niveller un terrain*, c'est chercher sur ce terrain, une ligne dont tous les points soient sensiblement à égale distance du centre de la terre ; ou une ligne parallèle à la surface d'un lac immense & tranquille, répandu sur ce terrain. (*fig.* 76.)

I°. Soit ACDEA une circonférence de la terre. Si l'on plante à-plomb en A sur la surface de la terre un piquet AS, à l'extrémité duquel on ait mis une lunette ou une règle à pinnule mn, qui soit perpendiculaire

au

au piquet ; & que l'on vise à travers la lunette ou par les pinnules , un objet éloigné R ; le *niveau apparent* fera SR , & le *niveau vrai* fera NSH. Et si l'œil est placé en A , le *niveau apparent* fera AH ; le *niveau vrai* sera AB.

La ligne SR ou AH fera le *niveau apparent* : parce qu'elle nous paroît horizontale. Elle ne sera pas le *niveau vrai* : parce que le point H est réellement plus éloigné du centre de la terre que le point A , de toute la longueur BH. Si la ligne HA est supposée être un canal ; un fluide couleroit ou descendroit par ce canal , de H en A : parce que tous les fluides tendent à s'approcher du centre de la terre ; & que le fluide qui a communication de H en A , s'approchera du centre de la terre , en passant de H en A.

II°. Il résulte de-là , que *le rayon visuel ou le niveau apparent AH , est une tangente au niveau vrai AB*. Or comme la tangente s'écarte toujours de plus en plus de la circonférence qu'elle touche ; il s'enfuit que plus la ligne du *niveau apparent* SR ou AH devient longue ; plus elle s'écarte du *niveau vrai* SH ou AB , en s'élevant de plus en plus au-dessus du *niveau vrai*.

III°. Comme la circonférence de la terre est extrêmement grande , une ligne de 100 ou 110 toises , prise sur cette circonférence , se confond sensiblement avec une ligne droite ; & dans ce cas , le *niveau vrai* n'est pas sensiblement distingué du *niveau apparent* : on peut donc prendre sans erreur notable , l'un pour l'autre. Mais quand la distance SR ou AH est beaucoup plus considérable ; alors le *niveau apparent* AH , a un haussement sur le *vrai niveau* AB ; & pour avoir le *vrai niveau* , il faut retrancher du *niveau apparent* , cet excès ou ce haussement ,

§ 34. REMARQUE. Voici une table des différences de hauteur , qui se trouvent entre le *niveau apparent* AH , & le *niveau vrai* AB : le premier est toujours

plus élevé ou plus éloigné du centre de la terre, que le dernier. (*fig. 76.*)

I°. Quand la distance de deux points à niveller, n'est que d'environ une centaine de toises, la différence de hauteur entre le niveau vrai & le niveau apparent, est comme infiniment petite; & on prend l'une pour l'autre, sans aucune erreur sensible.

II°. Quand la distance de deux points à niveller A & H, est de 4000 toises; le niveau apparent est élevé de 14 pieds 8 pouces, au-dessus du vrai niveau; & on ne peut plus prendre l'un pour l'autre.

III°. L'excès du niveau apparent AH sur le niveau vrai AB, est égal à l'excès de la sécante CH, sur le rayon TB ou TA; & cet excès BH ou Bx, quand l'angle ATH est fort petit, est à très-peu près égal au sinus versé Av de cet angle (622), ou à l'excès du rayon AT sur le sinus BM de l'angle de complément MTB. Ainsi il est toujours facile de trouver par le moyen des tables des sinus, cet excès de niveau apparent AH, sur le niveau vrai AB: soit en prenant l'excès de la sécante sur le rayon; soit en prenant l'excès du sinus total AT, sur le co-sinus MB = Tv.

IV°. C'est d'après cette théorie & d'après cette méthode géométrique, qu'a été construite la table suivante: elle n'a pour objet que les petites distances, les seules dont on ait communément besoin dans le nivellement. (*fig. 77.*)

Selon cette table, donnée par MM. Picard & de la Hire; si la ligne RVST étoit de 500 toises; le point T, qui termine le niveau apparent, seroit 2 pouces & 9 lignes au-dessus du vrai niveau π : pour avoir le vrai niveau au-dessus du point B, il faudroit donc retrancher ces 2 pouces & 9 lignes, de la hauteur T. Si la ligne RVST étoit de mille toises de longueur; il faudroit retrancher au niveau trouvé en T, 11 pouces: le reste de la hauteur BT, seroit le vrai niveau ou le niveau π que l'on cherche.

V°. On a trouvé par le calcul, & on verra dans la table suivante, que l'excès du niveau apparent sur le niveau vrai, augmente comme les quarrés des distances : par exemple (fig. 76), quand l'arc AB est de 1000 toises, l'excès est de 11 pouces : quand l'arc AB est de 2000 toises, l'excès est de 44 pouces ; & ainsi du reste. On pourra donc toujours, sans le secours des tangentes & des co-sinus, trouver cet excès du niveau apparent sur le niveau vrai, pour une distance quelconque donnée, par cette proportion : le quarré de 2000 toises, est à 44 pouces ; comme le quarré de la distance donnée ou trouvée 2786 toises, par exemple, est à x qui exprimera l'excès du niveau apparent sur le niveau vrai, à une distance de 2786 toises ; & ainsi du reste.

Table des haussemens du niveau apparent.

Distan- ces.	Haussemens.		Distan- ces.	Haussemens.		
	Toises.	Pouces. Lignes.		Toises.	Pieds. Pouc. Lignes.	
50	...	0 $\frac{1}{3}$	750	6	6	3
100	...	0 1 $\frac{1}{3}$	800	0	7	1
150	...	0 3	850	0	7	11 $\frac{1}{2}$
200	...	0 5 $\frac{1}{3}$	900	0	8	11
250	...	0 8 $\frac{1}{3}$	950	0	10	9
300	...	1 0	1000	0	11	0
350	...	1 4 $\frac{1}{3}$	1150	1	3	2 $\frac{1}{2}$
400	...	1 9 $\frac{1}{3}$	1500	2	0	9
450	...	2 3	1750	1	9	8 $\frac{1}{2}$
500	...	2 9	2000	3	8	0
550	...	3 6	2500	5	8	9
600	...	4 0	3000	8	3	0
650	...	4 8	3500	11	2	9
700	...	5 4	4000	14	8	0

LE NIVEAU D'EAU.

§ 35. DESCRIPTION. L'instrument dont on se sert le plus communément, pour trouver le niveau, est une machine fort simple qu'on nomme le *niveau d'eau* : parce qu'une surface d'eau fait trouver le niveau que l'on cherche. (*fig. 77 & 78.*)

Le niveau d'eau est composé d'un assez large tuyau de fer-blanc RMS, recourbé perpendiculairement à ses extrémités, à chacune desquelles on mastique un autre tuyau de verre Rm & Rn, à travers lequel on puisse voir la surface & le niveau de l'eau de part & d'autre. Au milieu M est un autre tuyau de fer-blanc, qui lui est perpendiculaire, & dans lequel s'enchâsse un piquet cylindrique MV, que l'on plante à-plomb sur le terrain, ou qui est soutenu par trois pieds obliquement écartés.

Quand on veut se servir de cet instrument, on le remplit d'eau jusqu'en RS dans le tube de verre ; & alors la surface de l'eau, qui paroît à travers le verre, se met de niveau en R & en S : parce que comme nous l'apprend l'expérience, les liquides qui communiquent entre eux & qui exercent en liberté leurs actions réciproques, se mettent de niveau, ou à égale distance du centre de la terre (*Phy. 625.*). Ainsi, si l'on vise de R en S, le long des deux surfaces de l'eau ; le rayon visuel RS aura les deux points R & S de niveau ; & si l'on prolonge indéfiniment le rayon visuel ou la ligne droite RS jusqu'en T, la ligne RST sera une ligne de niveau apparent.

Tel est le niveau que Riccioli préféroit à tous les autres, & dont on se sert communément, quand la distance à niveller n'est pas bien considérable. Pour le rendre plus commode, il faut placer aux deux extrémités R & S du tuyau recourbé, deux pinnules

mobiles , qu'une vis puisse porter de part & d'autre à la hauteur précise de la petite surface d'eau R & S. Ces deux pinnules rendront la direction du rayon visuel plus fixe & plus décidée ; & comme alors on pourra se dispenser de viser à travers le tube de verre , la vision , qu'on pourra aider d'une lorgnette , deviendra très-nette à une assez grande distance.

Il faut que le tube de fer-blanc ait une longueur assez considérable , & assez de largeur pour que l'eau puisse s'y mouvoir de toute part en grande liberté. Il n'est pas nécessaire que le piquet MA ait une direction bien perpendiculaire à l'horison , ni que le tube transversal ait une direction bien horizontale : parce que l'eau se mettra par elle-même exactement de niveau en R & en S ; & que les deux pinnules mobiles , élevées ou abaissées convenablement de part & d'autre , donneront exactement ce niveau.

Les autres niveaux , dont on se sert pour niveller les plus grandes distances , ne diffèrent guere de celui-ci , qu'en ce qu'ils sont assortis à des lunettes d'approche , qui représentent plus distinctement les objets.

Nous avons parlé ailleurs d'un niveau plus simple ; & qui peut donner assez souvent toute la précision dont on a besoin en une foule d'occasions. (420.)

P R O B L È M E.

536. Deux points A & B étant donnés sur le terrain ; trouver si ces deux points sont de niveau , ou de combien l'un est plus éloigné que l'autre , du centre de la terre. (fig. 77.)

SOLUTION. Les deux points A & B peuvent être ou peu éloignés ou fort éloignés : s'ils sont fort éloignés , on peut ou chercher tout d'un coup leur niveau , ou chercher une suite de points de niveau , d'un point à l'autre.

1°. Supposons que la distance AB sur le terrain, ne soit que d'environ 100 ou 110 toises en lignes droites. Dans ce cas, où le niveau apparent se confond sensiblement avec le niveau vrai, je mets le niveau d'eau en A, & j'envoie en B, un homme destiné à concourir avec moi dans mon opération. Je donne à mon aide une grande perche ou toise BP, qu'il doit mettre à plomb en B; & un grand carton sur lequel est tracé horizontalement une grande ligne ou raie noire T. Je le prévient qu'il faudra, étant arrivé au terme, faire glisser le carton le long de la toise; en sorte que la ligne noire T du carton soit toujours perpendiculaire sur la toise BP. Je vise par les surfaces R, S, de l'eau; & lorsque je m'aperçois que la ligne noire du carton passe par l'extrémité T du rayon visuel RST; je fais signe à mon aide de s'arrêter: afin qu'il mesure la hauteur TB; & je mesure la hauteur VA du rayon visuel RVST.

Je fais signe à mon aide de revenir; & si la hauteur TB qu'il a trouvée, est égale à la mienne AV; les deux points A & B sont de niveau. Car les points V, T, étant également éloignés du centre de la terre; si de ces distances égales je retranche les parties égales VA, TB, les points A, B, seront aussi également éloignés du même centre de la terre. Que si la hauteur TB est moindre que la hauteur VA; je retranche la hauteur TB de la hauteur VA; & le reste HA fait voir que le point A est plus proche du centre de la terre que le point B, de toute la quantité HA. Il est aisé de voir ce qu'il faudroit faire, si la hauteur TB étoit plus grande que la hauteur VA.

II°. Si la distance VT est trop grande pour être nivelée d'un seul coup; il faudra prendre sur cette distance, différens points A & N, N & O, O & B, éloignés l'un de l'autre d'environ 100 toises, & les niveller séparément par la méthode que l'on vient de donner; ou bien si l'on ne veut donner qu'un seul

coup de niveau, il faudra retrancher du niveau apparent, ce qu'il a d'excès sur le niveau vrai; par la table précédente.

III^o. On peut aussi niveller les deux points A & B, quelle que soit leur distance, en portant le niveau d'abord en A, d'où l'on visera sur la toise BP; & ensuite en B, d'où l'on visera sur une toise plantée perpendiculairement en AV. Dans ce cas on ne fait point attention au haussement de niveau apparent: parce que ce haussement est le même pour l'une & pour l'autre station. Par exemple, si en nivellant de V en T, je donne 4 pouces de trop en hauteur au point T; en nivellant ensuite de T en V, je donnerai également 4 pouces de trop en hauteur au point V; & l'égalité sera rétablie: puisque j'ajoute une même grandeur nT , à deux grandeurs égales. (fig. 77.)

537. REMARQUE. Si l'on cherche le niveau du point B, pour conduire les eaux par un canal ou par un aqueduc, de B en H; il faudra, pour que l'écoulement ait lieu, que la ligne ou le canal BH s'abaisse successivement au-dessous du vrai niveau, depuis le point B jusqu'au point H. Selon Wolfe, cette pente doit être au moins $\frac{1}{400}$ & au plus $\frac{1}{4000}$ de la longueur ou de la distance BH: c'est-à-dire, que si le canal BH a 400 toises de longueur, l'extrémité H du canal doit aboutir au moins à une toise & au plus à deux toises au-dessous du point H qui est de niveau avec la source en B. Les grands canaux, tels que les lits des fleuves & des rivières, ont besoin de beaucoup moins de pente, pour avoir leur écoulement (Phy. 627). Mais les petits canaux exigent plus de pente que les grands; & ils en exigent d'autant plus, qu'ils sont plus petits.

DES SURFACES PRISES SUR LA TERRE.

538. OBSERVATION. Dans la planimétrie, nous avons donné & résolu un problème qui apprend à

mesurer la surface d'une province ou d'un royaume (453). Dans la solution de ce problème, nous avons considéré les différentes montagnes ou hauteurs que nous avons supposé servir de stations, comme étant toutes de niveau, ou à égale distance du centre de la terre. Mais comme il arrive très-rarement que les sommets des diverses montagnes soient de niveau; la surface que l'on trouveroit en les prenant pour stations, seroit non une surface unie, mais une surface irrégulièrement inclinée, & assez ressemblante aux différentes surfaces des toits qui couvrent différentes maisons, laquelle surface des toits est bien plus grande que les sols ou les bases des maisons auxquelles elle correspond. (*fig. 64.*)

Il faut donc, pour trouver exactement cette surface, prendre sur ces différentes montagnes des points de niveau, selon la méthode que nous venons de donner en traitant du nivellement. Par exemple, ayant à mesurer sur le terrain un triangle DEI , supposons que les points ou stations D, E , aient été trouvés de niveau; & que la montagne I soit beaucoup plus élevée que ces deux points ou stations.

Dans ce cas, je prendrai pour station sur cette montagne, non le sommet I , mais deux points m, n , plus bas & de niveau avec les deux points D, E . Cela étant fait, je mesurerai, non le triangle DIE , mais le triangle DmE , plus le triangle mDn , dont je connoîtrai les deux côtés Dm, Dn , & l'angle compris entre ces deux côtés. Je mesurerai ensuite DnK , & ainsi du reste, en prenant toujours des points de niveau: & par-là j'aurai la surface exacte de la province ou du royaume, que j'avois à mesurer.

539. OBJECTION. On peut objecter contre cette méthode; en premier lieu, que la surface qu'on trouvera, sera plus grande que la vraie surface: puisqu'elle sera égale à la surface qu'auroit la partie correspondante de la terre, si la surface de la terre étoit par-

tout élevée jusqu'à la hauteur des points qui ont servi de station. En second lieu, que la surface qu'on trouvera ne sera point convexe & ressemblante à la surface de la terre : puisqu'elle sera un composé de triangles à surface plane & fort irrégulière.

RÉPONSE I. Je réponds à la première objection : 1°. que la différence entre la surface trouvée & la vraie surface, ne sauroit être considérable : à raison du peu d'élévation qu'ont au-dessus de la vraie surface, les stations que l'on choisit. 2°. Qu'il est facile, si l'on veut avoir une exactitude scrupuleuse, de réduire à sa juste valeur la surface trouvée & excédente. Car les surfaces des sphères étant entre elles, comme les quarrés de leurs diamètres ou de leurs rayons respectifs (584) ; les portions semblables de ces surfaces, sont aussi entre elles comme les quarrés de ces rayons ; puisque les parties semblables sont toujours entre elles comme leurs tous.

On aura donc cette proportion : la vraie surface, est à la surface trouvée ; comme le quarré du rayon terrestre, est au quarré du même rayon prolongé jusqu'aux points qui ont servi de station. Ainsi, si les stations sont élevées de deux cents toises au-dessus de la surface de la terre, comparez le quarré du rayon de la terre, avec le quarré du même rayon augmenté de deux cents toises ; & retranchez de la surface trouvée, une quantité proportionnelle à l'excès qu'aura le quarré du rayon augmenté, sur le quarré du rayon simple : le reste exprimera la vraie surface.

RÉPONSE II. Je réponds à la seconde objection ; qu'en supposant la terre sphérique, une très-petite partie de cette surface, prise séparément, ne diffère que comme infiniment peu de la surface plane : puisque dans une étendue de 300 toises, la courbure n'est que d'environ un pouce, comme on peut le voir dans la table des haussemens du niveau (534). Cette sur-

face sphérique peut donc dans la pratique, être confondue sans erreur sensible, avec une surface plane. Donc une foule de petites surfaces planes, telles que sont les triangles en question, peuvent sensiblement & sans erreur notable, mesurer la surface sphérique de la terre.

INÉGALITÉS DES MONTAGNES.

140. REMARQUE. Quand on cherche la surface triangulaire comprise entre trois pointes de montagnes; la surface que l'on trouve est une surface plane, ou une surface égale & semblable à celle d'un plan triangulaire qui atteindroit aux trois points donnés de ces montagnes; & qui couvrirait des enfoncemens, des élévations, des inégalités de toute espèce, sur la surface même de la terre. Cette surface plane est la vraie surface comprise entre ces trois points. Car on considère la surface de la terre, relativement aux corps perpendiculaires à l'horizon qu'elle peut contenir. Or il est évident que la courbure & l'élévation des montagnes, n'augmentent pas cette surface; & que sur la surface convexe d'une montagne en cône ou en pain de sucre, on ne placeroit pas perpendiculairement à l'horizon, plus d'arbres d'un pied de diamètre, que sur sa base: puisque chaque arbre aura toujours, sur la base horizontale de la montagne, un espace correspondant à sa propre base. (fig. 118.)

Pour rendre ceci plus sensible, concevez un cône droit BAC, inscrit dans un cylindre TBCV de même base & de même hauteur que le cône. Il est clair que vous ne placeriez pas sur la surface convexe du cône, plus de solides rn , sm , vn , perpendiculaires à la base AB, que vous en placeriez sur la base même: puisque la somme de tous ces solides, appuyés par leurs bases nm , mn , oAm , sur la surface convexe du cône, sera

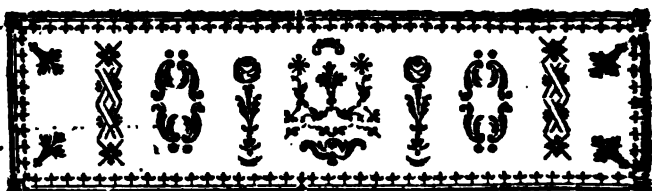
renfermée dans la capacité du cylindre, laquelle est mesurée par la base BCB du cône.

Ou bien (*fig. 89*), concevez que le solide $RABS$; soit une grande salle de spectacle, dont la base oblique AM soit le parterre. Il est évident que la base horizontale AB contiendra tout autant de rangs de chaises ou de personnes droites, qu'en contiendra la base inclinée ou le parterre AM , oblique à l'horison & élevé en amphithéâtre : puisque la base *am* de chaque chaise ou de chaque personne, occupe sur la base inclinée, précisément la même quantité d'espace perpendiculaire qu'elle occuperait en *ab* sur la base AB parallèle à l'horison.

On voit par-là, comment & en quel sens il est vrai & démontré, que les enfoncemens & les élévations des montagnes & des vallées terrestres, en donnant réellement une plus grande étendue de surface inclinée & irrégulière à la terre, ne la rendent pas capable de contenir plus de maisons ou d'arbres ou de plantes perpendiculaires à l'horison; que si elle étoit par-tout, comme la surface d'un glace ou d'une mer tranquille, parfaitement unie & sans aucune inégalité dans sa surface.

541. CONCLUSION. Après avoir considéré les surfaces planes, dans leur égalité, dans leurs rapports, dans leurs sections & dans leurs positions respectives; il nous reste à considérer & les surfaces planes & les surfaces courbes dans les solides; & ce sera l'objet de la première partie du Traité suivant.





PRINCIPES
DU CALCUL
ET DE LA GÉOMÉTRIE,
O U
ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES.
GÉOMÉTRIE.

TROISIÈME TRAITÉ.

LES SOLIDES, OU LA STÉRÉOMÉTRIE.

542. DÉFINITION. *LA Stéréométrie (302) est la science de l'étendue considérée selon ses trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur. La surface des corps, la solidité des corps, tel est l'objet de ce Traité.*

ARTICLE PREMIER.

SURFACE DES CORPS.

543. DÉFINITION. *ON nomme un solide en Géométrie, un corps quelconque, dur ou liquide ou*

fluide, qui renferme trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur. Un pied cube d'eau ou d'air est un solide, aussi bien qu'un pied cube de marbre.

544. DÉFINITION II. On nomme *surface des corps* ou des solides, la somme de toutes les lignes droites ou courbes, qui terminent extérieurement leurs trois dimensions.

545. DÉFINITION III. Comme un point, en se mouvant, décrit une ligne; comme une ligne, en se mouvant, décrit une surface; de même *une surface, en se mouvant, décrit un solide*. La surface qui par son mouvement, produit ou produiroit tel solide, se nomme *plan générateur* de ce solide.

La formation des différens solides, le développement de leurs surfaces, le rapport de ces surfaces, tel est l'objet de ce premier article.

PARAGRAPHE PREMIER

FORMATION DES SOLIDES.

PARMI les solides de différente figure, nous considérerons principalement ceux auxquels peuvent se rapporter tous les autres, savoir les prismes, les cylindres, les pyramides, les cônes, les sphères, les sphéroïdes.

On nomme *polyedres réguliers*, des solides terminés par des angles solides tous égaux & par des surfaces planes toutes égales. On en compte cinq : le *tétraèdre*, compris sous quatre triangles égaux & équilatéraux; l'*octoèdre*, compris sous huit triangles égaux & équilatéraux; l'*icosaèdre*, compris sous vingt triangles égaux & équilatéraux; l'*exaèdre* ou le cube, compris sous six quarrés égaux; le *dodécaèdre*, compris sous douze pentagones réguliers & égaux. La théorie des poly-

dres & de leur assortiment en solides réguliers, théorie qui occupa si fort les anciens Géomètres, a cessé d'intéresser les modernes, qui n'en ont vu sortir aucune utile lumière. Polyèdre : de πολλός, *multus* ; & de ἵσα, *sedes*, *siège* ; *angulus solidus*, *instar sedis*.

LE PRISME.

546. DÉFINITION I. Un *prisme* est un solide, qui dans toute sa longueur, a une égale grosseur ; qui est entouré de plus ou moins de faces planes, qui sont des parallélogrammes ; & qui est compris entre deux bases, l'une supérieure & l'autre inférieure, lesquelles sont des figures semblables, parallèles, & égales.

Le prisme prend différens noms, suivant le nombre des côtés de sa base ; & s'appelle triangulaire, quadrangulaire, pentagonal, exagonal, décagonal, dodécagonal, selon que sa base est ou un triangle ou un quadrilatère ou un pentagone ou un exagone ou un dodécagone ; & ainsi du reste.

I°. On nomme *cube*, un prisme d'une grandeur quelconque, compris sous six faces, dont tous les côtés sont égaux, & dont tous les angles sont droits. Tel est un dé à jouer. (fig. 4 & 74.)

II°. On nomme *parallélopipède*, un prisme d'une grandeur quelconque, compris sous six parallélogrammes, dont les opposés sont égaux. Lorsque tous les angles des parallélogrammes sont droits, il est appelé *parallélopipède rectangle* : telle est une solive équarrée. Lorsque les angles opposés ne sont pas droits, il est appelé *parallélopipède oblique*. Tel est le prisme GDAF, si l'angle CAE ou ACF est aigu ou obtus. (fig. 79.)

III°. On nomme *prisme triangulaire*, un prisme dont la base est un triangle ; *prisme pentagonal*, un prisme dont la base est un pentagone régulier ou irrégulier ; & ainsi du reste. Par exemple, si la base

ACB est un plan triangulaire, le prisme AEFD-CAB est un prisme triangulaire. (fig. 87.)

547. DÉFINITION II. On nomme *axe d'un prisme*, une ligne droite, tirée du centre de la base supérieure au centre de la base inférieure. On nomme *hauteur d'un prisme*, une ligne droite, tirée d'un des angles du prisme perpendiculairement sur la base prolongée, s'il le faut. La ligne *ax* est l'axe; la ligne DG ou AE est la hauteur. (fig. 79.)

Un *prisme est droit*, lorsque son axe est perpendiculaire aux bases : un *prisme est oblique*, lorsque son axe est incliné sur les bases.

548. DÉFINITION III. Le *plan générateur d'un prisme*, est sa base que l'on conçoit monter ou descendre parallèlement à elle-même, le long de son axe. (fig. 79.)

Si la base supérieure ABDC, par exemple, descend parallèlement à elle-même le long de l'axe *ax* en EHGF, laissant par-tout sur son passage des traces ou des couches d'elle-même; elle formera le parallélogramme ou le prisme FB.

Si la base triangulaire ACB monte parallèlement à elle-même en EDF, elle formera de même le prisme triangulaire AEDCBF. (fig. 87.)

LE CYLINDRE.

549. DÉFINITION. Si le plan générateur est un polygone régulier d'une infinité de côtés, ou un cercle; alors le prisme qui sera formé par le mouvement du plan générateur le long de son axe parallèlement à lui-même, sera un cylindre ABDC. (fig. 80.)

Un cylindre peut donc être regardé comme un prisme entouré d'une infinité de faces, qui sont des parallélogrammes d'une largeur infiniment petite.

L'axe & la hauteur dans le cylindre, sont la même chose que dans le prisme. Ainsi SX est l'axe : CA ou DB est la hauteur, si le cylindre est droit.

Ce cylindre est droit ; parce que son axe est perpendiculaire à sa base : ce cylindre seroit oblique , si son axe étoit incliné sur sa base. Dans le cylindre oblique ou incliné , la hauteur est une perpendiculaire menée d'un point de la base supérieure sur la base inférieure.

LA PYRAMIDE.

550. DÉFINITION. La pyramide est un solide terminé d'une part par une base d'un nombre fini de côtés & de l'autre par un point , & environné de faces qui sont des triangles , dont les sommets se réunissent tous en un même point que l'on appelle *sommet* de la pyramide. AEBF est une pyramide. (fig. 82.)

I°. La pyramide , ainsi que le prisme prend différens noms , selon le nombre des côtés qui terminent sa base. Elle s'appelle *triangulaire* , *quadrangulaire* , *pentagonale* , *dodécagonale* , selon que la base est ou un triangle , ou un quadrilatère , ou un pentagone , ou un dodécagone ; & ainsi du reste.

II°. On appelle *hauteur de la pyramide* , une perpendiculaire menée du sommet de la pyramide sur la base prolongée , s'il le faut ; *axe de la pyramide* , une ligne tirée du sommet de la pyramide au milieu ou au centre de la base ; *apothème de la pyramide* , une ligne tirée du sommet de la pyramide perpendiculairement sur un des côtés de la base prolongée , s'il le faut. Ainsi la ligne AN , perpendiculaire à la base EBFE , est la hauteur de cette pyramide : la ligne AN , oblique ou perpendiculaire sur la même base , mais aboutissant du sommet A au centre de la base , est l'axe de cette pyramide : la ligne An , perpendiculaire au côté EF , est l'apothème de ce côté de la pyramide.

III°. La pyramide est droite ou oblique. La *pyramide est droite* , quand son axe , qui aboutit toujours au centre de la base , est perpendiculaire sur cette base :

la

la *pyramide est oblique*, quand son axe est incliné sur la base. Les faces de la pyramide sont toujours des triangles, égaux ou inégaux, semblables ou dissimilaires. (fig. 82, 88, 89.)

LE CÔNE DROIT ET OBLIQUE.

§ 51. DÉFINITION I. Le *cône droit* est un solide dont le sommet A est un point, dont la base BCB est un cercle, & dont les côtés sont une infinité de triangles isocèles & égaux. (fig. 83.)

1°. Le *plan générateur du cône droit* est le triangle rectangle ASBA. Si ce triangle rectangle fait une révolution sur l'un des côtés qui forment l'angle droit, par exemple, sur AS; le côté AB décrira le cône droit BAC. De même si ce triangle rectangle fait une révolution sur le côté BS, le côté AB décrira un autre cône droit dont le sommet sera en B.

II°. Le cône, ainsi que la pyramide, a sa hauteur; son axe, son apothème. La *hauteur du cône*, droit ou oblique, est une perpendiculaire menée du sommet sur la base, prolongée s'il le faut: l'*axe du cône* est une ligne droite menée du sommet au centre de la base, qui est toujours un cercle: l'*apothème du cône* est une ligne droite AB ou AC, menée du sommet du cône sur un point de la circonférence de la base. Dans le cône droit, tous les apothèmes sont égaux: dans le cône oblique, les apothèmes vont en croissant ou en décroissant dans toute une demi-circonférence de la base. (fig. 83.)

§ 52. DÉFINITION II. Le *cône oblique* est un solide dont la base est un cercle; dont le sommet est un point; & dont les côtés sont une infinité de triangles dont les bases sont toutes égales, mais dont les hauteurs ne sont pas toutes égales. Si la base BCB restant la même, le cône BAC venoit à s'infléchir d'un côté ou d'un autre, en telle sorte que son axe AS devînt

plus ou moins oblique indéfiniment sur la base, ce cône droit deviendrait un cône oblique. Le cône SR est oblique. (*fig. 120.*)

LE CÔNE TRONQUÉ.

353. DÉFINITION. Si on fait passer par un cône droit ou oblique, un plan parallèle à la base; la partie interceptée entre le plan & la base fera un *cône tronqué*. Ainsi *bc CB* est un cône tronqué. (*fig. 83.*)

Dans le triangle rectangle *ABC*, qui fait la dernière partie de cette figure 83; si la partie *bc CB* ou *mn CB*, fait une révolution sur la ligne *AB*; on aura un cône droit tronqué, dont la base aura *BC* pour rayon ou pour demi-diamètre.

LA SPHERE.

554. DÉFINITION. Si un demi-cercle d'une grandeur quelconque *ADB*, immobile aux points *A* & *B*, est supposé faire une révolution sur la ligne ou sur le diamètre *AB*; ce demi-cercle décrira un solide parfaitement rond *ADBFA*, qu'on nomme *sphere*. (*fig. 84.*)

I°. Il est évident que la courbure de la surface d'une sphere, est par-tout égale & uniforme: puisque tous les points de cette surface sont éloignés du centre *C*, de la longueur du rayon du demi-cercle générateur.

II°. Le centre *C* du plan générateur, est le centre de la sphere: il est également éloigné de tous les points de la surface de la sphere. Toute ligne droite *CF*, *CA*, *Cb*, *Ch*, *Ca*, menée du centre à un point quelconque de la surface, est un rayon de la sphere. Toute ligne droite *AB*, *DF*, *hh*, qui passant par le centre de la sphere aboutit à deux points de la surface, est un diamètre de la sphere.

III°. La ligne *AB*, autour de laquelle se fait ou est

conque se faire la révolution, s'appelle l'*axe de la sphere*. Les points A & B, qui terminent de part & d'autre l'axe de la sphere, se nomment les *poles de la sphere*. On peut prendre pour axe de la sphere, un diamètre quelconque sur lequel la sphere est supposée ou conque tourner; & alors les extrémités de ce diamètre quelconque *hh*, seront les poles de la sphere.

III°. On appelle *grands cercles de la sphere*, ceux dont le plan passe par le centre de la sphere; & *petits cercles de la sphere*, ceux dont le plan passe hors du centre de la sphere. Ainsi DCFD est un grand cercle, aussi bien que ADBFA, aussi bien que *bCb*: mais *dxd*, *ava*, *chc*, sont des petits cercles.

De cette définition ou de cette formation de la sphere, découlent les corollaires suivans, qui portent en eux-mêmes leur évidence, & qu'il suffira de faire remarquer.

555. COROLLAIRE 1. *Deux grands cercles de la sphere se coupent nécessairement; & leur commune section est une ligne droite, qui passe par le centre, & qui par conséquent est un diamètre de l'un & de l'autre cercle. (fig. 84.)*

EXPLICATION. Puisque les grands cercles sont ceux qui passent par le centre, étant formés par la révolution des plus grandes cordes; il est clair que deux grands cercles DFD, *hhb*, doivent nécessairement s'entre-couper. Car passant l'un & l'autre par le centre, s'ils ne s'entre-coupoient pas dans ce point commun, il faudroit ou que toute la surface de l'un fût confondue avec toute la surface de l'autre; & alors ils ne formeroient pas deux cercles, mais un seul cercle: ou que toute la surface de l'un fût hors de toute la surface de l'autre; & alors celui dont la surface seroit hors du centre, ne seroit plus un grand cercle, mais un petit cercle. Donc deux grands cercles d'une sphere

s'entre-coupent nécessairement, & interceptent ou forment entre eux un angle plus ou moins grand.

II°. Comme les plans de deux cercles sont sans profondeur, leur commune section est une ligne : par exemple, la commune section des deux plans circulaires DFD & ADBFA est la ligne DCF, laquelle est nécessairement un diamètre ; puisqu'elle passe par le centre de la sphere, où s'entre-coupent les deux grands cercles.

556. COROLLAIRE II. *Tous les points de la demi-circonférence qu'on fait tourner autour d'un diamètre, décrivent des circonférences parallèles entre elles.*

EXPLICATION. Si la demi-circonférence ADB, composée d'une infinité de points, fait une révolution autour de l'axe AB ; il est clair que le point D de cette demi-circonférence, décrira une circonférence DFD ; que le point *d* de la même demi-circonférence, décrira une autre circonférence *dx d* ; que le point *b* de la même demi-circonférence, décrira une autre circonférence *br b* ; que ces circonférences quelconques DFD & *dx d* sont parallèles entre elles : puisqu'elles sont par-tout éloignées l'une de l'autre, de la grandeur de l'arc D *d* qui fait sa révolution avec les points D & *d*.

I°. Tous les points de chaque circonférence quelconque *dx d*, sont également éloignés d'un des poles B de la sphere : puisqu'ils en sont tous éloignés de la grandeur de l'arc *d B*. Ils sont aussi tous également éloignés de l'autre pole A : puisqu'ils en sont tous éloignés de la grandeur de l'arc *d A*. C'est pourquoi les poles A & B peuvent être appelés les poles de toutes ces circonférences parallèles ; & le diamètre AB est leur axe commun, puisqu'il passe par tous leurs centres.

II°. Tous les cercles parallèles d'une même sphere ayant les mêmes poles & le même axe AB ; il est clair

que cet axe mesure la distance d'un cercle à l'autre : puisque cet axe est une perpendiculaire entre deux surfaces parallèles. Ainsi la partie CN de l'axe , mesure la distance des deux cercles DFD & dxd : la partie NB , mesure la distance du cercle dxd au pôle B : la partie NA , mesure la distance du même cercle au pôle A ; & ainsi du reste.

557. COROLLAIRE III. Il résulte évidemment de cette théorie de la formation de la sphere :

I°. Que le plus grand de tous les cercles parallèles , est celui qui passe par le centre , & qui est également éloigné des deux poles. Ainsi tout cercle qui passe par le centre d'une sphere est un grand cercle ; & il divise la sphere en deux parties égales. Tout cercle qui ne passe point par le centre de la sphere , est un petit cercle , & il divise la sphere en deux parties inégales.

II°. Que les cercles parallèles , également éloignés du centre de la sphere l'un vers le pôle A & l'autre vers le pôle B , sont égaux en diamètre & en surface. Ainsi dans la sphere céleste & terrestre , les deux tropiques sont égaux entre eux , aussi bien que les deux cercles polaires ; si la terre & le ciel sont de vraies spheres.

III°. Que les cercles parallèles chc & dxd , qui sont entre le centre de la sphere & un même pôle , sont d'autant plus petits , qu'ils sont plus loin du centre & plus près du pôle. Le plus petit de tous les cercles se confond avec le pôle même , ou avec un point. (438.)

LE SPHÉROÏDE.

558. DÉFINITION. Si la moitié MAXM d'un polygone , régulier ou irrégulier , d'un nombre fini de côtés , est supposée faire une révolution sur son axe , AX ; elle décrira un solide AMXNA , qu'on nomme un sphéroïde ; parce qu'il a plus ou moins de ressemblance avec la sphere. (fig. 81.)

I°. Si le plan générateur AXM est une moitié de polygone régulier ; le solide formé par la révolution de ce plan sera un sphéroïde régulier.

II°. Si le plan générateur est une moitié de polygone irrégulier ; le solide formé par la révolution de ce plan , sera un sphéroïde irrégulier.

III°. Si l'axe AX , autour duquel se fait la révolution du plan générateur , est plus petit que le diamètre MN de l'équateur ; le sphéroïde, régulier ou irrégulier, sera applati vers ses poles & allongé vers son équateur. Sphéroïde ; de *σφαῖρα*, *sphere* ; & de *εἶδος*, *figure*, *ressemblance*.

PARAGRAPHE SECOND.

DÉVELOPPEMENT DES SURFACES.

§ 59. DÉFINITION. **L**e développement de la surface d'un corps, est une figure plane, égale à la surface du solide dont il est question.

En traitant du développement des prismes, des cylindres, des pyramides, des cônes, nous nous occuperons directement & principalement de ceux qui sont droits. Il sera aisé de trouver par les mêmes principes, le développement de ceux qui sont obliques.

DÉVELOPPEMENT DU PRISME.

§ 60. HYPOTHÈSE. Si une ligne CF , perpendiculaire à la base $EFGH$ d'un prisme droit, tourne autour de cette base en demeurant toujours perpendiculaire à la base & parallèle à elle-même ; cette ligne décrira la surface latérale du prisme droit FB ; c'est-à-dire, le contour du prisme, sans y comprendre les deux bases qu'on mesure à part. La révolution de cette ligne formera quatre rectangles M, N, O, P , égaux aux quatre

faces latérales du prisme BF, dont les côtés, qu'on nomme aussi *Arêtes*, sont AE, CF, DG, BH. (*fig. 79.*)

Où si vous voulez, concevez une bande de papier, collée tout autour du prisme, sans y comprendre les deux bases. Il est évident que si on ôtoit cette bande & qu'on la développât; il paroîtroit un rectangle, qui auroit la même hauteur que le prisme, & qui auroit pour base une ligne droite égale au périmètre de la base du prisme. Ce rectangle MNOP, nécessairement égal à la surface du prisme, en est le développement. D'abord $cdgf = CDGF$: ensuite $dbhg = DBHG$: ensuite $bach = BAEH$: enfin $acfe = ACFE$.

561. COROLLAIRE. *Le développement du prisme droit, est un rectangle, qui a pour base le périmètre de la base du prisme; & pour hauteur la hauteur du prisme.* Multipliez donc le périmètre de la base du prisme par la hauteur du prisme : le produit exprimera la surface latérale du prisme, sans y comprendre les deux bases qui sont deux plans qu'on mesure à part. (449.)

562. REMARQUE. 1°. Si le prisme droit que nous venons d'observer, au lieu d'être quadrangulaire, étoit triangulaire ou pentagonal ou dodécagonal; il est clair qu'au lieu de quatre faces que nous avons trouvées, nous aurions eu par la même théorie, ou trois ou cinq ou douze faces, égales à celles du prisme, chacune à chacune; & qu'on auroit la surface latérale du prisme, en multipliant de la même manière, le périmètre de la base par la hauteur. (*fig. 79, 120.*)

II°. Si le prisme que nous venons de considérer, au lieu d'être droit, étoit oblique, ayant son axe & ses côtés inclinés sur sa base; il est clair que pour avoir la surface de ce prisme oblique, qui sera ou triangulaire ou quadrangulaire ou pentagonal ou décagonal, & ainsi du reste, il faut mesurer séparément chaque face ou chaque parallélogramme; & qu'en prenant séparément le produit de la base de chaque parallélogramme

par sa hauteur particulière, on aura la surface de tout le prisme, les bases supérieure & inférieure exceptées.

Ou si l'on veut une méthode générale pour trouver tout d'un coup la *surface du prisme oblique*, la voici. Coupez le prisme par un plan perpendiculaire à l'axe : l'intersection de ce plan avec la surface du prisme, sera un polygone dont chaque côté sera perpendiculaire aux arêtes du prisme, & mesurera conséquemment la largeur de chaque face. Ainsi, en multipliant le contour de ce polygone par le côté incliné ou l'axe du prisme, on aura la surface latérale de ce prisme.

DÉVELOPPEMENT DE LA PYRAMIDE.

563. DÉFINITION. Le développement de la pyramide, droite ou inclinée, est la somme de tous les triangles qui en sont les faces. On fait toujours abstraction de la base, qu'on mesure à part, & qui n'entre pour rien dans la surface latérale. Nous nommerons ici *pyramides régulières*, celles dont l'axe n'est point incliné sur la base, & dont toutes les faces sont des triangles égaux & semblables.

1°. Si la pyramide est droite & régulière; elle a autant de triangles égaux & semblables, que la base a de côtés. En mesurant un de ces côtés EF de la base, & en le multipliant par le nombre des côtés ou des faces de la pyramide, on aura le périmètre EBF E de la base : en multipliant ce périmètre par la moitié de l'apothème Am , ou de la perpendiculaire menée du sommet sur un côté de la base, on aura la surface latérale de la pyramide. (fig. 81.)

Par exemple, si sur la surface de la pyramide droite & régulière AEBF, on suppose appliquée une feuille de papier; en développant ce papier, on aura les trois triangles H, I, K : ces trois triangles étant semblables & égaux, si on multiplie la base $e b f e = EBF E$, par la

moitié d'une perpendiculaire an égale à l'apothème de la pyramide; le produit exprimera la surface de ces trois triangles, & par conséquent la surface latérale de la pyramide, qui lui est égale. (449.)

Si la pyramide droite & régulière étoit décagonale; par exemple; au lieu de trois triangles, on en auroit dix, de même base & de même hauteur: en multipliant le périmètre de la base, égal à la somme des dix bases des triangles, par la moitié de l'apothème, on auroit également un produit qui exprimeroit la surface de la pyramide décagonale; & ainsi du reste.

II°. Si la pyramide est oblique, ou si sa base est un polygone irrégulier; il faut pour avoir sa surface latérale, mesurer séparément tous les triangles inégaux qui forment cette surface. Le produit de chaque base triangulaire par la moitié de son apothème particulier, donnera le produit de chaque face de la pyramide; & la somme de tous ses produits, sera la surface latérale de toute la pyramide.

DÉVELOPPEMENT DU CYLINDRE.

564. HYPOTHESE. Si une ligne CA ou DB , demeurant toujours perpendiculaire à la base ABA du cylindre droit, parcourt la circonférence de cette base; elle décrira la surface latérale du cylindre. (fig. 80.)

Le surface ou le développement du cylindre droit, est donc un rectangle EF , qui a pour base une ligne $a b$ égale à la circonférence ABA de la base du cylindre, & qui a la même hauteur que le cylindre. Multipliez donc la circonférence de la base du cylindre, par la hauteur AC du même cylindre: le produit exprimera la surface latérale ou convexe du cylindre droit $ABDC$, sans y comprendre les deux bases circulaires qu'on mesure à part.

565. COROLLAIRE. Si la hauteur du cylindre droit est égale au diamètre de la base ; la surface latérale du cylindre est quadruple de la base. (fig. 86.)

DÉMONSTRATION. Soit le cylindre droit ZOQY, dont l'axe PR soit égal au diamètre OQ de la base. La surface du cylindre est égale au produit de la circonférence de la base , par la hauteur ZO , qui dans ce cas est égale au diamètre de la base. La surface du cercle OQO, qui sert de base, est égale seulement au produit de la même circonférence de la base , par le quart du diamètre de la base , ou par la moitié du rayon (484). Donc la surface du cercle qui sert de base, est quatre fois plus petite que la surface convexe & latérale du cylindre ; puisqu'une même grandeur, multipliée par 1 & par $\frac{1}{4}$ donne deux produits qui sont entre eux comme 4 est à 1 (67). Donc la surface convexe ou latérale du cylindre droit, dont la hauteur est égale au diamètre de la base, est quatre fois plus grande que la surface de la base. C. Q. F. D.

566. REMARQUE. Quand un cylindre AB est incliné sur sa base toujours circulaire B (fig. 120) ; alors la surface latérale de ce cylindre oblique ne se trouve plus de la même manière. En employant ici la méthode générale de la remarque précédente (562), on aura dans le cylindre une section elliptique ; & on voit du premier coup d'œil , que la surface d'un cylindre oblique AB est égale au produit de la circonférence de l'ellipse dont le plan est perpendiculaire à l'axe , par le côté incliné ou l'axe oblique du cylindre. Ainsi cette mesure dépend de la rectification de l'ellipse , & par-là même d'une théorie étrangère & supérieure à ce traité : on peut dire la même chose du cône oblique. La surface du cylindre AB n'est donc point le produit de la circonférence de la base B par

une perpendiculaire AP menée de la base supérieure A, sur la base inférieure B prolongée, s'il le faut.

DÉVELOPPEMENT DU CÔNE.

§ 67. HYPOTHESE I. Toutes les lignes droites ; comme AB, tirées du sommet du cône droit sur la circonférence de la base BCB, étant égales ; il est évident que si on développe la surface du cône droit, ce développement fera un secteur de cercle *abcd*, qui aura pour rayon le côté $ab = AB$, & un arc *bcd* égal à la circonférence de la base. (*fig. 83.*)

Ce secteur de cercle est égal en surface à un triangle rectangle ABC, qui auroit pour hauteur le rayon du secteur, & pour base une ligne droite égale à l'arc du secteur (482). Multipliez donc la hauteur du cône par la moitié de la circonférence de sa base, ou la circonférence de la base par la moitié de la hauteur : le produit sera la surface convexe ou latérale du cône droit.

§ 68. COROLLAIRE. *La surface convexe du cône droit ; est égale au produit de sa base par la moitié de son apothème* : puisque cette base est égale à celle d'un nombre infini de petits triangles isocèles *ban*, dont toutes les bases prises ensemble formeroient une ligne *bncd*, égale à la circonférence de la base BCB du cône ; & que la surface de tous ces petits triangles, est le produit de cette base par la moitié de la hauteur commune *ar* (450), qui est l'apothème commun à tous ces triangles dans le cône, avant le développement. C. Q. F. D.

§ 69. HYPOTHESE II. La surface convexe ou latérale du cône droit ABSC, étant égale à la surface du triangle rectangle ABC ; il est clair que la surface latérale du cône tronqué *bc CB*, est égale au trapèze *bc CB*, qui a pour hauteur le côté *bB* du cône tronqué, & dont

les bases bc & BC sont parallèles entre elles & égales aux circonférences des bases bcb & BCB du cône tronqué. (fig. 83.)

570. COROLLAIRE. *La surface convexe du cône droit tronqué, est égale au produit de son côté par une circonférence également éloignée des deux bases de ce cône :* puisque le cône tronqué bc BC est égal en surface au trapeze $bcCB$; & que la surface de ce trapeze est le produit de la hauteur bB , égale au côté ou à l'apothème du cône tronqué, par une moyenne proportionnelle arithmétique mn entre les deux bases parallèles de ce trapeze (444). C. Q. F. D.

DÉVELOPPEMENT DU SPHÉROÏDE RÉGULIER.

571. DÉFINITIONS. I°. Le cylindre circonscrit à la sphere, est un cylindre droit, qui a pour base le grand cercle de la sphere, & pour hauteur le diamètre de la sphere. (fig. 86.)

II°. Le cube circonscrit à la sphere, est un cube dont les trois dimensions sont égales chacune au diamètre de la sphere qu'il renferme. (fig. 124.)

III°. Le cône équilatéral est circonscrit à la sphere; lorsqu'il la renferme, & que sa surface touche celle de la sphere dans une circonférence mmm & dans un point x . Dans un cône équilatéral, le diamètre de la base est égal à l'apothème ou au côté. (fig. 123.)

IV°. Dans tous ces cas, la sphere est inscrite, par rapport au corps circonscrit.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

572. *La surface d'un sphéroïde régulier circonscrit à une sphere, est égale au produit de son axe par la circonférence d'un grand cercle de la sphere inscrite; ou à la surface latérale & convexe d'un cylindre circonscrit à la même sphere.* (fig. 85.)

EXPLICATION. Soit un cercle APBRA : soient aussi un carré OQYZ, & un polygone régulier quelconque, circonscrits à ce cercle. Si toute la partie ZPROZ tourne autour du diamètre ou axe PR ; il est évident que le demi-cercle PARCP décrira *une sphere* ; & que la moitié du carré & du polygone régulier décriront, l'une *un cylindre*, & l'autre un *sphéroïde régulier*, circonscrits à la sphere. Faisant ici abstraction de la surface de la sphere, nous allons faire voir que la surface du sphéroïde est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit, laquelle est le produit de l'axe PR par la circonférence d'un grand cercle de la sphere $OQO = ABA$. (564.)

DÉMONSTRATION. Si par les angles du sphéroïde circonscrit à la sphere, on fait passer des plans parallèles DE, MK, *rr*, GH, & ainsi du reste ; le sphéroïde se trouvera divisé en plusieurs portions, qui seront ou des cônes tronqués MKED ; ou des cylindres MK *rr* ; ou des cônes entiers, si les plans parallèles passoient par les angles *a* & *d*, D & F ; & ainsi du reste. (*fig.* 85.)

Il est clair qu'après cette division, la surface du sphéroïde ne sera pas distinguée de la somme des surfaces de tous ces cônes tronqués, ou cylindres, ou cônes entiers. Supposons le sphéroïde divisé comme le représente la figure : il ne contiendra que des cylindres ABKM, AB *rr* ; & des cônes tronqués MKED, *rr* HG ; & ainsi du reste. Il s'agit de démontrer que chaque cône tronqué est égal en surface à un cylindre de même hauteur que lui, & d'un diamètre égal au diamètre de la sphere.

1°. La portion cylindrique, comprise entre les plans parallèles MK & AB, est évidemment égale au produit de son axe SC, par la circonférence de sa base ABA, qui est la circonférence d'un grand cercle de la sphere inscrite. On peut dire la même chose de

l'autre portion cylindrique rr AB du sphéroïde. Ainsi cette portion MK rr du sphéroïde est déjà égale en surface à la portion correspondante MK rr du cylindre. La surface de cette portion du sphéroïde circonscrit est donc déjà le produit de son axe So , par la circonférence d'un grand cercle de la sphère (564). Il reste donc à faire voir que la surface d'un cône tronqué quelconque DEKM, est aussi égale à la surface de la portion correspondante VXKM du cylindre circonscrit. Pour le démontrer,

II°. Prenons le cône tronqué décrit pendant la révolution, par le côté DM du polygone régulier; & du milieu d , où ce côté touche la sphère, menons une ligne dn parallèle à la ligne DE, un diamètre dm , & la ligne nm . Du point D, abaissons sur MK, la perpendiculaire $DN = TS$: cette perpendiculaire DN, ou son égale TS, sera l'axe TS du cône tronqué DEKM dont nous allons chercher la surface.

Cela posé, on aura le triangle MDN, semblable au triangle mdn : car chaque angle du premier est égal à chaque angle correspondant du second. D'abord les angles N & n sont égaux: puisqu'ils sont droits tous les deux; l'un N étant formé par une perpendiculaire, & l'autre n étant appuyé sur le diamètre dCm (368). Ensuite l'angle DMN est égal à l'angle D dn , étant tous les deux au-dessus des parallèles, du même côté de la sécante DM (358): or l'angle dmn est égal à l'angle D da ; puisque l'un dmn est un angle inscrit, qui a pour mesure la moitié de l'arc dPn compris entre ses côtés; & que l'autre D da , formé par une tangente & par une corde, a aussi pour mesure la moitié du même arc dPn compris entre ses côtés ou soutenu par sa corde dn (376): donc l'angle dmn est aussi égal à l'angle DMN = D dn . Enfin dans les deux triangles, le troisième angle est aussi égal de part & d'autre: puisqu'il est supplément à deux angles égaux. Par conséquent, le triangle MDN est semblable au triangle

mdn : donc on aura cette proportion $DM : DN$ ou $TS :: dm . dn$.

Il faut remarquer ici que *dn* est le moyen diamètre du cône tronqué *DEKM* ; & que *dm* est le diamètre de la sphère , égal au diamètre du cylindre circonscrit. Or ces diamètres *dn* & *dm* sont entre eux (475) comme leurs circonférences *dnd*, *dmd*. De-là cette autre proportion : $DM . TS :: dmd . dnd$.

D'où il suit que $DM \times dnd = TS \times dmd$. Or la surface du cône tronqué *DEKM* est égale au produit $DM \times dnd$; c'est-à-dire, au produit de son côté ou de son apothème *DM* par la circonférence *dnd* d'un cercle qui tient le milieu entre ses deux bases (570) : donc cette surface du cône tronqué *DEKM* est aussi égale au produit $TS \times dmd$, qui est le produit de l'axe du cône par la circonférence d'un grand cercle de la sphère ; produit égal à la surface de la portion correspondante *VXKM* du cylindre circonscrit. (564.)

III°. On démontrera de même que tout autre cône tronqué *DEIF*, est égal en surface à la portion correspondante *VXYZ* du cylindre circonscrit. Il ne s'agit que de tirer du point *a*, un diamètre, & une parallèle *ab* ; & de mener du point *F*, une perpendiculaire sur *DE*. On aura, comme dans le cône précédent, deux triangles semblables, d'où l'on tirera cette proportion : l'apothème *FD* du cône tronqué, est à sa hauteur *PT* ; comme une grande circonférence qui passeroit par le point *a*, est à la circonférence *aba* qui tient le milieu entre les deux bases du cône.

A mesure que le cercle *aba* du cône tronqué devient plus petit que le cercle *ZYZ* de la portion correspondante du cylindre circonscrit ; le produisant *FD* du cône, devient proportionnellement plus grand que le produisant *PT* du cylindre : l'un peut donc compenser l'autre.

IV°. Par conséquent la somme des surfaces de tous les cônes ou cylindres du sphéroïde, circonscrits à la

sphère, laquelle somme n'est autre chose que la surface totale du sphéroïde circonscrit, est égale au produit de l'axe entier PR de la sphère, par la circonférence d'un grand cercle quelconque ABA ou *dmd* de la sphère.

Cette somme des surfaces de tous les cônes ou cylindres du *sphéroïde circonscrit* à la sphère, fera donc égale à la surface convexe du *cylindre circonscrit* à la même sphère : puisque cette surface convexe du cylindre circonscrit est aussi le produit de l'axe entier du cylindre, égal à l'axe de la sphère, par la circonférence de la base du cylindre, égale à la circonférence d'un grand cercle de la sphère. C. Q. F. D.

DÉVELOPPEMENT DE LA SPHERE.

THÉORÈME.

573. *La surface de la sphere est égale au produit de son axe par la circonférence d'un de ses grands cercles, ou à la surface latérale & convexe d'un cylindre circonscrit. (fig. 85 & 86.)*

DÉMONSTRATION. Ce théorème n'est au fond qu'un corollaire du théorème précédent. La sphère peut être considérée comme un sphéroïde formé par la révolution d'un *polygone régulier d'une infinité de côtés* autour d'un de ses diamètres quelconque PR, lequel devient son axe. Or la surface de ce sphéroïde, est égale au produit de l'axe entier de la sphère, par la circonférence d'un grand cercle de la même sphère (572) : donc la surface de la sphère, qui n'est point distinguée de la surface de ce sphéroïde d'une infinité de côtés, est aussi le produit de l'axe de la sphère par la circonférence d'un grand cercle de la sphère; produit égal à celui qui donne la surface convexe du cylindre circonscrit, sans y comprendre les deux bases. (fig. 85.)

Par exemple, si on suppose infiniment petites &
infiniment

infiniment multipliées les tangentes IF, FD, DM, Mr, rG, GS, qui sont les côtés du polygone circonscrit; elles se confondront avec la circonférence du cercle. Ainsi, pendant la révolution autour de l'axe PR, elles décriront une infinité de petits cônes tronqués, qui se confondront avec la surface de la sphère, & dont chacun sera égal en surface à la partie correspondante du cylindre circonscrit. C. Q. F. D.

DIVERS COROLLAIRES.

374. COROLLAIRE I. *La surface de la sphère, est quatre fois la surface d'un de ses grands cercles.* Car la surface de la sphère, est le produit de la circonférence d'un grand cercle par tout le diamètre : au lieu que la surface d'un grand cercle est le produit de la même circonférence par le quart du diamètre. Or le premier produit est quatre fois plus grand que le second (565) : donc la surface de la sphère est égale à la surface de quatre de ses grands cercles.

375. COROLLAIRE II. *La surface convexe du cylindre circonscrit, est égale à la surface de la sphère, & par-là même à quatre grands cercles de la sphère ; auxquels si on ajoute les deux bases du cylindre, qui sont aussi deux grands cercles, on aura la surface totale du cylindre ; égale à six grands cercles de la sphère : donc la surface totale du cylindre circonscrit, est à la surface de la sphère ; comme 6 est à 4, ou comme 3 est à 2.*

376. COROLLAIRE III. *La surface d'une calotte sphérique, est égale à une surface cylindrique de même hauteur que la calotte, & de même diamètre que la sphère. (fig. 84.)*

EXPLICATION. I°. Une calotte sphérique de BN pour
H h

être considérée comme formée par la révolution d'une infinité de petites tangentes, qui ont décrit chacune un petit cône tronqué. Or on vient de démontrer que la surface de tous ces petits cônes, confondue avec celle de la sphère, est égale à la surface de la portion correspondante d'un cylindre circonscrit, dont la hauteur seroit BN : donc cette calotte a la même surface, que cette portion du cylindre circonscrit.

Ainsi, pour avoir la surface d'une calotte sphérique, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphère, par la hauteur NB de la calotte : le produit exprimera la surface cherchée.

Par la même raison, pour avoir la surface d'une zone, comme DF xd , terminée par deux cercles parallèles ; il faut multiplier la hauteur CN de cette zone, par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

PROBLÈME.

577. *Trouver la surface d'une sphère dont on connoît le diamètre.*

SOLUTION. Cherchez la circonférence d'un grand cercle de cette sphère, par le moyen du rapport approché d'Archimède (438) : ensuite multipliez la circonférence par le diamètre : le produit sera la surface cherchée de la sphère. (573.)

PARAGRAPHE TROISIÈME

RAPPORT DE CES SURFACES.

578. DÉFINITION. **O**N nomme *solides semblables*, ceux qui ont un même nombre de faces, semblables chacune à chacune : il faut par conséquent, que leurs

angles correspondans soient égaux ; & que leurs côtés homologues soient proportionnels.

Par exemple , deux cubes sont des solides semblables : deux sphères sont des solides semblables : deux cylindres droits , ou deux cylindres également inclinés , dont les hauteurs sont entre elles comme les bases , sont des solides semblables.

Mais un prisme & une pyramide , un prisme triangulaire & un prisme pentagonal , un prisme droit & un prisme oblique , ne sont pas des solides semblables. De même deux cylindres droits , dont les hauteurs ne sont point proportionnelles aux bases , ne sont pas des solides semblables.

PRODUISANS DE CES SURFACES.

§79. OBSERVATION. Nous avons démontré dans le paragraphe précédent :

I°. Que la surface latérale du prisme , droit ou oblique , est le produit du périmètre de sa base par sa hauteur : ainsi *ce périmètre & cette hauteur* sont les deux produisans de la surface du prisme. (561.)

II°. Que la surface latérale du cylindre , droit ou oblique , est le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur : ainsi *cette circonférence & cette hauteur* sont les deux produisans de la surface du cylindre. (564.)

III°. Que la surface latérale d'une pyramide droite & régulière , est le produit du périmètre de sa base par la moitié de son apothème : ainsi *ce périmètre & la moitié de l'apothème* sont les deux produisans de la surface latérale d'une pyramide droite & régulière quelconque. (563.)

IV°. Que la surface latérale d'un cône droit quelconque , est le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothème. (568) : ainsi *la circonférence*

férence de la base & la moitié de l'apothème sont les deux produisans de la surface du cône droit.

V°. Que la surface d'une sphere quelconque , est le produit de la circonférence d'un de ses grands cercles par son axe ou par son diametre quelconque : ainsi la circonférence & le diametre sont les deux produisans de la surface d'une sphere quelconque. (573.)

THÉORÈME I.

§ 80. *Dans deux solides quelconques , semblables ou dissemblables , les surfaces sont entre elles , comme les produits de leurs deux produisans respectifs.*

DÉMONSTRATION. Soient un prisme & un cône , dont on veuille comparer les surfaces. Nommons S , la surface du premier ; s , la surface du second : nommons B & H les deux produisans de la premiere surface ; b & h les deux produisans de la seconde surface.

Il est évident que la surface S du prisme , sera à la surface s du cône ; comme BH , est à bh : puisque ces deux produits sont l'expression des deux surfaces , qu'ils représentent respectivement. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

§ 81. *Quand deux surfaces régulières ont un produisant commun ou égal , elles sont entre elles comme l'autre produisant.*

DÉMONSTRATION. Soient les deux surfaces du rhéorème précédent , dans lesquelles on a cette proportion , $S. s :: BH. bh$. Si $B = b$, ou si $H = h$; il est évident qu'on aura $S. s :: B. b$; ou bien $S. s :: H. h$. (221.)

Par conséquent , deux surfaces qui ont même base , sont entre elles comme les produisans qui expriment leurs hauteurs ; & deux surfaces , dont les produisans

qui expriment leurs hauteurs sont égaux, sont entre elles comme leurs bases.

Par exemple, soient un prisme & un cylindre, dont les surfaces aient une même hauteur; il est évident que leurs deux surfaces ont un *même nombre d'éléments*, & qu'elles ne diffèrent entre elles que par la *grandeur de ces éléments* (585), qui sont dans l'une & dans l'autre, comme les périmètres des bases.

De même soient deux cylindres, dont les bases soient égales, & les hauteurs inégales: il est évident que leurs deux surfaces ont des éléments égaux, & qu'elles ne diffèrent entre elles que par la quantité de ces éléments, qui est exprimée par la différence des hauteurs. C. Q. F. D.

582. REMARQUE. Dans un prisme & dans un cône droit, les produisans qui répondent à la hauteur des surfaces, sont toute la hauteur dans le prisme, & la moitié de l'apothème dans le cône droit. Ainsi, pour que les produisans relatifs à la hauteur soient égaux dans le prisme & dans le cône, il faut que la moitié de l'apothème du cône droit, égale toute la hauteur du prisme, ou toute la perpendiculaire menée d'un point de la base supérieure sur la base inférieure.

Alors, quoique les deux surfaces soient totalement dissimilaires dans les deux solides, on pourra les comparer entre elles: parce que dans le développement, elles deviennent l'une un parallélogramme & l'autre un triangle, dont on connoît les hauteurs & les bases.

THEOREME III.

583. Si les deux produisans d'une surface sont proportionnels aux deux produisans homologues d'une autre surface; ces deux surfaces sont entre elles, comme les carrés d'une de leurs dimensions homologues.

Hb. in

DÉMONSTRATION. Quand les deux produisans d'une surface sont proportionnels aux deux produisans homologues d'une autre surface ; les deux produits répondent à deux rectangles, dont les hauteurs sont proportionnelles aux bases. Or deux rectangles, dont les hauteurs sont proportionnelles aux bases, sont deux figures semblables (498), dont les surfaces sont entre elles comme les carrés d'une de leurs dimensions quelconques. (499.) C. Q. F. D.

§ 84. COROLLAIRE. Les surfaces de deux sphères inégales sont entre elles, comme les carrés respectifs ou de leurs circonférences ou de leurs diamètres : puisque leurs surfaces respectives, égalant celles de deux cylindres circonscrits, répondent à deux rectangles semblables, dont les hauteurs & les bases sont proportionnelles. (475.)

ARTICLE SECOND.

SOLIDITÉ DES CORPS.

§ 85. DÉFINITION. I. COMME la surface est composée de lignes d'une largeur infiniment petite & par-tout égale (438) ; de même le corps ou le solide est composé de surfaces ou de tranches d'une épaisseur infiniment petite & par-tout égale. Par exemple, un cube est composé d'une infinité de tranches carrées, égales & parallèles à la base : un cylindre, droit ou incliné, est composé d'une infinité de cercles égaux à la base, posés les uns sur les autres. Ces tranches ou ces surfaces d'une épaisseur infiniment petite & par-tout égale, sont ce qu'on nomme les élémens des solides. Le nombre & la grandeur de ces élémens déterminent la grandeur d'un solide, ou la quantité de sa solidité, ou le

résultat de la triple dimension, abstraction faite de la densité propre.

586. AXIOME. *Deux solides sont égaux en solidité, quand le premier a autant de tranches élémentaires que le second ; & que chaque tranche élémentaire du premier, est égale à la tranche correspondante du second.*

Ainsi deux corps ou deux solides, qui ont des figures & des surfaces différentes, seront cependant égaux en grosseur ou en solidité ; si le premier ayant la moitié moins d'éléments que le second, a des éléments dont la surface soit par-tout de moitié plus grande que la surface des éléments du second.

Quand on dit que deux corps ou deux solides sont égaux ; on doit entendre que leur solidité est égale ; ou que la somme des éléments du premier, égale en nombre ou en grandeur la somme des éléments du second : quelle que soit d'ailleurs & leur figure & leur surface.

587. DÉFINITION II. Comme les mesures des surfaces sont des toises quarrées, des pieds quarrés, des pouces quarrés (446) ; de même les mesures des solides sont des toises cubes, des pieds cubes, des pouces cubes, des lieues cubes, & ainsi du reste. Une *toise cube* ou cubique est un cube compris sous six faces, dont chacune est une toise quarrée. Un *pied cube* est un cube compris sous six faces, dont chacune est un pied quarré. On voit par-là, ce qu'il faut entendre par un pouce cubique, par une ligne cubique, par une lieue cubique. La toise cubique renferme six fois 36 cubes d'un pied de diametre chacun. (fig. 4.)

Nous allons considérer dans les solides, leur *égalité*, leur *mesure*, leur *rapport* : delà les trois paragraphes suivans.

PARAGRAPHE PREMIER,

ÉGALITÉ DES SOLIDES.

ON mesure assez facilement la solidité d'un prisme ; comme on le verra dans le paragraphe suivant. Mais on ne peut mesurer la solidité d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône, d'une sphère, que dans un prisme : il faut donc trouver l'égalité de ces différens corps avec un prisme, pour pouvoir évaluer leur solidité,

PRISME ET CYLINDRE,

§ 88. THÉORÈME. *Un prisme & un cylindre, de même base & de même hauteur, sont égaux en solidité,*

DÉMONSTRATION. Il est évident que ces deux solides ont un même nombre d'élémens ; puisqu'ils ont une même hauteur : & que tous les élémens de l'un sont égaux à tous les élémens de l'autre ; puisque dans le prisme & le cylindre, tous les élémens sont égaux aux bases, que l'on suppose égales : donc le prisme & le cylindre, de même base & de même hauteur, sont égaux en solidité. C. Q. F. D.

§ 89. REMARQUE. On démontrera de la même manière & par le même raisonnement, dont la vérité se fait également sentir à l'esprit & à l'imagination :

I°. Que deux prismes de même base & de même hauteur, dont l'un est droit & l'autre oblique, dont l'un est triangulaire & l'autre pentagonal, par exemple, sont égaux en solidité : puisqu'ils ont le même nombre d'élémens, & que tous ces élémens sont égaux dans l'un & dans l'autre ; par la supposition.

II°. Que deux cylindres de même base & de même hau-

teur, dont l'un seroit droit & l'autre incliné, sont aussi égaux en solidité : par la même raison.

III°. Que deux pyramides droites, régulières & semblables, de même base & de même hauteur, sont égales en solidité : puisqu'ayant une même hauteur, elles ont évidemment un même nombre d'élémens ; & qu'il est clair que les élémens correspondans décroissent également dans l'une & dans l'autre pyramide, depuis la base jusqu'au sommet.

IV°. Que deux cônes droits, de même base & de même hauteur, sont aussi égaux entre eux en solidité : par la même raison.

PRISMES ET PYRAMIDES.

590. LEMME. Si on coupe une pyramide quelconque, droite ou oblique, régulière ou irrégulière, par un plan parallèle à la base ; la section sera un plan semblable à la base ; & ce plan sera à la base, comme le quarré de sa hauteur, est au quarré de la hauteur de la base. (fig. 89.)

DÉMONSTRATION. Soit une pyramide quadrangulaire ABCDO : soit aussi la section *abcd*, parallèle à la base ABCD. On concevra aisément que la théorie que nous allons établir auroit également lieu, si la pyramide étoit triangulaire ou pentagonale ou dodécagonale ; & ainsi du reste.

1°. Les deux plans *abcd* & ABCD sont semblables. Car ces plans étant parallèles entre eux, par la supposition ; il est évident que la ligne droite OA forme les mêmes angles sur l'un & sur l'autre plan ; que la face AOB de la pyramide, forme aussi les mêmes angles sur l'un & sur l'autre plan. On peut dire la même chose des autres lignes & des autres faces de la pyramide, relativement aux deux plans parallèles qu'elles coupent. Par conséquent, tous les angles des

deux plans parallèles sont respectivement égaux , & les deux plans sont semblables.

II°. Ces deux plans étant parallèles, il est évident qu'ils coupent proportionnellement dans chaque face quelconque AOB de la pyramide, les deux côtés OA & OB qui terminent cette face triangulaire (400) : ce qui donne cette proportion (403, 405); $ab . AB :: aO . AO$.

III°. Ces plans étant semblables, ils sont entre eux en surface, comme les *quarrés de leurs côtés homologues* (499). Ainsi le petit plan est au grand plan, comme le quarré du côté ab est au quarré du côté AB ; ou plus simplement, $p . P :: \overline{ab} :: \overline{AB}$.

Et comme nous venons de voir que $ab . AB :: aO . AO$; le petit plan sera aussi au grand plan, comme le quarré de aO est au quarré de AO : puisque quand deux raisons sont égales, on peut substituer l'une à l'autre. Ainsi on aura, $p . P :: \overline{aO} . \overline{AO}$.

IV°. Ces plans sont enfin entre eux, comme les *quarrés de leurs hauteurs*, en prenant ces hauteurs du sommet O de la pyramide. Pour le démontrer; de ce sommet de la pyramide, menons sur les deux plans prolongés, s'il le faut, une perpendiculaire ON. Cette perpendiculaire formera sur les deux plans parallèles, deux angles égaux Ona & ONA : ce qui donne encore deux triangles semblables Ona & ONA . On aura donc encore cette proportion; $nO . NO :: aO . AO$.

Par conséquent, les deux plans étant entre eux comme les quarrés de la seconde raison, ainsi que nous l'avons déjà démontré; ils sont aussi comme les quarrés de la première raison qui lui est égale : on aura donc encore cette proportion : $p . P :: \overline{nO} . \overline{NO}$.

Or cette dernière raison exprime les quarrés des hauteurs des deux plans parallèles $abcd$ & $ABCD$:

donc ces deux plans sont entre eux comme les quarrés de leurs hauteurs , ou de leurs distances du sommet O de la pyramide.

On conçoit que la même démonstration peut s'appliquer à toute pyramide, droite ou oblique, régulière ou irrégulière, d'un nombre quelconque de faces triangulaires : donc dans toute pyramide , que l'on coupe par un plan parallèle à la base (fig. 87 & 88) , la section b ou m sera un plan semblable à la base ; & ce plan sera à la base , comme le quarré de sa hauteur est au quarré de la hauteur de la base. C. Q. F. D.

THÉORÈME I.

591. *Deux pyramides , droites ou inclinées , semblables ou dissemblables , qui ont leurs bases & leurs hauteurs égales , sont égales en solidité. (fig. 88 & 89.)*

DÉMONSTRATION. Soient la pyramide pentagonale RM & la pyramide quadrangulaire ON , que je suppose de même hauteur & d'égale base : en telle sorte que la base de chacune soit égale à dix toises quarrées de surface , par exemple.

Il est clair que ces deux pyramides différentes sont égales en solidité ; si elles ont autant d'éléments l'une que l'autre , & si leurs éléments correspondans sont par-tout égaux dans l'une & dans l'autre , depuis la base jusqu'au sommet (586). Or ,

1°. Il est évident que ces deux pyramides ont un même nombre d'éléments : puisqu'ayant une même hauteur , selon la supposition , elles sont comprises entre deux plans parallèles dont l'un passeroit par les bases & l'autre par les sommets des deux pyramides ; & que ces deux plans parallèles , renfermant par-tout un même espace , ne peuvent contenir entre eux qu'une même quantité de couches élémentaires d'une égale épaisseur infiniment petite. Il reste donc à faire voir

que tous les élémens correspondans dans l'une & dans l'autre pyramide, depuis les bases égales jusqu'aux sommets également éloignés des bases, sont égaux entre eux; quelle que soit la figure & la position de chaque pyramide.

II°. On conçoit déjà confusément que ces élémens, égaux dans les bases, doivent décroître proportionnellement jusqu'aux sommets. Mais cette connoissance confuse exige un développement qui lui donne l'évidence & la certitude géométrique. Pour cela, coupons l'une & l'autre pyramide en n & en m par des plans parallèles aux bases & qui soient à égale distance des sommets O & R : nous aurons deux plans n & m , parallèles & semblables aux bases respectives, & dont les hauteurs nO & mR seront égales. Ainsi $nO = mR$; & $nO = mR$.

Or par le lemme précédent, dans la pyramide quadrangulaire, le plan n est à la base N :: nO . NO ; & dans la pyramide pentagonale, base M :: mR . MR .
le plan m , est à la

Sur quoi il faut remarquer que dans ces deux proportions, les deux dernières raisons sont égales : puisque les hauteurs des deux pyramides étant égales, & les sections étant faites à égale distance des sommets; il est clair que $nO = mR$; & que $NO = MR$.

Ainsi dans ces deux proportions, les deux premières raisons étant égales chacune à une même raison, elles sont aussi égales entre elles (166), & donnent cette proportion : la base quadrangulaire N, est à son plan parallèle & semblable n ; comme la base pentagonale M, est à son plan parallèle & semblable m ; ou plus simplement N . n :: M . m .

Or par la supposition, la base N est égale à la base M; donc le plan n sera aussi égal au plan correspon-

dant m . Ce que nous avons démontré des deux plans correspondans en n & en m , on peut le démontrer de tous les plans correspondans. Ainsi les deux pyramides sont égales en solidité; & parce qu'elles ont le même nombre d'élémens; & parce que tous leurs élémens correspondans sont égaux. C. Q. F. D.

592. COROLLAIRE. *Ce que nous venons d'établir; dans le lemme & dans le théorème touchant les pyramides, doit s'entendre aussi des cônes, droits ou inclinés: puisque les cônes sont des pyramides dont les bases ont une infinité de côtés. Ainsi, si deux cônes de même base & de même hauteur sont l'un droit & l'autre incliné; ces deux cônes sont égaux en solidité: parce qu'ils ont un même nombre d'élémens; & que tous leurs élémens correspondans sont égaux, étant tous entre eux comme les quarrés égaux de leurs hauteurs correspondantes.*

THÉORÈME II.

593. *Tout prisme triangulaire peut se diviser en trois pyramides égales. (fig. 87.)*

DÉMONSTRATION. Soit le prisme triangulaire ABCDEFA. Je coupe les trois parallélogrammes montans, chacun en deux parties égales (436) par les diagonales AF, FC, EC; & je fais passer un plan par les deux diagonales AF, FC; & un autre plan par les deux diagonales FC, EC: ce qui me donne trois pyramides, ACBF, ECDF, ECAF. Or,

I°. Les deux premières pyramides ont les bases ABC, DEF, égales; de même que les hauteurs BF, DC, qui sont les hauteurs du prisme: donc elles sont égales.

II°. Si on conçoit que la seconde pyramide ECDF ait pour base le triangle ECD, & que la base de la troisième pyramide ECAF soit le triangle ECA; on

trouvera que ces deux pyramides sont aussi égales ; puisque leurs bases ECA , ECD , sont égales ; & qu'elles ont leurs sommets au même point F , ce qui leur donne une même hauteur. (591.)

Pour se rendre sensible cette démonstration, aussi bien que celle du théorème suivant, il faudra exécuter en cire ou en terre grasse, les deux figures solides sur lesquelles on démontre.

III°. La première & la troisième pyramide sont égales chacune en solidité à la seconde : donc les trois pyramides sont égales entre elles en solidité. Or ces trois pyramides ne sont autre chose que le prisme divisé : donc ce prisme, & tout prisme triangulaire, peut se diviser en trois pyramides égales en solidité. C. Q. F. D.

594. COROLLAIRE I. *Tout prisme triangulaire est triple d'une pyramide de même base & de même hauteur ; toute pyramide triangulaire, qui a la même base & la même hauteur que le prisme, est précisément le tiers de ce prisme en solidité : puisque ce prisme contient précisément trois pyramides égales, dont l'une a la même base & la même hauteur que le prisme.*

595. COROLLAIRE II. *Tout cube est triple d'une pyramide de même base & de même hauteur. (fig. 74.)*

DÉMONSTRATION. Si l'on fait passer un plan AG par les côtés opposés GB & AD du cube ; il est évident qu'on divisera ce cube en deux prismes triangulaires égaux entre eux, dont chacun contiendra trois pyramides égales, dont l'une aura la même base & la même hauteur que le prisme triangulaire.

Or ces trois pyramides égales de chaque prisme triangulaire, ou de chaque moitié du cube divisé, ne sont que la moitié des pyramides qui seroient formées sur le cube, dont la base est double de celle du prisme triangulaire : donc les six pyramides égales

des deux prismes triangulaires , équivalent précisément à trois pyramides formées sur la base du cube.
C. Q. F. D.

THÉORÈME III.

596. *Toute pyramide, de quelque nombre de côtés que soit sa base, est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur. (fig. 88.)*

DÉMONSTRATION. Soit la pyramide pentagonale renversée ABCDEAR. Les lignes RB & RC sont derrière la pyramide.

I°. Du point M, où son axe RM atteint le milieu ou le centre de la base, je mene les lignes droites MA, MB, MC, MD, ME, à tous les angles de la base : ce qui divise la base en autant de triangles, qu'elle a de côtés.

II°. Par la pensée ou en réalité, je coupe la pyramide par des plans qui passent par le sommet R & par les droites AMB, BMC, CMD, DME, EMA ; & la pyramide pentagonale se trouve divisée en cinq pyramides triangulaires, égales ou inégales entre elles, qui ont chacune pour base, l'un des triangles de la base, & dont l'une est la pyramide triangulaire REAME.

III°. Par la pensée ou en réalité, je construis sur les cinq triangles de la base, des prismes triangulaires, tels que R \times PAEMEAR, de même base AEMA que chaque triangle, & de même hauteur RM que la pyramide pentagonale. Or chacun de ces prismes triangulaires, par exemple R \times PAEMA, est triple de la pyramide RAMER à laquelle il correspond (594) : donc le prisme total, formé sur tous les triangles de la base, est triple de la pyramide totale ; & par conséquent la pyramide est le tiers d'un tel prisme.

IV°. On démontrera la même chose & de la même

manière, à l'égard d'une pyramide dont la base est un hexagone, ou un décagone, ou un dodécagone, ou un chyliongone, ou un polygone quelconque, régulier ou irrégulier, d'un nombre fini ou d'un nombre infini de côtés; soit que la pyramide soit droite, soit qu'elle se trouve inclinée: donc toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur que cette pyramide. C. Q. F. D.

597. COROLLAIRE I. *La somme de plusieurs prismes de même hauteur, est égale en solidité à un seul prisme, dont la base est égale à la somme de tous ces prismes pris ensemble, & dont la hauteur est égale à celle d'un de ces mêmes prismes.*

DÉMONSTRATION. I°. Soit le prisme droit ABCD-FEA (*fig. 87*): la solidité de ce prisme est le produit de sa base ABCA, par sa hauteur FB. Divisez ce prisme par des plans perpendiculaires à la base, en vingt ou trente petits prismes, égaux ou inégaux: la somme de ces vingt ou trente prismes, ayant même base & même hauteur que le prisme total, aura précisément la solidité du prisme total; & sera le produit de la base ABCA de tous ces prismes, par la hauteur FB d'un de ces prismes.

II°. Il est évident qu'un prisme total, droit ou incliné (*fig. 88*), qui auroit pour base ABCDEA, & pour hauteur MR, seroit égal aux cinq prismes que nous avons formés sur la même base & sur la même hauteur (596. III°); & que si cette base étoit divisée en mille ou en cent mille triangles, sur lesquels on formât des prismes de même hauteur, tous ces prismes partiels seroient précisément égaux au prisme total: puisqu'ils ne seroient autre chose que le prisme total, divisé en parties égales ou inégales, unies ou séparées. C. Q. F. D.

598. COROLLAIRE II. *La somme de plusieurs pyramides*

mides de même hauteur, est égale à une seule pyramide dont la base est égale à celle de toutes ces pyramides, & dont la hauteur est égale à celle d'une de ces pyramides: puisque cette pyramide totale ABCDEAR (fig. 88), est égale en solidité aux cinq pyramides que nous venons d'y observer, & dont chacune est le tiers du prisme qui lui correspondroit; soit que ces prismes se trouvent réunis, soit qu'ils se trouvent séparés. C. Q. F. D.

599. COROLLAIRE III. *Tout cône, droit ou incliné, est le tiers d'un cylindre de même base & de même hauteur: puisqu'un cône est une pyramide d'une infinité de côtés, comme un cylindre est un prisme d'une infinité de côtés; & qu'une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme quelconque de même base & de même hauteur. (596.) C. Q. F. D.*

600. COROLLAIRE IV. *La solidité d'une sphere est égale à celle d'une pyramide ou d'un cône, qui a pour hauteur le rayon de la sphere, & une base égale à la surface de la sphere. (fig. 114.)*

DÉMONSTRATION. On peut concevoir la sphere comme composée d'une infinité de cônes ou de pyramides Cm , Cn , Co , Cp , qui ont leur sommet au centre de la sphere, & dont chacune a pour base une partie infiniment petite de la surface de la sphere.

Or la somme de tous ces cônes ou de toutes ces pyramides, est égale en solidité à une seule pyramide ou à un seul cône, qui auroit une hauteur égale à celle de toutes ces pyramides, savoir, le rayon de la sphere; & dont la base seroit égale à la somme de toutes les bases de ces pyramides, c'est-à-dire, égale à la surface de la sphere (598): donc une sphere est égale en solidité à une pyramide ou à un cône qui a pour hauteur le rayon, & pour base la superficie de la sphere. C. Q. F. D.

PARAGRAPHE SECON D.

MESURE DES SOLIDES.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

601. *LA solidité d'un prisme quelconque, droit ou incliné, est égale au produit de sa base par sa hauteur.*
(fig. 93.)

DÉMONSTRATION. I°. Soit un prisme dont la base $BCDB = AFGEA$, ait douze toises quarrées; & la hauteur AB , cinq toises en longueur. Je dis que la solidité de ce prisme est de 60 toises cubiques.

Pour le démontrer, il faut concevoir que le prisme est partagé en autant de tranches parallèles à la base, qu'il y a de toises dans la hauteur, dont chacune ait une toise de hauteur. Cela étant, il est évident que les cinq tranches BA ayant la même base que le prisme; chacune contient autant de toises cubiques, que la base contient de toises quarrées, c'est-à-dire, douze. Par conséquent les cinq tranches prises ensemble contiennent cinq fois douze ou soixante toises cubiques: donc la solidité d'un prisme est égale au produit de sa base par sa hauteur.

II°. Si la base $BCDB$ étoit de 1000 toises quarrées, & la hauteur AB de 10 toises; on auroit 10 tranches, de 1000 toises cubiques chacune; & la solidité seroit encore le produit de la base 1000 par la hauteur 10, c'est-à-dire, 10000 toises cubiques.

III°. Il est évident que la même démonstration a lieu, quelle que soit & la base & la hauteur, quelle que soit & la nature & la position du prisme. Si le prisme, dont on cherche la solidité, est un parallélepède rectangle, tel que celui que nous venons d'ob-

server; la théorie que nous venons d'établir se fait sentir à la fois & à l'esprit & à l'imagination & à l'œil. Si le même parallélopède devenoit obliqu'angle, en inclinant son axe à sa base; la même théorie subsiste; puisqu'un prisme droit & un prisme incliné, s'ils ont même base & même hauteur, sont égaux en solidité. (589.)

Si la base du prisme dont on cherche la solidité; au lieu d'être un rectangle, est un triangle ou un polygone d'un nombre quelconque de côtés égaux ou inégaux; on évaluera cette base en toises quarrées; & en la multipliant par la hauteur, on aura également la solidité du prisme quelconque: puisque ce prisme quelconque est égal en solidité à un parallélopède rectangle, qui auroit une base & une hauteur égales à celles de ce prisme. (589.) C. Q. F. D.

DIVERS COROLLAIRES.

602. COROLLAIRE I. *La solidité d'un prisme quelconque est le produit de ses trois dimensions: savoir, de la hauteur $AB = 5$; de la largeur $BC = 4$; de la profondeur $CD = 3$. D'abord $5 \times 4 = 20$; $20 \times 3 = 60$. De même, $5 \times 3 = 15$; $15 \times 4 = 60$. Enfin $3 \times 4 = 12$; $12 \times 5 = 60$; & ainsi du reste. (fig. 93.)*

603. COROLLAIRE II. *La solidité des cylindres est aussi le produit de leur base par leur hauteur: puisque les cylindres, droits ou inclinés, sont égaux en solidité, à des prismes de même base & de même hauteur; & que la solidité des prismes est le produit de leur base par leur hauteur. (fig. 93.)*

604. COROLLAIRE III. *La solidité des pyramides & des cônes est le produit de leur base par le tiers de leur hauteur: puisque les pyramides & les cônes, droits ou inclinés, sont le tiers des prismes & des cylindres de même base & de même hauteur (599); & que ces*

prismes & ces cylindres sont le produit de leur base par toute leur hauteur. Donc la solidité des pyramides & des cônes, trois fois plus petite, doit être le produit de la base par le tiers de la hauteur. (22 L. II^e.)

605. COROLLAIRE IV. *La solidité d'une sphere est le produit de sa surface par le tiers de son rayon : puisqu'une sphere est égale en solidité à une pyramide ou à un cône, qui auroit pour hauteur le rayon ; & pour base, la surface de la sphere (600). Or une telle pyramide ou un tel cône n'est que le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur, dont la solidité seroit le produit de la base par le rayon entier. (fig. 314.)*

Par exemple, si on divise la surface de la sphere $CaNbMa$, en une infinité de petits triangles ou de quadrilateres mnp , qui occupent toute la surface de cette sphere; on aura une infinité de petites pyramides triangulaires ou quadrangulaires Cm, Cn, Co, Cp , qui renfermeront toute la surface & toute la solidité de la sphere, & dont chacune sera en solidité, le produit de sa base par le tiers de sa hauteur qui est le rayon de la sphere.

606. REMARQUE. Ce que nous venons de dire & de démontrer sur la mesure des solides, peut servir à faire trouver la solidité de tous les corps : parce que les corps, dont les figures seroient les plus irrégulieres, peuvent être tous réduits en pyramides ; comme les figures planes peuvent être toutes réduites en triangles.

DIVERS PROBLÈMES.

607. PROBLÈME I. *Trouver la solidité d'un cylindre, dont on connoît la hauteur avec le diametre de la base. (fig. 80.)*

SOLUTION. Trouvez la circonférence de la base

ABA du cylindre, par le rapport d'Archimède ou de Metius (480); & multipliez cette circonférence par le quart du diamètre donné ou par la moitié du rayon XA : le produit sera la surface de la base du cylindre (481). Multipliez cette surface par la hauteur AC du cylindre : le produit sera la solidité du cylindre. (603.)

Si ce solide, au lieu d'être un cylindre, étoit un cône, droit ou incliné, on auroit sa solidité, en multipliant la base par le tiers de la hauteur. (599.)

On voit par-là comment on peut trouver la solidité d'un prisme ou d'une pyramide, dont la base est toujours ou un triangle, ou un quadrilatère, ou un polygone régulier ou irrégulier : il faut évaluer la surface de cette base, & la multiplier ou par la hauteur, ou par le tiers de la hauteur ; & le produit donnera la solidité ou du prisme ou de la pyramide.

608. PROBLÈME II. *Trouver la solidité d'une sphere, dont on connoît le diamètre.* (fig. 84.)

SOLUTION. Trouvez, par le rapport d'Archimède ou de Metius, la circonférence d'un grand cercle de cette sphere (480); & multipliez cette circonférence par le diamètre donné : le produit sera la surface de la sphere. (573.)

Après quoi, multipliez cette surface de la sphere par le sixième du diamètre donné, ou par le tiers du rayon : le produit sera la solidité de la sphere. (605.)

609. PROBLÈME III. *Trouver la solidité d'un cône à base sphérique, dont la hauteur soit le rayon de la base.* (fig. 110.)

SOLUTION. Dans une sphere ADBFA, qu'un rayon CM, formant un angle quelconque MCD sur l'axe DF, fasse une révolution autour de cet axe : ce rayon

CM décrira un cercle MRM, qui embrassera un cône MCRDM à base sphérique-MRDM.

1^o. Il est évident que la solidité de ce cône est une portion de la sphère, portion correspondante à la partie de la surface sphérique qu'embrasse ce cône à base sphérique. Ainsi si la base sphérique DMRM est le tiers ou le quart de la surface de la sphère; la solidité du cône en question, sera aussi le tiers ou le quart de la sphère: puisque si l'on conçoit que cette portion de la sphère soit divisée en une infinité de petites pyramides droites, posées sur leur base développée, qui fera la base DMRM; la somme de toutes ces pyramides sera égale à une seule pyramide de même base & de même hauteur (598); & que la solidité de cette pyramide seroit le produit de sa base par le tiers de sa hauteur qui est ici le rayon de la sphère. (604.)

2^o. Pour trouver cette solidité, évaluez donc la surface sphérique DMRM, qui sera le produit d'un grand cercle de la sphère, par la hauteur DS (576); & multipliez cette surface par le tiers du rayon de la sphère: le produit sera la solidité du cône à base sphérique dont il est ici question.

610. PROBLÈME IV. *Trouver la solidité d'un segment sphérique, dont on connoît l'arc & le rayon.* (fig. 110.)

SOLUTION. 1^o. Il est évident que la solidité du segment sphérique quelconque DMSRM, est la solidité du cône à base sphérique dont nous venons de parler, moins le cône à base plane MCRSM. Retranchez donc du cône à base sphérique, le cône à base plane MCRSM, qu'il sera facile d'évaluer (607): le reste sera la solidité du segment sphérique.

611. PROBLÈME V. *Mesurer la capacité d'un vase*

circulaire, par exemple, d'un tonneau. (fig. 90.)

SOLUTION. I^o. Comme un tonneau forme un ventre vers le milieu, & que de ce milieu il va toujours en diminuant vers ses deux extrémités; on a coutume de le considérer comme un cylindre *mnrν*, dont la base *mvm* = KHK est un cercle moyen proportionnel arithmétique, entre le cercle ABA qui forme le fond, & le cercle CDC qui forme le ventre du tonneau.

Car on peut supposer le diamètre, & par-là même le rayon & la circonférence du cercle KHK, d'autant plus petits à l'égard du grand cercle CDC; qu'ils sont plus grands à l'égard du petit cercle ABA.

II^o. C'est pourquoi, mesurez la surface d'un des fonds ABA du tonneau, & la surface du plus grand cercle CDC du même tonneau (484); & prenez la somme de ces deux surfaces, dont la moitié sera la surface du cercle moyen KHK. La moitié de cette somme, multipliée par la longueur FE du tonneau, donnera à peu près la capacité du tonneau. Car le produit donnera un cylindre *mnrν*, qui répondra à très-peu près à la capacité du tonneau: puisqu'il aura pour hauteur, la longueur EF du tonneau; & pour base, un cercle moyen proportionnel arithmétique entre le plus petit & le plus grand cercle du tonneau. Ce que le cylindre *mnrν* se trouve avoir de moins que le tonneau en CK *x*, il l'a de plus en AK *m*.

C'est sur ces principes qu'est fondée la théorie & la pratique du *jaugeage*, dont nous ne prétendons donner ici qu'une idée, mais dont il sera facile de faire une infinité d'applications.

TOISÉ DES SOLIDES.

612. OBSERVATION. Nous avons averti d'abord, que la solidité des corps s'estime par des mesures cubiques (587); nous avons démontré ensuite qu'on

trouve cette solidité dans les prismes, dans les cylindres, dans les pyramides, dans les cônes, & dans tous les corps qu'on peut toujours réduire en pyramides ou en cônes, en multipliant une base par une hauteur.

I°. On peut dire ici des solides, ce que nous avons dit ailleurs des surfaces (460): Quand un solide, dont il faut évaluer la solidité, ne contient dans sa base & dans sa hauteur, que des grandeurs homogènes, par exemple, des toises sans pieds, ou des pieds sans pouces & sans lignes; on l'évalue aisément, en prenant le produit de la base par la dimension qui répond à la hauteur.

II°. Mais il est fort rare que les deux dimensions d'un solide soient en tout homogènes. Par exemple, dans un parallélopipède rectangle, la base sera de 14 toises quarrées, 2 pieds quarrés, 8 pouces quarrés, à multiplier par 12 toises, trois pieds & 9 pouces: & alors cette évaluation devient plus compliquée & plus difficile.

La solidité d'un solide est toujours le produit de trois dimensions; d'une *longueur* & d'une *largeur*, d'où résulte la base; & d'une *hauteur*, qui multiplie cette base.

Quand un solide contient dans ses dimensions, des grandeurs hétérogènes, par exemple, des toises & des pieds & des pouces & des lignes; on peut en trouver la solidité, en réduisant ses trois dimensions à la plus petite espèce. Dans ce cas, d'abord on multiplie deux dimensions indifféremment l'une par l'autre, pour avoir un produit: ensuite on multiplie ce produit par la troisième dimension, pour avoir un second produit: Enfin on divise ce second produit par le cube du nombre qui exprime combien de fois la plus grande espèce contient la petite espèce, en laquelle ont été réduites les trois dimensions; par exemple, combien de fois

la toise contient le pouce, si les trois dimensions ont été réduites en pouces : le quotient exprime la valeur du solide en toises.

Mais comme la méthode de réduire les dimensions à la plus petite espece, est très-embarrassante pour le calcul ; en voici une autre qu'on lui a substituée : elle est fondée sur une maniere de diviser la toise cubique ; qui ne differe point de la toise courante.

613. EXPLICATION. Soit la toise cubique BF, que nous allons diviser en portions de toises cubiques. (*fig. 4.*)

I°. Je divise la hauteur AB de cette toise cubique ; en six parties égales ; & par les points de division je fais passer des plans paralleles à la base : ce qui divise la toise cubique en six parallélopipedes égaux, nommés *pieds de toise cubique* ; à cause qu'ils ont chacun un pied de hauteur & une toise quarrée de base.

II°. Je divise de même la hauteur *mn* de chaque pied de toise cubique, en douze parties égales ; & par les points de division je fais passer des plans paralleles à la base : par-là chaque pied de toise cubique se trouve divisé en douze parallélopipedes égaux, nommés *pouces de toise cubique* ; parce qu'ils ont chacun un pouce de hauteur & une toise quarrée de base.

III°. Enfin je divise de même chaque pouce de toise cubique en douze parallélopipedes égaux, qui seront les *lignes de toise cubique*.

La toise cubique contient 6 pieds de toise cubique, 72 pouces de toise cubique, 864 lignes de toise cubique ; de sorte que la ligne de toise cubique est la huit-cent-soixante-quatrieme partie d'une toise cubique.

Sur cette théorie, dont l'évidence se fait sentir par elle-même, est fondée la méthode que nous allons employer dans la solution des deux problèmes suivans.

Pour mieux sentir cette théorie, il faut faire atten-

tion que si le solide BFG (fig. 93), est supposé divisé en toises cubiques; un pied de hauteur, ajouté aux cinq toises BA, donneroit sur la surface AFGE, un rectangle de quatre toises de longueur & de trois toises de largeur sur un pied de hauteur; ou un pied de toise cubique, répandu sur douze toises cubiques, qui donneroit deux toises cubiques d'augmentation au solide BFG.

614. PROBLÈME I. *Trouver le contenu ou la solidité d'un solide, qui a 20 toises de longueur, 6 toises & 3 pieds de largeur, sur 10 toises & 6 pouces de hauteur.*

SOLUTION. Comme la longueur & la largeur d'un solide, forment sa base, qu'on suppose toujours être un rectangle ou égale à un rectangle; cherchez d'abord la surface de cette base, par la méthode que nous avons donnée ailleurs (462). Vous trouverez que cette base contient 130 toises quarrées.

I°. Pour trouver le produit de cette base par la hauteur; multipliez d'abord les toises par les toises: vous aurez pour produit 1300 toises cubiques, que vous écrirez sous les toises.

II°. Pour avoir une aliquote intermédiaire entre les toises & les pouces du multiplicateur; supposez que le multiplicateur, au lieu de 6 pieds, ait

Toises.	Pieds.	Pouces.
130.	0.	0
x 10.	0.	6.
1300.	.	.
22.	4	.
10.	5	.
1310.	5.	.
Toises cubes.	Pieds de toise cubes.	

1 pied. Après quoi multipliez les toises du multiplicande, par 1 pied du multiplicateur, en disant: si on multiplioit 130 toises par 1 toise, le produit seroit 130 toises. Mais on ne multiplie que par le sixieme d'une toise: le produit ne sera donc que le sixieme de

130, c'est-à-dire, 21 toises cubiques & 4 sixièmes de toise cubique, qui valent 4 pieds de toise cubique. Ecrivez ce produit, en l'effaçant par un trait; pour vous rappeler qu'il ne doit pas être mis en ligne de compte dans la somme.

III°. Passez aux 6 pouces du multiplicateur, & dites : si on multiplioit 130 toises par un pied, on auroit pour produit 21 toises cubiques, plus 4 pieds de toise cubique; mais on multiplie par 6 pouces, qui ne sont que la moitié d'un pied : on aura donc pour le produit de 6 pouces, un produit de moitié plus petit. Prenez donc la moitié de ce que vous a donné la multiplication par 1 pied; & vous aurez, pour la moitié de 21 toises cubes & 4 pieds, 10 toises cubes & 5 pieds de toise cube.

IV°. Prenez la somme de toutes ces quantités : elle exprimera la solidité ou le contenu du solide en question; savoir, 1310 toises cubes, plus 5 pieds de toise cube, qui font cinq-sixièmes de toise cube, ou 30 pieds cubes.

615. PROBLÈME II. *Trouver la solidité ou le contenu d'un solide, qui a 12 toises 3 pieds 4 pouces de longueur, & 6 toises 2 pieds 6 pouces de largeur, sur 13 toises 4 pieds de hauteur.*

SOLUTION. I°. Je cherche la surface de la base, ou le produit de la longueur par la largeur (463). Pour cela, je multiplie 12 toises par 6 toises : le produit est 72. Je multiplie 12 toises par 2 pieds, qui sont le tiers d'une toise : le produit est 4 toises. Je multiplie 12 toises par 6 pouces, qui sont le quart de 2 pieds : le produit est 1 toise.

Je multiplie ensuite 6 toises 2 pieds 6 pouces, par 3 pieds qui sont la moitié de la toise. Le produit de 6 toises par 3 pieds, ou $\frac{6}{1} \times \frac{1}{2}$ est 3 toises : le produit de 2 pieds ou d'un tiers de toise par une demi-toise, ou $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ est un sixième de toise ou 1 pied : le

produit de 6 pouces ou d'un demi-pied par un demi-pied, ou $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pied, est un quart de pied ou 3 pouces.

Je multiplie encore 6 toises 2 pieds 6 pouces, par 4 pouces qui font le neuvième de trois pieds : le produit sera le neuvième de ce que m'ont produit trois pieds. Je prends donc le neu-

vième de 3 toises 1 pied 3 pouces, en disant : en 3 toises combien de fois 9 toises ? Point. En 19 pieds, combien de fois 9 pieds ? 2 fois. En 15 pouces, combien de fois 9 pouces ? 1 fois, avec un reste 6 pouces qui font 72 lignes, dont le neuvième est 8 lignes. Ainsi la base de ce solide sera de 80 toises quarrées, plus 3 pieds 4 pouces & 8 lignes de toise quarrée.

II°. Je multiplie cette base par la hauteur 13 toises 4 pieds, selon la méthode du problème précédent. Ainsi je multiplie d'abord les toises par les toises ; & j'ai les produits 240 & 80, écrits comme on voit ici. Je multiplie ensuite les toises du multiplicande, par les 4 pieds du multiplicateur, en disant : si je multipliois 80 toises par 1 toise, le produit seroit 80 toises : mais je multiplie simplement par 4 pieds qui font les deux tiers de la toise : le produit ne sera donc que les deux tiers de 80. Je prends le tiers de 80, & je l'écris deux fois : ce tiers est 26 toises cubes & 4 pieds de toise cube.

Après cela, je multiplie les toises & les pieds de

Base de ce solide.			
Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
12.	3.	4.	.
$\times 6.$	2.	6.	.
<hr/>			
72	.	.	.
4	.	.	.
1	.	.	.
<hr/>			
3	1.	3.	.
.	2	1	8.
<hr/>			
80.	3.	4.	8.

multiplicateur , d'a-
bord par les 3 pieds ,
ensuite par les 4 pou-
ces , enfin par les 8 li-
gnes du multiplian-
de. En multipliant 13
toises 4 pieds , par 3
pieds qui font la moi-
tié d'une toise ; j'ai
pour produit 6 toises
cubes , & 5 pieds de
toise cube ou cinq si-
xiemes de toise cube.
Car $\frac{13}{1} \times \frac{1}{2} = 6 + \frac{1}{2}$,
ou à 6 toises 3 pieds :
ensuite $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, ou
à 2 pieds : total , 2
toises + 5 pieds.

En multipliant en-
suite 13 toises 4 pieds ,

par 4 pouces qui font le neuvieme de trois pieds ; j'ai
le neuvieme du dernier produit , ou 4 pieds 6 pouces 6
lignes & environ une demi-ligne de toise cube. Car le
neuvieme de 41 pieds est 4 pieds , avec un reste 5 qui
vaut 60 pouces. Le neuvieme de 60 pouces est 6
pouces , avec un reste 6 qui vaut 60 lignes. Le neu-
vieme de 60 lignes est 6 lignes , avec un reste 6 qui
vaut 60 points. Le neuvieme de 60 points est 6 points
ou une demi-ligne , avec un reste 6 qu'on néglige.

En multipliant enfin 13 toises 4 pieds , par 8 lignes
qui font le sixieme de 4 pouces ; j'ai le sixieme du
dernier produit , ou 9 pouces une ligne & un dou-
zieme de ligne de toise cubique.

Enfin je prends la somme de tous ces produits ; &
j'ai pour produit total 1101 toises cubes , plus 3 pou-
ces & environ sept. lignes & demi de toise cube :

Solidité de ce Solide.			
Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
80.	3.	4.	8.
× 13.	4.	.	.
240	.	.	.
80	.	.	.
26	4	.	.
26	4	.	.
6.	5	.	.
.	4	6	6 + $\frac{1}{2}$.
.	.	9	1 + $\frac{1}{12}$
1101	0	3	7 + $\frac{7}{12}$
Toises cubes.	Pieds , de toise cube.	pouces ,	lignes

c'est le contenu ou la solidité qu'il falloit trouver.

Quand on n'a pas besoin d'une bien rigoureuse précision, on se contente de faire la multiplication sur les toises & les pieds & les pouces du multiplicande & du multiplicateur; & on se contente d'un à-peu-près pour les lignes.

PARAGRAPHE TROISIEME.

RAPPORT DES SOLIDES.

616. OBSERVATION. IL résulte de tout ce que nous venons de dire & de démontrer sur la mesure des solides, que *la solidité de tout corps est le produit d'une surface par une hauteur*. Cette surface & cette hauteur sont les deux *produisans* de ce solide. Or comme une surface est déjà le produit de deux dimensions; il s'ensuit que toute solidité est un produit de trois dimensions. Ces trois dimensions sont une *longueur*, une *largeur*, une *profondeur* ou hauteur.

I°. Dans un *prisme quadrangulaire*, la longueur est un des côtés de la base: la largeur est une perpendiculaire menée entre le côté pris pour base & le côté opposé: la hauteur ou profondeur est une perpendiculaire menée entre la base supérieure & la base inférieure, prolongée s'il le faut.

II°. Dans un *prisme triangulaire*, la longueur est un des côtés quelconque de la base: la largeur est la moitié d'une perpendiculaire menée du sommet de l'angle opposé au côté pris pour longueur: la hauteur est une perpendiculaire menée de la base supérieure sur la base inférieure.

III°. Dans un *prisme dont la base est un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés*, la longueur est le périmètre de la base: la largeur est la moitié d'une

perpendiculaire menée du centre de la base sur un côté : la hauteur est une perpendiculaire menée de la base supérieure sur l'inférieure.

IV°. Dans une pyramide dont la base est un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés ; la longueur & la largeur sont les mêmes que dans le prisme précédent. Mais en faisant le produit qui doit donner la solidité , il ne faut multiplier la base que par le tiers de la hauteur de la pyramide : parce que la solidité d'une telle pyramide n'est que le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur. Ainsi son produisant en hauteur fera , non toute la hauteur , mais simplement le tiers de la hauteur de la pyramide.

THÉORÈME I.

617. Deux prismes , ou un cylindre & un prisme , droits ou inclinés , qui ont des bases égales & des hauteurs inégales , sont entre eux en solidité , comme leurs hauteurs : puisqu'ils ne diffèrent que selon cette dimension ; & que cette dimension inégale dans l'un & dans l'autre , exprime quelle quantité de tranches égales l'un a plus que l'autre. C. Q. F. D.

618. COROLLAIRE. Deux cônes , ou deux pyramides , droits ou obliques , qui ont des bases égales & des hauteurs inégales , sont aussi entre eux comme leurs hauteurs : puisqu'ils sont le tiers de prismes qui sont entre eux comme leurs hauteurs (596) ; & que les tiers sont entre eux comme les tous. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

619. Deux prismes ou deux cylindres , ou un prisme & un cylindre , droits ou obliques , qui ont des hauteurs égales & des bases inégales : sont entre eux comme leurs bases : puisqu'ils ne diffèrent en solidité que selon

leurs bases; & que la différence de ces bases répond à la différence de leur solidité. Si la base du premier est un pied carré, & la base du second trois pieds carrés; ces deux prismes ou cylindres sont évidemment entre eux en solidité comme 1 est à 3; puisqu'il est clair que dans le dernier prisme, il y a trois prismes égaux au premier. De même & pour la même raison, si la base du premier est comme 10, & la base du second comme 245 & un tiers; ces deux prismes sont entre eux en solidité, comme 10 est à 245 & un tiers. C. Q. F. D.

620. COROLLAIRE. Deux cônes ou deux pyramides, droits ou inclinés, qui ont des hauteurs égales & des bases inégales, sont entre eux en solidité comme leurs bases: puisqu'ils sont le tiers de prismes qui sont entre eux comme leurs bases; & que les tiers sont entre eux comme les tous (163). C. Q. F. D.

THÉORÈME III.

621. Quand deux solides sont semblables, leurs solidités sont entre elles comme les cubes d'une dimension homologue quelconque, prise dans chacun de ces solides.

DÉMONSTRATION. 1°. Les solidités de deux solides semblables (578), sont entre elles en raison triplée, ou comme les cubes d'une dimension homologue quelconque prise dans chacun des solides. Car dans les solides semblables, toutes les dimensions homologues sont proportionnelles: donc les solidités de ces solides, sont des produits de trois quantités proportionnelles: donc elles sont en raison triplée d'une de ces quantités, & par conséquent d'une des dimensions quelconque prise dans chacun de ces solides. (219.)

Ainsi deux prismes semblables, ou deux cylindres semblables, ou deux pyramides semblables, ou deux cônes semblables, sont entre eux en raison triplée d'une

d'une de leurs dimensions homologues quelconque ; ou comme les cubes d'une de ces dimensions homologues : savoir, ou comme les cubes de leur largeur, ou comme les cubes de leur hauteur, ou comme les cubes de leur profondeur.

II°. On peut appliquer aux solides semblables, la même théorie que nous avons établie ailleurs pour les surfaces semblables (499). Ainsi, soient deux solides quelconques semblables. J'appelle les trois dimensions du plus petit a, b, c : j'appelle les trois dimensions du plus grand, an, bn, cn . J'ai à démontrer que le premier solide est au second, comme le cube d'une dimension quelconque a du premier, est au cube de la dimension homologue an du second ; & je le démontre ainsi. Les trois produisans de ces deux solides semblables sont d'un côté abc , & de l'autre $abcnnn$: le rapport ou la raison du premier solide au second, est donc la raison de abc , à $abcnnn$.

Mais à la place de cette raison je puis en mettre une autre qui lui soit égale, savoir, la raison de aaa , à $aaannn$. Je dis donc que cette dernière raison est égale à la précédente. Car si je forme cette proportion $abc. abcnnn :: aaa. aaannn$; le produit des extrêmes $aaannnabc$, est égal au produit des moyens $aaannnabc$. On peut appliquer la même démonstration aux deux autres dimensions. C. Q. F. D.

622. COROLLAIRE. Deux sphères sont entré elles en solidité, comme les cubes ou de leurs rayons ou de leurs diamètres ou de leurs circonférences ou de leurs arcs semblables : de même deux cubes sont entre eux en solidité, comme les cubes de leurs dimensions.

DÉMONSTRATION. I°. Deux sphères inégales sont toujours nécessairement des solides semblables, dont les trois produisans, la circonférence, le diamètre, & le tiers du rayon (605) ; sont des grandeurs propor-

tionnelles (474) : donc deux sphères inégales sont entre elles comme les cubes d'un de ces trois produisans, ou comme les cubes d'un de ces trois produisans multiplié ou divisé par un même nombre quelconque. (220.)

Par conséquent, si une sphère quelconque s a un diamètre $= 1$; & une autre sphère S , un diamètre $= 10$; la solidité de la première sera 1, & la solidité de la seconde sera 1000.

II°. De même, deux cubes inégaux sont toujours nécessairement des *solides semblables* : donc ils sont entre eux comme les cubes ou de leur hauteur ou de leur largeur ou de leur profondeur.

Étant donné un cube dont le diamètre d'une grandeur quelconque soit $= 1$; il est facile de trouver un cube huit fois plus grand en solidité : ce sera celui dont le diamètre sera double ou $= 2$. Mais étant donné un cube dont le diamètre est $= 1$; il n'est pas facile de faire un *cube double* en solidité : parce qu'un cube comme 1 & un cube comme 2 en solidité, ont des produisans qui doivent être entre eux comme les racines cubiques de 1 & de 2 ; racines dont on peut approcher à l'infini par le moyen du calcul (151), mais qu'on ne peut atteindre avec précision ni par le calcul, ni par la géométrie élémentaire.

REMARQUE. Les anciens géomètres, après avoir résolu le problème de la duplication du carré, se proposèrent le problème de la duplication du cube ; problème qui ne dut sa grande célébrité qu'au mérite de la difficulté.

Pour résoudre géométriquement le problème de la duplication du carré ; on cherche une moyenne proportionnelle géométrique m , entre le diamètre a du cercle donné & un diamètre double $2a$: ce qui donne la proportion continue $a : m :: m : 2a$; d'où l'on déduit $aa : mm :: a : 2a$. (521.)

Pour résoudre géométriquement le problème de la

duplication du cube ; il faudroit trouver deux moyennes proportionnelles géométriques k & m , entre a & $2a$; en telle sorte qu'on eût cette proportion géométrique continue $\equiv a . k . m . 2a$: ce qui donneroit $aaa . kkk . a . 2a$; & le cube aaa dont a seroit le diamètre, seroit la moitié du cube kkk dont k seroit le diamètre (234). Mais ces deux moyennes proportionnelles géométriques, qu'on trouve aisément par la théorie de la parabole combinée avec le cercle, on ne peut les trouver par la seule géométrie élémentaire.

Au reste, la géométrie élémentaire est suffisante pour résoudre avec toute la précision qu'on peut attendre dans la pratique, le *problème de la duplication du cube* ; & les deux moyennes proportionnelles géométriques qu'on trouve par les sections coniques, en donnant plus de satisfaction à l'esprit, ne lui donnent pas plus de justesse & de précision dans l'opération. Etant donné un cube qui ait 100000 lignes cubes de matière solide, par exemple ; un cube double en aura 200000 : pour avoir ce cube double, extrayez la racine cubique de 100000, & la racine cubique de 200000. Les cubes que vous ferez sur ces deux racines, seront entre eux, à infiniment peu près, comme 1 est 2 : la différence ne sera pas d'un dixième de ligne cube ; & en prenant les deux moyennes proportionnelles géométriques, vous ne pourriez vous flatter ou vous assurer d'atteindre à plus de précision dans la réalité.

On pourra de la même manière, trouver à infiniment peu près, une sphere double d'une autre sphere ; un cylindre double d'un autre cylindre ; & ainsi du reste.

THEOREME IV.

613. Un cylindre droit est égal en solidité au produit de sa surface convexe par la moitié de son rayon.

Kk ij

DÉMONSTRATION. Pour comparer la solidité du cylindre avec celle d'une sphere ; nous allons considérer le cylindre , comme développé en couches rectilignes sur sa surface convexe. (fig. 68.)

I°. Nous avons démontré que la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle , qui a pour base une ligne égale à la circonférence du cercle ; & pour hauteur , le rayon du même cercle (481) : donc , en supposant que ADA soit la base d'un cylindre , si on développe toutes les couches concentriques ADA, ada, C , qui enveloppent l'axe C du cylindre ; on aura un *demi-prisme quadrangulaire* , qui aura CA pour hauteur , & AB pour un des côtés de sa base.

II°. Or un tel demi-prisme est égal en solidité au produit du rectangle qui forme sa base , par la moitié de sa hauteur AC : puisqu'un tel solide n'est que la moitié d'un autre solide qui auroit la même base , & qui auroit par-tout une hauteur égale à la hauteur AC , laquelle va en diminuant toujours proportionnellement de C en B , dans toute l'étendue du rectangle qui forme la base. C. Q. F. D.

THÉORÈME V.

624. La solidité de la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit. (fig. 86.)

DÉMONSTRATION. I°. La surface de la sphere & la surface convexe du cylindre circonscrit , sont égales (573) : donc si on développe la sphere & le cylindre sur leur surface convexe , ces deux solides auront des bases égales.

II°. La sphere & le cylindre circonscrit étant développés sur leur surface convexe ; la solidité de la sphere est le produit de la base , par le tiers du rayon (605) : la solidité du cylindre circonscrit est le produit de la même base , par la moitié du rayon ; selon le

théorème précédent, La sphere & le cylindre seront donc entre eux en solidité, comme leurs produisans inégaux (221); savoir, comme le tiers du rayon est à la moitié du rayon,

Or si on double ces deux termes, le même rapport subsistera; & on aura les deux tiers du rayon d'une part, & de l'autre le rayon entier: donc la solidité de la sphere est à la solidité du cylindre circonscrit, comme les deux tiers du rayon sont au rayon entier: donc la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit. C. Q. F. D.

625. COROLLAIRE. On a démontré ailleurs (575); que la surface de la sphere est à la surface totale du cylindre circonscrit, comme 2 est à 3: on vient de démontrer que la solidité de la sphere est aussi à la solidité du cylindre circonscrit, comme 2 est à 3: donc la surface de la sphere est à la surface entiere du cylindre circonscrit, comme la solidité de la sphere est à la solidité du cylindre.

La découverte de ces rapports de la sphere au cylindre circonscrit, a immortalisé Archimede; comme la découverte de l'égalité entre le quarré de l'hypothénuse & les deux quarrés des côtés, a immortalisé Pythagore. (517.)

Archimede fut si charmé de cette découverte, qu'il voulut qu'on gravât sur sa tombe, un cylindre circonscrit à une sphere. Quelles armoiries, en comparaison de celles qu'on se donna dans les siècles de la Chevalerie!

THÉORÈME VI.

626. La solidité de la sphere, est plus grande que la solidité de tous autres solides de même surface que la sphere.

DÉMONSTRATION. 1°. Nous avons fait voir ailleurs;

Kk iij.

que de toutes les figures isopérimètres, le cercle est celle qui renferme le plus de surface (510) : donc un solide, produit par la révolution perpendiculaire d'une ligne droite autour de la circonférence d'un cercle, renfermera aussi plus de solidité que si elle faisoit une semblable révolution autour d'une autre figure isopérimètre quelconque : puisqu'elle renfermera une même somme de couches élémentaires toutes plus grandes en surface.

Par exemple, un *quarré* d'un pied de largeur, ayant quatre pieds de périmètre, ne renferme qu'un pied *quarré* de surface : au lieu qu'un *cercle* de quatre pieds de périmètre ou de circonférence, renferme beaucoup plus d'un pied *quarré* de surface. (484.)

II°. La solidité de la *sphère* est les deux tiers du *cylindre* circonscrit (624) : donc la solidité de la *sphère* fera plus grande que celle d'un *prisme*, d'une *pyramide*, d'un *cône*, de même surface que le *cylindre* circonscrit.

Par exemple (en supposant ici de part & d'autre le rapport du diamètre à la circonférence, en nombres ronds, comme 1 est à 3) ; soit un *cylindre* d'un pied de diamètre & d'un pied de hauteur : il aura, en y comprenant les deux bases, quatre pieds *quarrés* & demi de surface. Supposons ce *cylindre* développé sur sa surface convexe de trois pieds *quarrés* (623) : on trouvera que sa solidité, produit de la base par le quart du diamètre, n'est que les trois quarts d'un pied cube : $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$. Soit ensuite une *sphère* de quatre pieds & demi de surface : son diamètre aura plus d'un pied & quart de longueur ; & en la supposant développée sur cette surface & convertie en *cône* (605), on trouvera que sa solidité, produit de la base par le tiers du rayon, est déjà les trois quarts d'un pied cube, en ne supposant le diamètre que d'un pied : car $\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$, ou $\frac{9}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

III°. Soient une *sphère* & un *sphéroïde* régulier

d'un nombre fini de côtés; & que ces deux solides soient égaux en surface. Par la pensée, coupons avec un plan trachant, ces deux solides; en telle sorte que la section passe par l'axe & par les poles de l'un & de l'autre. Il est clair que cette section sera un cercle dans la *sphere*, un polygone régulier dans le *sphéroïde*; & que si ces deux sections font une révolution sur leur axe, elles décriront l'une la *sphere* & l'autre le *sphéroïde*. Il est clair que le cercle & le polygone sont isopérimètres: puisqu'ils sont des parties semblables de deux surfaces égales; & qu'on peut faire sur la *sphere* & sur le *sphéroïde*, un même nombre indéfini de pareilles sections, dont la somme embrassera toute leur surface.

Il est clair ensuite que la *sphere* & le *sphéroïde* auront chacun une solidité proportionnelle à la grandeur ou à la capacité du plan qui les produit; & que parmi ces deux solides, le plus grand en solidité, sera celui dont le plan générateur contiendra plus de surface, ou renfermera une plus grande somme d'éléments.

Or le cercle a plus de surface & renferme une plus grande somme d'éléments, que le pentagone, que l'exagone, que tout autre polygone de même périmètre & d'un nombre fini de côtés: donc la *sphere* formée par la révolution du cercle, aura plus de solidité, que tout autre solide formé par la révolution d'un pentagone, d'un exagone, ou de toute autre figure d'un nombre fini de côtés, dont le périmètre sera égal au périmètre du cercle.

IV°. On peut dire la même chose de tout autre solide dont on voudra comparer la solidité à celle de la *sphere*. Par exemple, si un cercle & une ellipse font une révolution autour de leur axe; le cercle décrira une *sphere*; l'ellipse décrira un *solide ellipsoïdal*, renfermé d'un côté & applati de l'autre. Supposons égaux en surface ces deux solides; & par la pensée, prenant

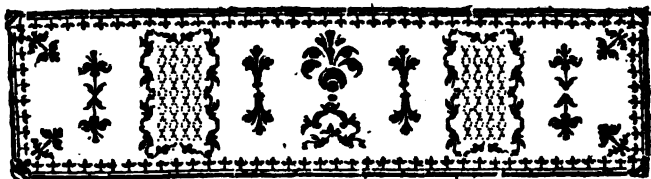
dans le solide ellipsoïdal un diamètre égal au diamètre de la sphere, divisons sur ces deux diamètres la sphere & le solide ellipsoïdal en un même nombre de tranches ou de plans qui renfermeront leur surface & leur solidité divisée en ses élémens. Chaque plan élémentaire de la sphere, fera un cercle : chaque plan élémentaire du solide ellipsoïdal, sera un plan alongé d'un côté & applati de l'autre ; ces plans seront isopérimètres ; puisque leurs périmètres seront des parties semblables des deux surfaces égales, Cela posé,

Je dis que la sphere aura plus de solidité que le sphéroïde ellipsoïdal : puisque chaque plan élémentaire de la sphere est un cercle, qui est plus grand & qui contient plus de surface & par-là même plus de matiere que toute autre figure isopérimetre *non-circulaire*. Or les plans élémentaires du sphéroïde ellipsoïdal, ne sont pas des cercles : donc ils ont chacun moins de surface, donc ils contiennent chacun moins de solidité, que les plans correspondans, circulaires & isopérimètres, de la sphere.

D'ailleurs ces plans élémentaires du sphéroïde ellipsoïdal, seront inclinés à leur diamètre ; au lieu que les plans élémentaires de la sphere, seront perpendiculaires à leur diamètre : chaque plan de la sphere aura donc dans son épaisseur infiniment petite, une hauteur réellement plus grande, que chaque plan correspondant du solide ellipsoïdal. La sphere aura donc encore pour cette raison, plus de solidité que le solide ellipsoïdal.

De tout cela il résulte que la sphere a plus de solidité, que tout autre solide quelconque de même surface. C. Q. F. D.

CONCLUSION. Après avoir observé l'étendue dans ses trois dimensions, il nous reste à montrer comment on peut soumettre à la rigueur du calcul, ces dimensions de l'étendue : tel est l'objet du traité suivant,



PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE, O U ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES GÉOMÉTRIE.

QUATRIÈME TRAITÉ.

LA TRIGONOMÉTRIE.

627. DÉFINITION. **L**A *Trigonométrie* est l'art de résoudre les triangles par le calcul arithmétique ; ou l'art d'appliquer le calcul arithmétique à la géométrie, dont toutes les figures se mesurent par les triangles auxquels on les réduit. (*fig. 45.*)

1°. Soit un grand triangle ABC , dont on connoisse la base AB & les deux angles A & B , qui feront connoître le troisième angle C . Nous avons donné ailleurs (417) la méthode de résoudre le grand triangle, par son rapport avec le petit triangle semblable abc . Cette méthode s'appelle la *trigonométrie par les triangles semblables*.

II°. Il est évident que si dans le même triangle ABC, l'angle C connu avoit un rapport géométrique avec le côté opposé AB connu, & l'angle A connu, un rapport géométrique avec le côté opposé CB inconnu; il seroit facile de connoître le côté inconnu CB, en faisant cette regle de trois : l'angle C connu est au côté AB connu, comme l'angle A connu est au côté CB inconnu.

III°. Mais ce rapport géométrique que les angles n'ont pas avec les côtés opposés, comme nous le démontrerons ailleurs; les sinus des angles l'ont avec les côtés opposés à ces angles. On peut donc en place des angles, mettre leurs sinus; & par ce moyen la fausse regle de trois précédente se convertira en celle-ci, qui sera vraie : *le sinus connu de l'angle C, est au côté opposé AB connu; comme le sinus connu de l'angle A, est au côté opposé CB inconnu.* Il s'agit donc de connoître les sinus de tous les angles, & par ce moyen l'on résoudra le grand triangle ABC immédiatement en lui-même, & sans le secours du petit triangle semblable *abc*. Cette méthode de résoudre les triangles immédiatement en eux-mêmes, s'appelle la *trigonométrie par les sinus*; & c'est celle que nous allons exposer.

628. REMARQUE. I°. La première méthode peut suffire pour résoudre avec assez de précision dans la pratique, des triangles dont les côtés ne sont pas bien grands, & dont aucun angle n'est très-petit : parce qu'alors l'on peut faire un petit triangle assez exactement semblable au triangle donné.

Mais quand on a à résoudre un triangle, dont la base par exemple, sera un rayon de la terre, & dont les côtés seront des lignes menées des extrémités de ce rayon au centre de Saturne ou du soleil; alors la première méthode est insuffisante; parce qu'il n'est pas possible de faire un petit triangle, qui soit assez exactement semblable au grand triangle donné. Il faut donc

nécessairement dans ce cas, employer la seconde méthode. Et en général, pour résoudre même les triangles de moindre grandeur, on emploie celle-ci, & on ne se sert de la première qu'au défaut de tables des sinus.

629. REMARQUE. II°. Il est évident que le calcul arithmétique, tombant sur trois grandeurs connues & proportionnelles d'un triangle, doit donner la quatrième inconnue, avec la plus grande précision. C'est un avantage qu'on ne peut jamais s'assurer d'atteindre parfaitement, quand on opère par la méthode des triangles semblables. (430.)

630. REMARQUE. III°. Les tangentes & les sécantes des angles, ont aussi un rapport géométrique avec les côtés opposés à ces angles : on peut donc les employer aussi bien que les sinus. Mais pour simplifier davantage ce traité, & pour applanir de plus en plus la route des mathématiques, nous ne résoudrons les triangles que par les sinus ; sans employer les tangentes & les sécantes, dont nous donnerons cependant une théorie assez développée.

631. REMARQUE IV. La trigonométrie se divise en *trigonométrie rectiligne* & en *trigonométrie sphérique*. La première a pour objet les triangles dont les trois côtés sont des lignes droites : la seconde a pour objet des triangles dont les côtés sont des arcs de cercle. Nous traiterons d'abord & principalement de la première ; ensuite & plus succinctement de la seconde.

ARTICLE PREMIER.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

632. OBSERVATION. **D**ANS la plupart des ouvrages de mathématique, la trigonométrie rectiligne est très-

compliquée : nous avons tâché de la simplifier & de la rendre plus facile à saisir. Pour y réussir, nous avons écarté tout ce qui nous a paru inutile; & nous avons présenté avec la plus grande lumière possible, ce qu'elle a d'essentiel & d'utile. Nous y traitons d'abord des cordes, qui font connoître les sinus; ensuite du rapport des sinus avec les côtés, pour trouver les côtés inconnus par le moyen des sinus connus; enfin du rapport des sinus avec les tangentes & avec les sécantes, pour trouver les tangentes & les sécantes inconnues, par le moyen des sinus connus.

PARAGRAPHE PREMIER.

LES CORDES ET LES SINUS.

633. DÉFINITION I. **U**N *corde* est une ligne droite; tirée dans un cercle, d'une extrémité d'un arc à l'autre extrémité du même arc. (*fig. 94.*)

Par exemple, la droite GHK est une corde; c'est la corde de l'arc GAK. De même la droite EFL est la corde de l'arc EAL. Nous ferons voir bientôt que la moitié d'une corde est le sinus de la moitié de l'arc qu'elle soutient.

634. DÉFINITION II. On appelle *sinus droit* d'un angle GCA, ou d'un arc GA qui mesure cet angle, une ligne droite GH, tirée de l'extrémité G de l'arc perpendiculairement sur le rayon ou sur le diamètre ACB qui passe par l'autre extrémité A du même arc. (*fig. 94.*)

De même la ligne EF est le sinus droit de l'angle ECA, & de l'arc EA. De même encore la ligne DC est le sinus droit de l'angle DCA, & de l'arc DA. De même enfin, la ligne GL est le sinus droit de l'angle GCD, & de l'arc GD.

635. DÉFINITION III. On nomme *sinus verse* d'un

angle GCA, ou d'un arc GA, la partie du rayon comprise entre le sinus droit & la circonférence. Ainsi la ligne HA est le sinus verse de l'angle GCA, & de l'arc GA. De même la ligne FA est le sinus verse de l'angle ECA, & de l'arc EA. De même encore, la ligne nA est le sinus verse de l'arc nA.

Quand on parle de *sinus simplement*, sans désigner expressement le sinus verse, il faut entendre le sinus droit; & c'est de ce sinus qu'il sera question dans toute la suite de ce traité, & dans la table des sinus qui terminera cet ouvrage. Nous ferons voir ailleurs, comment on trouve le sinus verse d'un arc donné. (638 & 662.)

DIVERS COROLLAIRES.

636. COROLLAIRE I. *L'angle obtus a le même sinus que l'angle aigu qui est son supplément.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Soit l'angle obtus GCB, dont l'angle GCA est le supplément (338). Il est clair que ces deux angles ont le même sinus GH : puisque du point G qui divise ces deux angles, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire GH sur le diamètre qui passe par l'autre extrémité de leur arc; & que selon la définition du sinus, cette perpendiculaire GH est le sinus. C. Q. F. D.

637. COROLLAIRE II. *La partie du rayon, comprise entre le centre du cercle & le sinus d'un angle aigu, est égale au sinus du complément de cet angle.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Soit l'angle GCA, dont le sinus est GH, & dont le complément est l'angle GCD. (337.)

Il est clair que la partie HC du rayon, est égale à GL qui est le sinus de l'angle de complément : puisque ces deux lignes HC & GL sont deux perpendicu-

lares entre deux parallèles DC & GH, lesquelles sont l'une & l'autre perpendiculaires au rayon CA qui forme l'angle droit DCA.

Il est clair encore que si l'angle GCA devient plus grand ou plus petit; les lignes GL & HC, toujours perpendiculaires entre deux parallèles, deviendront plus petites ou plus grandes, en restant toujours égales entre elles. C. Q. F. D.

638. COROLLAIRE III. *Le sinus verse d'un angle aigu, est le rayon moins le sinus droit de l'angle de complément.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. La raison en est évidente: puisque le sinus verse d'un angle aigu quelconque GCA, est HA; & que HA est égal au rayon CA moins HC = GL. Par conséquent, en connoissant le sinus droit de l'angle de complément GCD, on connoît le sinus verse d'un angle GCA & de l'arc GA de cet angle. C. Q. F. D.

639. COROLLAIRE IV. *Le sinus droit d'un angle ou d'un arc, est la moitié de la corde qui soutient un arc double.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Le sinus quelconque GH prolongé jusqu'à la circonférence en K, devient la corde GHK. Or cette corde, & l'arc soutenu par cette corde, sont coupés en deux parties égales, par le diamètre & par le rayon BCA perpendiculaires à cette corde (407). Donc la moitié GH de cette corde, est égale au sinus de l'arc GA, qui est la moitié de l'arc GAK. On peut dire la même chose de la ligne EF, qui est le sinus de l'angle ECA, & qui prolongée jusqu'à la circonférence en I, deviendrait la corde EFI d'un arc double EAI.

Par conséquent, si on connoissoit les cordes de tous les arcs d'une circonférence, on connoîtroit le sinus de

tous ces arcs : pour avoir le *sinus d'un arc*, il ne s'agiroit que de prendre la *moitié de la corde d'un arc double* ou deux fois plus grand. C. Q. F. D.

640. REMARQUE. I°. Si un *angle au centre* GCA, descendant le long du rayon de C en B, devenoit un *angle inscrit*, ayant son sommet appuyé sur la circonférence ; les côtés de cet angle embrasseroient un arc deux fois plus grand que l'arc GA (366). *Le sinus de cet angle devenu angle inscrit, sans changer de nature, seroit donc la moitié de la corde qui soutient l'arc entier qu'il embrasse* : puisque le sinus d'un angle & d'un arc est la moitié de la corde qui soutient un arc double ; & que l'angle inscrit, restant toujours le même, embrasse un arc double de celui qu'il embrasseroit étant au centre. Ainsi la théorie des sinus des angles au centre, convient aussi aux sinus des angles inscrits.

II°. Quand un triangle est inscrit dans un cercle, on ne voit pas tout de suite, pourquoi la moitié de la corde opposée à un angle quelconque, est le sinus de cet angle. (fig. 95.)

Pour le concevoir, placez par la pensée l'angle A au centre du cercle en *a* ; en telle sorte que son côté AB passe toujours par le point B. Alors le côté AC passera en *aD* ; & l'angle A, placé en *a*, aura pour mesure la moitié de l'arc BDC, ou tout l'arc BD. Or puisque le rayon *aD* divise l'arc BDC en deux parties égales ; il divise aussi la corde BC en deux parties égales ; & divisant cette corde en deux parties égales, il est perpendiculaire à cette corde (407). Par conséquent cette corde BC est aussi perpendiculaire au rayon *aD* ; & la moitié *Bd* de cette corde, est le sinus de l'angle *a* égal à l'angle A.

III°. On peut appliquer la même théorie aux deux autres angles du triangle inscrit ABC ; & on démontrera de même, que chacun de ces angles a pour sinus la moitié du côté opposé. Ainsi le sinus de l'angle B

est la moitié de la corde ou du côté AC; & le sinus de l'angle C est la moitié de la corde ou du côté AB.

641. COROLLAIRE V. *Le sinus d'un arc moindre que le quart de la circonférence, devient d'autant plus grand, que l'arc augmente davantage.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Il est évident que GH, sinus de l'arc GA, est plus petit que EF; & que EF, sinus de l'arc EA, est plus petit que DC, qui est le sinus de l'angle droit DCA & de l'arc de 90 degrés ou du quart de la circonférence. C. Q. F. D.

642. COROLLAIRE VI. *Le sinus d'un arc plus grand que le quart de la circonférence, devient d'autant plus petit, que l'arc augmente davantage.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Il est évident que DC, sinus de l'arc BD, est plus grand que EF: que EF, sinus de l'arc BE, est plus grand que GH: que GH, sinus de l'arc BDG, est plus grand que *nm* & que tous les sinus des angles obtus plus grands que BCG.

643. COROLLAIRE VII. *Le plus grand de tous les sinus, est le rayon.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. La chose est évidente: puisque; selon les deux derniers corollaires, le rayon est le sinus de l'angle droit; & que le sinus de tous les autres angles, aigus ou obtus, sont plus petits que le rayon. C'est pour cela que le rayon est appelé *sinus total*.

644. COROLLAIRE VIII. *Quoique les sinus des angles aigus augmentent, à mesure que ces angles deviennent plus grands, jusqu'à l'angle droit; ces sinus n'augmentent pas cependant dans la même proportion que les angles.* (fig. 97.)

DÉMONSTRATION. Quoique l'arc AEB soit double de l'arc ADE; cependant la corde ADB n'est pas double

de la corde AE : puisque la corde ADB n'est pas aussi grande que les deux cordes égales AE & BE prises ensemble. Or les sinus sont moitiés des cordes (639) ; donc *les sinus ne sont pas proportionnels à leurs arcs ou à leurs angles.* C. Q. F. D.

645. COROLLAIRE IX. *Le sinus total est égal au rayon entier ; les sinus partiels sont égaux à des parties du rayon.* On peut donc comparer entre eux les sinus : puisqu'un tout peut toujours être comparé à ses parties ; & réciproquement.

646. REMARQUE I. Le rayon d'un cercle quelconque, est le *sinus total* dont il est ici question. On suppose ce rayon divisé en 100000 parties, ou en 1000000 de parties ; & alors les autres sinus sont des parties du sinus total.

I°. On n'a donné au sinus total un si grand nombre de parties, que pour pouvoir négliger sans erreur sensible, les fractions de l'unité qui restent après les divisions. Par exemple, si j'ai un cercle dont le rayon soit de 100000 toises ; le sinus total étant supposé de 100000 parties, chaque partie du sinus total ou du rayon fera une toise. Et après le calcul, s'il reste une fraction, on pourra la négliger ; parce que sa valeur ne sera qu'une partie d'une toise, laquelle n'est rien sur 100000 toises. A plus forte raison cette fraction pourra-t-elle être négligée, si on suppose le rayon ou le sinus total, égal à 10000000 de parties ou à un plus grand nombre encore. Nous le supposerons divisé en 10000000 de parties, dans la table des sinus qui termine cet ouvrage, & qui renferme les rapports des sinus partiels au sinus total.

II°. On conçoit donc le rayon d'un petit cercle, divisé en autant de parties, que le rayon d'un grand cercle : de même que l'on suppose la circonférence de tout cercle, grand ou petit, divisée en 360 degrés. On cherche ensuite combien les autres sinus, qui sont tous

moindres que le sinus total, contiennent de parties égales à celles du rayon. Par exemple, le sinus total étant supposé de 10000000 de parties; si on fait que le sinus d'un angle de 30 degrés est la moitié du sinus de l'angle droit ou du sinus total; on saura que le sinus de l'angle de 30 degrés, contient 5000000 de parties du sinus total.

Et quoique l'on ne connoisse pas la valeur absolue des sinus, cela n'empêche pas que l'on ne puisse trouver la valeur absolue des côtés d'un triangle dont on connoît un côté & les angles. Car si dans un triangle, un sinus de 10000000 de parties vaut 300 toises; l'autre sinus de 5000000 de parties vaudra 150 toises.

III°. On voit par ce que nous venons de dire, que les sinus partiels ne sont que des fractions du sinus total, ou du rayon, pris pour unité. Par exemple, le sinus total ou le sinus de 90 degrés, est $\frac{10000000}{10000000} = 1$; le sinus de 30 degrés, est $\frac{5000000}{10000000} = \frac{1}{2}$; & ainsi du reste. Ainsi les tables des sinus sont de vraies fractions, dont le dénominateur est omis & sous-entendu: ce sont des fractions décimales. (464.)

Les tangentes & les sécantes sont aussi exprimées dans les tables, en fractions du rayon; fractions dont le dénominateur sous-entendu est toujours le rayon ou le sinus total; & dont le numérateur, plus grand ou plus petit que le dénominateur constant, rend la valeur de la fraction ou plus grande ou plus petite que l'unité, qui est toujours ici le sinus total. (188.)

647. REMARQUE II. Le sinus d'un arc ou d'un angle étant la moitié d'une corde qui soutient un arc double (639); pour connoître tous les sinus, il faut connoître toutes les cordes. Quand on connoîtra toutes les cordes; en prenant toutes leurs moitiés, on aura les sinus de tous les angles. C'est à cette recherche, que nous destinons les théorèmes & les problèmes suivans.

THÉORÈME I.

648. Dans deux cercles inégaux, les cordes des arcs semblables sont proportionnelles aux rayons. (fig. 12.)

DÉMONSTRATION. Soient deux cercles inégaux CMN & Cmn, dans lesquels prenez deux angles égaux MCN & mCn, qui embrasseront des arcs semblables (340); & menez les lignes droites MN & mn, qui seront deux cordes d'arcs semblables.

Les deux triangles rectilignes MNC & mnC sont semblables : puisqu'ils ont un angle commun ; & que dans chaque triangle, les deux autres angles étant opposés à des côtés égaux, sont aussi égaux entre eux (389). Par conséquent, l'angle M ou N est la moitié du supplément à 180 degrés ; l'angle m ou n est la moitié du même supplément à 180 degrés : donc l'angle M est égal à l'angle m ; & l'angle N, égal à l'angle n. Donc les trois côtés du grand triangle sont proportionnels aux trois côtés du petit (403). Donc $MC . mC :: MN . mn$.

Or dans cette proportion, la première raison exprime le rapport des rayons ; & la seconde raison égale exprime le rapport des cordes : donc dans deux cercles inégaux, les cordes des arcs semblables sont proportionnelles aux rayons. C. Q. F. D.

649. COROLLAIRE. Dans deux cercles inégaux, les sinus des arcs semblables sont aussi proportionnels aux rayons : puisque ces sinus sont les moitiés des cordes qui soutiendroient des arcs doubles ; & que ces cordes qui soutiendroient des arcs doubles, étant entre elles comme les rayons, leurs moitiés sont aussi entre elles comme les rayons. (163.)

650. LEMME. Quand on a à multiplier une ligne ou une grandeur quelconque par une autre ; on a la même

produit, soit qu'on multiplie toute la première par toute la seconde; soit qu'on multiplie toute la première par une portion quelconque, & ensuite par l'autre portion, de la seconde. (fig. 103.)

DÉMONSTRATION. Soit une ligne ou une grandeur quelconque AM ou son égale AN, qu'il faille multiplier par la grandeur AB.

1°. Si on multiplie AM ou AN par AB; le produit sera le rectangle ABDM, égal aux deux rectangles AXRM + RXBD.

II°. Si on multiplie AM ou AN par AX, & ensuite par XB; les deux produits seront les deux rectangles AXRM + RXBD, égaux au rectangle ABDM.

La même démonstration auroit lieu, si on multiplioit toute la ligne AB par une portion de MA = NA, & ensuite par l'autre portion de MA ou NA: & ainsi du reste. C. Q. F. D.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

651. *Dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, la somme des deux rectangles des côtés opposés, est égale au rectangle des deux diagonales. (fig. 99 & 100.)*

EXPLICATION. Soit le quadrilatère quelconque ABDF, inscrit au cercle, & divisé par les deux diagonales AD & BF, lesquelles se coupent en un point quelconque V, dans le centre ou hors du centre, à angles égaux ou à angles inégaux. Un rectangle, égal en largeur à une diagonale quelconque AD, & égal en hauteur à l'autre diagonale BF, seroit le rectangle des deux diagonales. Deux autres rectangles, qu'on formeroit de même sur les côtés opposés du quadrilatère, en élevant perpendiculairement l'un sur l'autre ces côtés opposés, & en les multipliant l'un par l'autre, AB par FD, & AF par BD, seroient la somme de

deux *rectangles des côtés opposés* du quadrilatère.

Après ces observations, nécessaires pour bien faire entendre l'état de la question, il sera facile de démontrer le présent théorème, sur lequel uniquement est fondée toute la Trigonométrie. La même démonstration aura lieu, soit que les diagonales se coupent à angles droits, soit qu'elles se coupent à angles aigus & obtus : comme on le verra en faisant la démonstration indifféremment sur les deux figures que nous avons indiquées.

DÉMONSTRATION. Il s'agit de faire voir que $AD \times BF = AB \times DF + AF \times BD$. Pour cela, il faut tirer la ligne AM, de manière qu'elle fasse un angle r égal à l'angle s . Après quoi on démontrera aisément que le produit des deux diagonales, est égal aux deux produits réunis des côtés opposés.

I°. Il est évident que $BD \times AF = AD \times FM$. Car dans les deux triangles FAM & DAB, d'abord les deux angles r & s sont égaux, par la construction. Ensuite les deux angles AFM & ADB sont aussi égaux ; puisqu'ils sont appuyés sur le même arc AB. Ces deux triangles sont donc semblables : donc $BD : AD :: FM : AF$. Par conséquent, $BD \times AF = AD \times FM$.

Donc le produit des deux côtés opposés BD & AF, est déjà égal au produit de la diagonale AD par la partie FM de l'autre diagonale FB.

II°. Il est encore évident que $AB \times FD = AD \times MB$. Pour le démontrer, il faut comparer les deux triangles AFDA & AMBA ; & faire voir que ces deux triangles sont semblables. D'abord l'angle FAD est égal à l'angle BAM ; à cause de l'angle commun MAV, qui est ajouté aux deux angles r & s égaux par la construction. Ensuite l'angle FDA du grand triangle est égal à l'angle MBA du petit : parce qu'ils sont appuyés l'un & l'autre sur le même arc FA. Ainsi les deux triangles sont semblables, & on a cette proportion : $FD : MB ::$

AD . AB. Par conséquent, $FD \times AB = MB \times AD$.

Donc le produit des deux côtés opposés AB & DF, est encore égal au produit de la diagonale AD par la partie restante MB de l'autre diagonale FB.

III°. Il est évident, comme nous l'avons fait voir & sentir dans le lemme précédent, que les deux produits de la diagonale entière AD par les deux parties FM & MB de l'autre diagonale FB, valent ensemble le rectangle des deux diagonales multipliées en entier l'une par l'autre. Donc la somme des deux rectangles des côtés opposés du quadrilatère inscrit au cercle, est égale au rectangle des deux diagonales. C. Q. F. D.

652. REMARQUE. Ce théorème est l'unique proposition un peu difficile à saisir dans la Trigonométrie rectiligne : tout le reste n'en est qu'une application & une dépendance ; comme on le verra dans les problèmes suivans. C'est pourquoi nous avons cru ne devoir rien négliger pour en rendre lumineuse & sensible la démonstration.

C'est d'après la théorie de ce théorème, qu'on a construit, une fois pour toutes, les fameuses *Tables des sinus*, qui sont la base de tous les grands calculs mathématiques & physico-mathématiques. Pour concevoir sur quels principes & en quelle manière elles ont été construites, & comment on pourroit les construire soi-même, si elles ne l'étoient pas ; il faut faire attention qu'en supposant le rayon d'un cercle quelconque, divisé en 10000000 de parties égales, par exemple ; on connoît ce rayon & son carré ; on connoît la corde de 60 degrés, qui étant égale au rayon (477), est aussi de 10000000 de parties ; on connoît aussi le diamètre, qui étant double du rayon, est de 20000000 de parties. Par ces trois choses connues, on trouvera dans un cercle, les cordes de tous les arcs de ce cercle, depuis une minute jusqu'à 90 degrés : les moitiés de ces cordes donnent tous les sinus des 45 premiers degrés de l'angle droit. (639.)

Après quoi, par les sinus connus des 45 premiers degrés, on trouve tous les sinus du reste de l'angle de complément, jusqu'à 90 degrés : on va voir comment.

PROBLÈME I.

653. *Connoissant la corde d'un arc, trouver la corde de son supplément. (fig. 100.)*

SOLUTION. Soit AB la corde connue : il s'agit de trouver la corde AF. Pour cela, je fais attention que l'angle FAB, formé par ces deux cordes, est un angle droit : puisqu'il est appuyé sur le diamètre FB (368). Je fais encore attention que si du point A je mène sur le diamètre la perpendiculaire AD; j'aurai par le rhéorème précédent $FB \times AD = AB \times FD + BD \times AF$. Je fais enfin attention que le côté AF est égal au côté DF, & que AV est égal à DV (407). Par conséquent, en place de $AB \times FD$, je puis prendre $AB \times AF$; & ce produit sera égal au produit de la diagonale FB qui est ici le diamètre, par la moitié AV de l'autre diagonale qui est ici perpendiculaire au diamètre.

Après ces observations, il est facile de résoudre le problème. Car dans le triangle AFBA, rectangle en A; si le rayon est de 100000 parties, le diamètre sera de 200000 parties. Or le quarré du diamètre FB, qui est ici l'hypothénuse, est égal au quarré des deux autres côtés AB & AF (517) : donc si du quarré du diamètre, on extrait le quarré de la corde connue AB; le reste sera le quarré de la corde AF. Par conséquent, si on extrait la racine quarrée de ce reste (129); cette racine quarrée exprimera la corde AF.

Si la corde connue AB est la corde d'un arc de 60 degrés, égale au rayon (477); la corde AF qu'on trouvera, sera la corde d'un arc de 120 degrés.

PROBLÈME II.

654. *Connoissant les cordes de deux arcs , trouver la corde qui soutient un arc égal à la somme de ces deux arcs pris ensemble. (fig. 100.)*

SOLUTION. Soient les arcs AB & BD , dont on connoisse les cordes AB & BD. Il s'agit de trouver la corde AVD , qui soutient la somme de ces deux arcs.

Pour cela , du point B , où aboutissent les deux cordes connues , menez le diamètre BF : menez aussi les deux cordes AF & DF , qui soutiennent les arcs de supplément. Après quoi , par le problème précédent , cherchez & trouvez la valeur des deux cordes AF & BF ; & alors vous connoîtrez les quatre côtés du quadrilatere ABDF.

Maintenant multipliez l'un par l'autre les côtés opposés de ce quadrilatere ; & ajoutez ensemble les deux produits ; la somme sera égale au produit des deux diagonales FB & AD. Par conséquent , si vous divisez cette somme par la diagonale FB , qui est un diamètre connu ; vous aurez un quotient qui sera la diagonale ou la corde cherchée AVD : car tout produit , divisé par une de ses racines , donne un quotient égal à l'autre racine.

Par exemple , connoissant que la corde de 30 degrés est de 51764 parties , & que la corde de 15 degrés est de 26106 parties ; on trouvera par la méthode de ce problème , que la corde de 45 degrés , qui soutient ces deux arcs , est de 76536 parties.

655. COROLLAIRE I. *Ayant la corde d'un arc , on trouvera par la même méthode , la corde d'un arc double.*

EXPLICATION. Si on connoît la corde d'un arc de 7 degrés & demi , on trouvera la corde d'un arc de 15 degrés. Ce n'est qu'une application du dernier problème , dans laquelle le calcul est plus court : parce

que dans ce cas , la corde AB devient égale à la corde AD ; & la corde AF , à la corde DF.

656. COROLLAIRE II. *Ayant la corde d'un arc , on pourra aussi trouver la corde d'un arc triple , ou d'un arc quadruple , ou d'un arc quintuple , & ainsi du reste.*

EXPLICATION. I°. Pour trouver la corde d'un arc triple , on cherchera d'abord celle d'un arc double. Ensuite connoissant la corde de l'arc double & celle de l'arc simple , on trouvera la corde de la somme de ces deux arcs : c'est la corde de l'arc triple.

II°. Pour l'arc quadruple , on cherchera d'abord la corde de l'arc double ; ensuite celle d'un arc qui soit double de celui dont on aura trouvé la corde ; la dernière corde trouvée fera celle de l'arc quadruple de l'arc simple.

III°. Pour l'arc quintuple , on cherchera la corde de l'arc double ; ensuite celle de l'arc triple , & enfin celle de la somme de ces deux arcs , dont l'un est double & l'autre triple : cette dernière corde fera celle d'un arc quintuple de l'arc simple. Tout cela suit évidemment du problème précédent.

P R O B L Ê M E I I I .

657. *Connoissant la corde d'un arc , trouver celle de la moitié de cet arc.* (fig. 100.)

SOLUTION. Soit AVD la corde connue de l'arc ABD : il s'agit de trouver la corde AB de la moitié de cet arc. Pour cela , du centre du cercle , que je suppose en C , je mene un diamètre AMB perpendiculaire à la corde donnée AVD ; ce diamètre divise & la corde AD & son arc ABD en deux parties égales (407). On a donc le triangle AVB , rectangle en V ; & la corde encore inconnue AB en est l'hypothénuse. Le carré de la corde AB est égal aux deux carrés des deux autres côtés AV & BV (517) : il s'agit donc de trouver la somme de ces deux derniers carrés. Or ,

I°. On connoît le côté AV, qui est la moitié de la corde donnée : il faut prendre le quarré de ce côté.

II°. On trouvera le côté BV en cette maniere. Ayant mené le rayon CA, on aura un autre triangle rectangle AVCA, dont le rayon CA = CB est l'hypothénuse. En extrayant du quarré du rayon CA le quarré du côté AV; on aura un reste, qui sera le quarré du côté CV. Si on extrait la racine quarrée de ce reste (129), on aura la partie CV du rayon : l'autre partie VB de ce même rayon, sera donc aussi connue.

III°. Ainsi dans le triangle rectangle AVBA, on connoît les deux côtés AV & BV : ces deux côtés étant élevés chacun à son quarré, leur somme sera égale au quarré de la corde AB qui est l'hypothénuse. Si on extrait la racine quarrée de cette somme, on aura donc la valeur de la corde AB, en parties égales à celles du rayon.

Par exemple, si la corde connue AB est la corde d'un arc de 60 degrés, égale à 100000 parties; on trouvera que la corde d'un arc de 30 degrés est de 51764 parties; que la corde d'un arc de 15 degrés est de 26106 parties; & ainsi du reste.

PROBLÈME IV.

658. Connoissant la corde d'un arc, trouver celle du tiers & de la cinquieme partie de cet arc. (fig. 101.)

SOLUTION. Soit la corde connue MN, égale à 180000 parties : il faut trouver la corde NK de l'arc NK, que je suppose être le tiers de l'arc NKM.

I°. Il est certain que la corde cherchée NK est un peu plus grande que le tiers de la corde MN : puisqu'il est évident que la somme des cordes MK + KN est plus grande que la corde MN. Pour trouver la corde KN, on prendra donc un nombre de parties un peu plus grand que le tiers du nombre qui exprime

la corde connue MN : cette corde MN étant supposée de 180000 parties, on prendra donc un nombre un peu plus grand que 60000 parties, qui est le tiers de la corde connue.

II°. On supposera la corde KN, égale au nombre qu'on aura pris au hasard un peu plus grand que le tiers de la corde connue ; & d'après cette supposition, on cherchera la corde connue elle-même, par la méthode du second corollaire précédent (656) : c'est-à-dire, qu'on cherchera la corde d'un arc triple de celui dont on a pris la corde au hasard.

Si le nombre de parties qu'on a supposé à la corde KN, donne précisément la corde connue MN ; il est clair que le nombre supposé est la vraie valeur de la corde KN qui se trouve toute connue.

III°. Mais si le nombre de parties qu'on a supposé à la corde KN, donne la corde connue MN un peu trop grande ou un peu trop petite ; il est clair qu'on a fait une *fausse supposition*, qu'il faudra réformer par cette proportion (274) : la fausse corde trouvée MN est à la corde supposée KN, comme la vraie corde connue MN, est à la vraie corde encore inconnue KN. Les trois premiers termes connus donneront le quatrième inconnu, qui exprimera la corde cherchée KN.

Cette proportion n'est pas parfaitement exacte : mais si le nombre de parties qu'on a d'abord supposé à la corde KN, & qu'on peut augmenter ou diminuer de tant d'unités qu'on voudra, ne donne enfin la corde MN qu'infiniment peu plus grande ou plus petite qu'elle n'est en réalité ; il n'y aura point d'erreur sensible dans l'application qu'on fera de cette proportion ou de cette règle de trois à de petits arcs. On ne s'en sert que pour trouver la corde d'un arc de 7 degrés 30 minutes, ou de quelque autre arc plus petit.

Au reste on peut toujours s'assurer si le nombre trouvé est effectivement la corde du tiers de l'arc dont

on connoît la corde ; on peut , dis-je , s'en assurer , en cherchant par le second corollaire précédent (656) , quelle est la corde d'un arc triple : car le nombre qu'on trouvera doit être le même que celui qui exprime la corde connue.

IV°. La même méthode qui fait *trouver la corde du tiers d'un arc* , fait aussi *trouver la corde du cinquieme de cet arc*. Pour trouver la corde de la cinquieme partie d'un arc , en supposant que l'on connoît la corde qui soutient tout cet arc , on prendra un nombre un peu plus grand què la cinquieme partie de la corde connue ; & d'après cette supposition , on cherchera la corde connue elle-même , comme dans l'exemple où il s'agit de trouver la corde du tiers de cet arc.

Par exemple , la corde de 76 degrés étant de 123132 parties , on trouvera que celle de 25 degrés 20 minutes , qui est le tiers de 76 degrés , contient 43856 parties ; & que celle de 15 degrés 12 minutes , qui est le cinquieme de 76 degrés , contient 26452 parties. On suppose toujours ici le rayon de 100000 parties.

659. APPLICATION. On peut aisément trouver , par les problèmes précédens , les cordes de tous les arcs ; depuis celui de deux minutes , jusqu'à celui de 90 degrés.

I°. La corde de 60 degrés est égale au rayon (477) , que je suppose de 100000 parties. On trouvera donc la corde de 30 degrés (657) : ensuite celle de 15 degrés ; enfin celle de 7 degrés 30 minutes.

II°. Quand on aura trouvé la corde 7 degrés 30 minutes ; on cherchera celle du tiers , c'est-à-dire , de 2 degrés 30 minutes. Ensuite on cherchera la corde de la cinquieme partie , qui est 30 minutes. Cette corde étant connue , on trouvera celle du tiers , ou de 10 minutes. La corde de 10 minutes donnera celle de 2 minutes , en cherchant la corde de la cinquieme partie de 10 minutes.

III°. On trouvera aussi , par les problèmes précédens , les cordes des arcs de 4 minutes , de 6 minutes , de 8 , de 12 , de 14 , de 16 , de 18 minutes , &c ainsi des autres arcs , de 2 minutes en 2 minutes , jusqu'à 90 degrés : les moitiés de toutes ces cordes , seront les sinus des 45 premiers degrés , de minute en minute. Or quand on aura les sinus des 45 premiers degrés ; on trouvera ceux de tous les autres degrés jusqu'à 90 , par le problème suivant.

PROBLÈME V.

660. Connoissant le sinus d'un arc , trouver son co-sinus , ou le sinus de son complément. (fig. 94.)

SOLUTION. En supposant que l'on connoît GH , sinus de l'arc GA ; il s'agit de trouver GL , sinus de l'arc GD complément de GA.

Dans le triangle rectangle CHG , on connoît deux côtés , savoir l'hypothénuse CG , qui est un rayon de 100000 parties , & le côté GH. Retranchez le carré de GH , du carré de CG : le reste sera le carré de CH. Extrayez la racine carrée de ce reste : vous aurez le côté CH , égal à GL sinus de l'arc GD , complément de l'arc GA.

Par exemple , étant donné le sinus d'un angle de 32 degrés ; vous pourrez trouver son co-sinus , ou le sinus de 58 degrés. Pour cela , du carré du rayon , soustrayez le carré du sinus connu : le reste , ou la différence , sera le carré du sinus de 58 degrés. Extrayez la racine carrée de ce reste : cette racine carrée exprimera le sinus cherché de l'angle de 58 degrés.

661. REMARQUE. C'est par cette méthode que l'on est venu à bout de trouver la valeur de tous les sinus des angles , depuis une minute jusqu'à 90 degrés. On en a fait des tables , connues sous le nom de *Tables des sinus* , que nous placerons à la fin de cet ouvrage. Nous

ferons enforte qu'elles aient toute l'exactitude que l'on peut desirer ; & nous ferons remarquer qu'il ne peut y avoir des fautes d'impression , sans qu'on les apperçoive tout de suite.

Il y a des tables des sinus, où le sinus total n'est supposé que de 100000 parties : il y en a d'autres où ce même sinus total est supposé de 10000000 de parties. Nous avons préféré celles-ci ; parce qu'elles donnent plus de précision dans les calculs, quand quelquefois on a besoin d'une extrême précision. Mais il est à propos d'avertir ici le lecteur, que dans les calculs ordinaires, on néglige *les deux derniers chiffres de chaque sinus*, séparés des chiffres précédens par un point intercalaire ; en observant simplement de donner une unité de plus au chiffre qui précède le point intercalaire, quand les deux derniers chiffres valent plus de 50. Par exemple, en cherchant le sinus de 10 degrés dans les tables, vous trouverez 17364.82 ; & vous prendrez pour sinus simplement 17365. En cherchant le sinus de 55 degrés, vous trouverez 81915.21 ; & vous prendrez simplement pour sinus 81915. Les chiffres qui suivent le point intercalaire, vaudroient un cent-millième du rayon, si leur valeur étoit 100 : mais comme ils valent toujours moins de 100, ils valent toujours moins d'un cent-millième du rayon. Quand ces deux derniers chiffres valent plus de 50, en ajoutant une unité au chiffre qui les précède, on rend le nombre qu'on prend pour sinus, plus approchant de la valeur du sinus exact. (*fig. 94.*)

On voit par la théorie que nous venons de donner sur l'art de trouver les sinus de tous les angles & d'en construire des tables ; que ces tables des sinus doivent exprimer & expriment réellement les rapports qu'ont entre elles & avec le rayon, dans un cercle quelconque, les lignes DC, EF, GH, perpendiculaires au rayon CA : ces lignes sont les sinus des différens arcs,

Si la ligne ou le sinus GH est égal à la moitié du rayon , qu'on suppose de 10000000 de parties ; cette ligne ou ce sinus GH répondra dans les tables à un nombre de 5000000 de parties : & ainsi du reste.

La différence du sinus GH au sinus EF , est fort considérable : parce que les lignes HF & GE , qui les terminent , sont fort divergentes. La différence entre le sinus EF & le sinus DC , est beaucoup moindre : parce que les lignes FC & ED , qui les terminent , approchent beaucoup plus du parallélisme.

PROBLÈME VI.

662. *Trouver le sinus verse d'un arc donné. (fig. 94.)*

SOLUTION. Le sinus verse d'un arc quelconque GA, est la partie HA du rayon , interceptée entre le sinus droit & la circonférence (635) ; & la valeur de ce sinus verse est le rayon moins le sinus de l'arc de complément. (638.)

Ainsi étant donné un arc AG ; cherchez le sinus GL de son complément GD , dans les tables des sinus : vous aurez $GL = HC$ (660). Par conséquent , du rayon entier CA , extrayez le sinus trouvé $GL = HC$: le reste de la somme exprimera le sinus verse HA.

Par exemple , étant donné l'arc AG de 36 degrés 20 minutes ; le sinus GL de son complément GD est de 80558 parties. Extrayez du sinus total AC égal à 100000 parties , ce nombre 80558 parties : le reste 19442 parties sera le sinus verse HA. On néglige les deux chiffres qui suivent le point intercalaire (661). Le complément GD est de 53 degrés 40 minutes.

PROBLÈME VII.

663. *Trouver à infiniment peu près , par la théorie des cordes , le rapport du diamètre à la circonférence d'un cercle quelconque. (fig. 69.)*

SOLUTION. Nous avons observé dans la planimétrie, que la solution du fameux problème de la quadrature du cercle, consisteroit à trouver un rapport exact & parfait entre le diamètre & la circonférence (483) : que les plus profonds mathématiciens n'ont jamais pu le trouver ce rapport exact & parfait ; mais que les rapports approchans trouvés par Archimède & par Mélius, & adoptés par tous les Mathématiciens, sont suffisans pour donner toute la précision que l'on peut espérer d'atteindre dans la pratique (479). Pour satisfaire la curiosité, nous allons indiquer ici comment & par quelle méthode, on a pu découvrir ces rapports approchans du vrai rapport.

I°. Il est évident qu'on peut *inscrire un polygone régulier* de tant de côtés que l'on voudra, à un cercle ABDRA ; & que plus le polygone aura de côtés, plus son périmètre se rapprochera de la circonférence du cercle : que si le polygone avoit une infinité de côtés, son périmètre seroit confondu avec la circonférence du cercle : mais que tant que le polygone sera d'un nombre fini de côtés, son périmètre sera moindre que la circonférence circonscrite ; chaque arc étant plus grand que sa corde, qui est une ligne droite, & qui est un des côtés du polygone inscrit.

II°. Le côté de l'exagone régulier inscrit dans un cercle, est égal au rayon de ce cercle (477) : on connoît donc le rapport du rayon avec le côté de l'exagone. Le côté de l'exagone est la corde d'un arc de 60 degrés : cette corde d'un arc de 60 degrés fera trouver la corde de la moitié de cet arc ou la corde d'un arc de 30 degrés (657), laquelle sera le côté d'un dodéca-gone. La corde d'un arc de 30 degrés, fera trouver la corde d'un arc de 15 degrés, laquelle sera le côté d'un polygone de 24 côtés. On trouvera en suivant la même méthode, le côté d'un polygone de 48, de 96, de 192, de 384 côtés ; & ainsi de suite à l'infini. On con-

noît

montrera donc le rayon & le côté d'un polygone régulier inscrit, par exemple, de 384 côtés.

III°. Quand dans le calcul on aura donné assez de côtés au polygone régulier inscrit, pour juger que ses côtés se confondent sensiblement avec la circonférence du cercle; on pourra prendre, sans erreur sensible, le périmètre du polygone pour la circonférence du cercle. Ainsi ayant supposé le rayon connu, divisé en 100000 ou en 10000000 parties égales; on multipliera le nombre des mêmes parties qui expriment le côté trouvé, par le nombre des côtés qu'a le polygone inscrit: le produit donnera le périmètre de ce polygone, exprimé en parties égales à celles du rayon. On verra donc quel rapport a ce périmètre avec le rayon; & par-là même avec le diamètre du cercle: & ce rapport pourra être pris, sans erreur sensible, pour le vrai rapport de la circonférence au rayon ou au diamètre.

Ce rapport trouvé entre le diamètre & la circonférence d'un cercle quelconque dont le rayon étoit connu, sera le rapport qui se trouve entre le diamètre & la circonférence de tous les cercles possibles: parce que dans tous les cercles possibles, les circonférences sont entre elles comme les rayons & comme les diamètres. (473.)

700. REMARQUE. On peut aussi, pour parvenir au même but, employer le polygone régulier, circonscrit au cercle *abdra*, dont le rayon est donné. (fig. 69.)

Il est évident que le périmètre d'un tel polygone circonscrit, par la multiplication de ses côtés, se confondroit à la fin sensiblement avec la circonférence inscrite. Le côté quelconque *MbN* d'un polygone régulier circonscrit, divisé en deux parties égales par le rayon *Cb*, se transforme en deux tangentes *bM*, *bN*. Or comme on trouve les tangentes de tous les arcs (723)

M m

on peut trouver le côté d'un polygone régulier circonscrit de tant de côtés que l'on voudra ; & la somme de tous ces côtés , sera le périmètre de ce polygone.

Comparant ensuite le rapport du rayon avec le *périmètre circonscrit* qui est trop grand , & le rapport du même rayon avec le *périmètre inscrit* qui est trop petit ; on pourra déterminer avec la plus grande précision , non peut-être quel est le vrai rapport , mais entre quels termes se trouve le *vrai rapport* du rayon & du diamètre à la circonférence.

Archimède , en cherchant le rapport du diamètre à la circonférence , n'a employé que des polygones inscrits & circonscrits de 96 côtés : Mélius & Ludolphe de Ceulen ont employé des polygones inscrits & circonscrits , d'un plus grand nombre de côtés : ce qui a plus rapproché les périmètres des polygones vers la circonférence inscrite ou circonscrite. De-là un peu plus d'exactitude & de précision dans les rapports donnés par ces deux derniers. (479.)

PARAGRAPHE SECONDE.

USAGE DES SINUS.

THÉORÈME.

701. *DANS tout triangle , les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles. (fig. 95.)*

DÉMONSTRATION. Les moitiés sont proportionnelles aux tous : or les sinus des angles sont les moitiés des côtés opposés. Car si l'on inscrit dans un cercle un triangle quelconque ABC , ce qui est toujours possible ; les trois côtés deviennent trois cordes , dont les moitiés sont les sinus des angles opposés (639). Donc le sinus de l'angle A est la moitié de la corde BC : le sinus

de l'angle C est la moitié de la corde AB : le sinus de l'angle B est la moitié de la corde AC. Donc chaque sinus est proportionnel au côté opposé. C. Q. E. D.

PROBLÈME I.

701. Etant donnés deux angles & un côté d'un triangle quelconque ABC, trouver les deux côtés inconnus, (fig. 95.)

SOLUTION. I°. Deux angles étant connus, on aura le troisième angle, qui est le supplément des deux autres à 180 degrés. (387.)

II°. Un côté quelconque BC étant connu, ainsi bien que les trois angles; on connoîtra le côté AC, par cette proportion: le sinus connu de l'angle A, ou par abréviation S-A, est au côté opposé BC connu; comme le sinus connu de l'angle B, est au côté opposé AC inconnu. On connoîtra de même le côté AB, par cette autre proportion: le sinus connu de l'angle A, est au côté opposé BC connu; comme le sinus connu de l'angle C, est au côté opposé AB inconnu (701). On exprime ces proportions, dans lesquelles entrent les sinus, en cette manière:

S-A. BC :: S-B. AC: ou *altern.* S-A. S-B :: BC. AC
S-A. BC :: S-C. AB: ou *altern.* S-A. S-C :: BC. AB.

III°. Si on suppose l'angle B, de 45 degrés 34 minutes; & l'angle C, de 71 degrés 42 minutes; l'angle A inconnu sera de 64 degrés 34 minutes. Si on suppose aussi le côté connu BC, de 1160 toises; en prenant les sinus des angles A & C, dans les tables, la première proportion S-A. BC :: S-B. AC, se réduira à celle-ci: 89021, 2160 :: 94943. x.

Le premier terme 89021 est le sinus de l'angle A: le second terme 2160 est le côté BC: le troisième terme 94943 est le sinus de l'angle C: le quatrième terme x représente le côté AB inconnu, qu'il faut

chercher par la règle de trois. Or en faisant cette règle, on trouve pour quotient presque 2304 : ainsi le côté AB contient environ 2304 toises. On voit par-là comment il faudra s'y prendre pour trouver l'autre côté AC. On néglige dans les tables des sinus, les chiffres qui suivent le point.

703. REMARQUE. Si l'un des trois angles étoit obtus, par exemple, de 125 degrés & 30 minutes, on ne trouveroit pas cet angle dans les tables des sinus. Pour avoir le sinus de cet angle obtus, il faudra chercher son supplément qui est l'angle de 54 degrés & 30 minutes ; & prendre le sinus de cet angle de 54 degrés & 30 minutes, lequel a le même sinus que l'angle dont il est supplément, ou que l'angle de 125 degrés & 30 minutes ; comme on l'a fait voir ailleurs. (636.)

On mettra donc le sinus de l'angle de 54 degrés & 30 minutes dans la proportion, à la place de l'angle de 125 degrés & 30 minutes ; & le résultat donnera également le rapport des côtés, en parties du rayon du cercle circonscrit au triangle, & par-là même en parties d'un des côtés connus du triangle. Par exemple (fig. 96),

Supposons que dans le triangle CAB, l'angle A soit de 125 degrés & 30 minutes ; l'angle C, de 20 degrés & 46 minutes ; & que la base ou le côté connu AB, soit de 200 toises. On aura cette proportion : $SAC : AB :: S-A : CB$; & en chiffres, $35456 : 200 :: 81412 : x$ (661). En divisant le produit des deux moyens par le premier extrême, vous aurez un quotient qui exprimera en toises le côté inconnu CB.

P R O B L È M E I I.

704. Trouver la surface d'un triangle, dont on connaît les trois angles & les trois côtés.

SOLUTION. 1°. Si le triangle est rectangle (fig. 83) ;

les deux côtés AB & BC qui forment l'angle droit, sont la base & la hauteur de ce triangle : multipliez l'une par la moitié de l'autre ; & le produit donnera la surface cherchée. (448.)

II°. Si le triangle n'est pas rectangle (fig. 98) ; du sommet du plus grand angle, abaissez par la pensée une perpendiculaire BD sur le côté opposé : elle divisera le triangle donné en deux triangles rectangles, tels que le précédent. Vous trouverez la valeur de cette perpendiculaire BD, par cette proportion : S-D. AB :: S-A . BD. La perpendiculaire BD & la base AC étant connues, multipliez l'une par la moitié de l'autre : le produit donnera la surface cherchée.

On connoît facilement quel est le plus grand angle d'un triangle dont les côtés sont connus : parce que le plus grand angle est opposé au plus grand côté (389). Si le triangle étoit équilatéral, on peut abaisser la perpendiculaire, du sommet d'un angle quelconque, sur le côté opposé.

PROBLÈME III.

705. Etant donnés deux côtés d'un triangle, & l'angle compris entre ces deux côtés ; trouver le troisième côté inconnu.

SOLUTION. L'angle donné & compris entre les côtés donnés, est ou droit, ou aigu, ou obtus.

I°. Si l'angle B donné & compris entre les côtés donnés, est droit (fig. 83) ; le côté opposé & inconnu AC est l'hypothénuse, dont le carré est égal aux deux carrés des côtés donnés (317). Prenez donc la somme des carrés des côtés donnés AB, BC ; & extrayez-en la racine : cette racine donnera le côté cherché AC.

II°. Si l'angle A donné & compris entre les côtés donnés, est aigu (fig. 98) ; du sommet du plus grand

des angles inconnus, j'abaisse la perpendiculaire BD sur le côté opposé : ce qui donne le triangle rectangle BDA, dont on connoîtra le côté ou la perpendiculaire BD, par cette proportion, dans laquelle les trois premiers termes sont connus : $S-D . AB :: S-A . BD$.

Après quoi, si du carré de l'hypothénuse BA, on extrait le carré du côté BD; le reste sera le carré du segment AD, dont il faut extraire la racine, laquelle exprimera la grandeur du côté AD.

Le segment AD est donc connu; le côté AC est connu par la supposition: donc si je retranche AD de AC, il me reste DC connu. Dans le petit triangle rectangle BDC, je connois donc le côté DC, aussi bien que le côté BD: la somme de leurs carrés est égale au carré de l'hypothénuse BC: donc, si j'en extrais la racine, j'aurai le côté BC connu.

III°. Si l'angle A donné & compris entre les côtés donnés, est obtus (fig. 96); je prolonge BA autant qu'il le faut, pour que CD lui soit perpendiculaire. Or dans le triangle rectangle ACD, je connois le côté AC, qui est donné; l'angle D, qui est droit; l'angle DAC, qui est le supplément de l'angle BAC donné (342); & par conséquent le troisième angle DCA, qui est supplément à deux angles droits: donc je connoîtrai les deux côtés DA, DC. (702.)

Maintenant, si j'ajoute le côté trouvé DA, au côté donné BA; j'aurai le côté BD connu. Ainsi dans le triangle rectangle DBC, je connois BD & DC, & par conséquent l'hypothénuse BC, par ce qui vient d'être dit au premier cas de ce problème.

PROBLÈME IV.

706. Etant donnés les deux côtés d'un triangle, & l'angle compris entre ces deux côtés; trouver la surface du triangle.

SOLUTION. I°. Dans le premier cas (705), on a la hauteur AB & la base BC : donc on a la surface qui est le produit de l'une par la moitié de l'autre. (*fig. 83.*)

II°. Dans le second cas, on a la base donnée AC ; & on a trouvé la hauteur BD : donc on aura encore la surface. (*fig. 98.*)

III°. Dans le troisième cas (*fig. 96*), j'aurai la surface du triangle ACB ; en multipliant le côté AB que je prends pour base, par la moitié de la perpendiculaire CD trouvée. (448. II°.)

PROBLÈME V.

707. *Etant donnés les côtés d'un triangle & un des angles ; trouver les deux autres angles.* (*fig. 96.*)

SOLUTION. Soit un triangle quelconque ACB, dont on ait donné ou dont on ait trouvé les trois côtés, & dans lequel on connoisse un angle quelconque A.

Supposons l'angle A de 125 degrés ; le côté AB de 1000 toises ; le côté AC, de 1850 toises ; le côté CB, de 2428 toises. Comme l'angle obtus A n'a point de sinus par lui-même ; on lui donnera pour sinus, le sinus de son supplément, ou le sinus de l'angle de 55 degrés. (636.)

I°. Observez d'abord que puisque les sinus connus sont proportionnels aux côtés opposés, connus ou inconnus (701) ; de même les côtés connus sont proportionnels aux sinus des angles opposés, connus ou inconnus. Vous aurez donc ces proportions, qui vous feront trouver les sinus inconnus des angles C ou B....
 $S-C . AB :: S-A . CB$: ou $x \cdot 1000 :: 70711 . 2428$;
 $S-B . AC :: S-A . CB$: ou $x \cdot 1850 :: 70711 . 2428$.

Ainsi, en divisant le produit des moyens connus, par le dernier extrême connu, vous aurez un quotient

Mm iv

qui exprimera le sinus de l'angle quelconque inconnu C.

II°. Observez encore, que les sinus des angles vont en croissant dans les tables des sinus, depuis zero jusqu'à 10000000 : cherchez donc dans cette suite croissante de nombres, le quotient trouvé ; & l'angle que marquera ce quotient ou ce *sinus trouvé*, sera l'angle que vous cherchez.

Par exemple, le quotient trouvé pour le sinus de l'angle inconnu C, étant 17168 plus une fraction qu'on néglige ; vous trouverez que ce nombre approche le plus dans les tables des sinus, du nombre 17164 qui est le sinus de l'angle de 9 degrés 53 minutes (661). Ainsi l'angle C sera un angle de 9 degrés 53 minutes, plus une fraction de minute que l'on néglige, ou que l'on évalue par un à-peu près.

III°. Observez enfin qu'ayant trouvé l'un des deux angles inconnus C, l'autre angle inconnu B est tout trouvé : puisque cet angle inconnu B est le supplément à l'angle donné A & à l'angle trouvé C. (386.)

DES LOGARITHMES.

708. OBSERVATION. On sait que l'addition & la soustraction sont des opérations plus simples & plus faciles que la multiplication & la division. On fait pareillement que la multiplication & la division sont un calcul moins composé & moins pénible, que l'exaltation & l'extraction. Il seroit donc très-avantageux de trouver une méthode qui pût changer en additions & en soustractions, toutes les especes de multiplications & de divisions ; & l'on voit qu'une pareille méthode simplifieroit beaucoup les opérations du calcul.

Or cette méthode a été trouvée par le fameux Nepper, géometre Ecossois ; lequel a donné l'art de substituer des nombres artificiels, à la place des nombres

ordinaires ; pour faire sur ces nombres artificiels , par voie d'addition & de soustraction , ce qu'il faudroit faire sur les nombres ordinaires , par voie de multiplication & de division. Ces nombres artificiels , substitués aux nombres naturels , sont ce que l'on appelle *logarithmes* ; & l'usage qu'on en fait , s'appelle *calcul logarithmique*.

Les logarithmes sont des nombres en proportion arithmétique , correspondans à d'autres nombres qui sont en proportion géométrique. Par leur moyen , les multiplications & les divisions qu'il faut faire pour trouver les côtés ou les sinus des angles , dans un triangle à résoudre en lui-même , se convertissent en simples additions & soustractions ; & le calcul devient très-aisé & très-court.

Les personnes qui sont obligées de faire fréquemment de grands calculs trigonométriques , ne peuvent guère se dispenser d'avoir des tables des logarithmes. Elles trouveront dans la théorie qui les précède & qui en explique les principes & l'usage , tout ce qui concerne cette espece de calcul , l'une des plus belles inventions des mathématiques modernes.

Mais il y a aussi une infinité de personnes , qui éclairées & versées dans l'étude des mathématiques & de la physique , sans être géometres & astronomes de profession , peuvent se dispenser aisément des tables des logarithmes , & trouver dans les simples tables des sinus , de quoi satisfaire leur curiosité ; quand elles veulent quelquefois se donner le plaisir de résoudre quelque triangle par la méthode trigonométrique. Il leur en coûtera un quart d'heure de tems de plus : mais elles seront dispensées de se procurer ces tables des logarithmes , & de se donner la peine d'apprendre à en faire usage.

PARAGRAPHE TROISIEME

SINUS DES SECONDES.

709. OBSERVATION. **L**ES tables des sinus ne contiennent que les sinus des degrés & des minutes, sans faire aucune mention des sinus des secondes. Pour simplifier en tout les connoissances humaines, nous avons imaginé une *méthode simple & facile*, qui apprend à transformer les sinus de ces tables, en *sinus des secondes*, dont on a besoin pour quelques calculs astronomiques.

Voici & les principes & la maniere de cette transformation, dont nous ne devons l'idée à personne.

THÉORÈME I.

710. *Dans un cercle, les arcs de deux minutes, & tous les arcs plus petits, se confondent équivalement avec leurs cordes. (fig. 69.)*

DÉMONSTRATION. 1°. Si dans un même cercle, on inscrit successivement des polygones réguliers de 6 côtés, de 12 côtés, de 24 côtés, de 48 côtés, de 96 côtés; ou conçoit que les côtés MN, MB, Mx, s'approchent d'autant plus de l'arc qu'ils soutiennent & dont ils sont les cordes, que le polygone a plus de côtés. Donc en augmentant successivement le nombre des côtés du polygone inscrit, on parviendra à rendre les côtés Mx du polygone, équivalement égaux aux arcs Mx qu'ils soutiennent: en sorte que ces côtés qui sont des cordes, ne différeront des arcs qu'ils soutiennent, que d'une quantité infiniment petite, qu'on pourra négliger sans crainte d'aucune erreur sensible.

Par exemple, la corde MB est le côté d'un dodéca-

gone : la corde Mx est le côté d'un polygone de 24 côtés : la corde du quart de l'arc Mx sera le côté d'un polygone de 96 côtés. Or si la corde Mx paroît déjà se confondre avec son arc, il est clair que la corde d'un arc quatre fois plus petit, ne différera plus de son arc que d'une quantité infiniment petite ; & qu'on pourra sans erreur sensible, prendre la corde pour l'arc, & l'arc pour la corde.

II°. Archimede, en cherchant le rapport du diamètre à la circonférence d'un cercle (663), a trouvé que dans un polygone régulier de 96 côtés inscrit au cercle, les côtés se confondent déjà équivalement avec les arcs qu'ils soutiennent : en sorte que la différence des cordes & des arcs est déjà assez petite, pour qu'on puisse la négliger dans les calculs ; quand les circonférences ne sont pas bien grandes.

Si on veut se donner la peine de chercher la corde de la moitié d'un arc soutenu par le côté d'un polygone régulier de 96 côtés ; on trouvera (657) que cette corde, prise deux fois, n'excede que comme infiniment peu la corde de l'arc entier. Car si le côté d'un polygone régulier de 96 côtés, est d'une toise ; les deux côtés qui répondront au même arc dans un polygone qui aura le double de côtés, ne seront, étant réunis en une même somme, que d'une toise plus environ la trois mille deux cents cinquante-huitième partie d'une toise, qui ne fait pas le quart d'une ligne.

III°. Le côté d'un polygone régulier de 96 côtés, est une corde qui soutient un arc de 3 degrés & 45 minutes. Or si une telle corde se confond déjà équivalement avec son arc, en telle sorte qu'on puisse prendre l'arc pour la corde, & la corde pour l'arc ; à combien plus forte raison, une corde qui soutient un arc de deux minutes, & qui se rapproche bien davantage de son arc, se confondra-t-elle équivalement avec cet arc : puisqu'une telle corde est le côté d'un

polygone régulier de 10800 côtés, inscrit au cercle?
C. Q. F. D.

711. COROLLAIRE. *Dans un cercle, les arcs d'une minute, & tous les arcs plus petits, se confondent équivalement avec leurs sinus; en telle sorte qu'on puisse prendre les sinus pour les arcs, & les arcs pour les sinus.*

DÉMONSTRATION. I°. Dans un cercle, un sinus d'une minute est la moitié d'une corde d'un arc de deux minutes (639) : or la corde d'un arc de deux minutes, se confond équivalement avec son arc; comme on vient de l'expliquer & de le démontrer : donc la moitié de cette corde, qui est le sinus d'un arc d'une minute, se confond aussi équivalement avec son arc; en telle sorte qu'on puisse prendre sans aucune erreur sensible, l'arc pour le sinus, & le sinus pour l'arc.

II°. On peut observer dans les tables des sinus, que dans tous les arcs qui sont au-dessous de 12 minutes, les sinus, trouvés par le calcul le plus rigoureux, sont déjà entre eux comme leurs arcs : par exemple, que le sinus d'un arc de 2 minutes, est au sinus d'un arc de 4 minutes; comme l'arc de 2 minutes est à l'arc de 4 minutes; & ainsi du reste jusqu'à 12 minutes : au-delà les sinus cessent d'être en proportion avec leurs arcs (644). Les sinus seront donc également & à plus forte raison entre eux comme leurs arcs, dans les arcs moindres que ceux d'une minute, dans les arcs des secondes & des tierces.

On aura donc cette proportion : le sinus d'un arc d'une minute, est au sinus d'un arc d'une demi-minute ou de 30 secondes; comme un arc d'une minute est à un arc de 30 secondes; comme un arc de 30 secondes, est à un arc de 15 secondes; & ainsi de suite (fig. 94.)

III°. Si l'arc GA est un arc d'une minute, ou un arc encore plus petit, la ligne AG est une ligne sensé-

blement & équivalement droite; & alors les deux triangles GHA & nmA sont deux triangles semblables, qui donnent cette proportion : $GH . nm :: GA . nA$; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

712. REMARQUE. Cette dernière proportion n'est pas parfaitement exacte dans toute la rigueur géométrique : parce que l'arc d'une minute excède réellement son sinus d'une quantité infiniment petite; & que cet excès de l'arc d'une minute sur son sinus, est proportionnellement un peu plus grand que l'excès de l'arc de 30 secondes sur son sinus qui se rapproche plus de l'arc. Mais le défaut de parfaite exactitude dans cette proportion n'étant que d'une quantité infiniment petite & inassignable en parties du rayon, on peut la négliger sans aucune erreur sensible (238). On peut par conséquent regarder cette proportion comme parfaitement exacte dans la pratique.

J'ai dit que le défaut de parfaite exactitude dans cette proportion, n'est qu'une quantité infiniment petite & inassignable en parties du rayon. La preuve en est, que le rayon étant supposé de 10000000 parties, le sinus d'une minute, pris deux fois, est en nombres ronds, de 5818 parties du rayon, aussi bien que le sinus de deux minutes : que le sinus de deux minutes, pris deux fois, est en nombres ronds, de 11636 parties du rayon, aussi bien que le sinus de quatre minutes. Donc dans tous les sinus, depuis une minute jusqu'à 12 minutes le défaut de proportion n'est pas un dix-millionième du rayon : puisque si cela étoit, le sinus d'une minute, pris deux fois, seroit plus grand au moins d'une unité, que le sinus de deux minutes; & le sinus de deux minutes, pris deux fois, plus grand au moins d'une unité, que le sinus de quatre minutes.

Or si le défaut de parfaite exactitude dans cette proportion, défaut moindre qu'un dix-millionième du rayon, est inassignable en parties du rayon; dans

tous les arcs qui sont au-dessous de 12 minutes ; combien plus inassignable en parties du rayon , ne sera-t-il pas dans les arcs moindres que l'arc d'une minute , dans les arcs des secondes & des tierces. On pourra donc toujours , dans ces arcs des secondes & des tierces , prendre l'arc pour le sinus & le sinus pour l'arc , sans aucune erreur assignable en parties du rayon.

THÉORÈME II.

713. *On peut mettre un même nombre de zéros à la fin de tous les sinus à la fois , sans changer leur rapport.*

DÉMONSTRATION. Mettre un même nombre de zéros à la fin de tous les sinus à la fois , c'est les multiplier tous par une même quantité : par exemple , mettre un zero à la fin de tous les sinus , c'est les multiplier tous par 10 : y mettre deux zéros , c'est les multiplier tous par 100 : y mettre trois zéros , c'est les multiplier tous par 1000 ; & ainsi du reste (42). Or , quand on multiplie deux ou plusieurs nombres par une même quantité quelconque , on ne change point leur rapport : les produits sont entre eux , comme étoient entre elles les racines , ou les nombres eux-mêmes , avant la multiplication. (164.)

Par exemple , dans les tables des sinus , le sinus total est de 10000000 parties ; & le sinus de 30 degrés , est de 5000000 parties : l'un est double de l'autre. Ajoutons deux zéros à tous les sinus : ce qui est la même chose que si on les multiplioit tous par 100. Le sinus total sera de 1000000000 parties ; & le sinus de 30 degrés , sera de 500000000 parties : l'un sera encore double de l'autre ; & leur même rapport reste. On peut dire la même chose de tous les autres sinus. C. Q. F. D.

714. COROLLAIRE. Il résulte de ces deux théo-

rêmes, qu'on aura les sinus des secondes, en supposant sous les sinus augmentés de deux zéros, & en divisant le sinus d'une minute en des parties correspondantes à des secondes.

Par exemple, le sinus d'un angle ou d'un arc d'une minute étant de 290900 parties; la moitié de ce nombre sera le sinus d'un angle ou d'un arc d'une demi-minute, ou de 30 secondes (711); le quart de ce nombre sera le sinus d'un angle ou d'un arc de 15 secondes; la soixantième partie de ce nombre sera le sinus d'un angle ou d'un arc d'une seconde; la cent-vingtième partie de ce nombre sera le sinus d'un angle ou d'un arc d'une demi-seconde ou de 30 tierces; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

THÉORÈME III.

715. Si on retranche un même nombre d'unités, à deux nombres inégaux; on diminue proportionnellement le moindre nombre, plus que le nombre plus grand.

DÉMONSTRATION. Soient deux nombres inégaux 20 & 20000, qui sont entre eux comme 1 à 1000. Si on retranche 10 unités à chacun de ces deux nombres, les restes seront 10 & 19990: le premier aura perdu la moitié de sa valeur; tandis que le second n'aura perdu que la deux-millième partie de la sienne. C. Q. F. D.

THÉORÈME IV.

716. Quand la différence de deux nombres est immensément grande, si on retranche un certain nombre d'unités au nombre plus grand, sans rien retrancher au nombre plus petit; le même rapport reste à très-peu près entre ces deux nombres.

DÉMONSTRATION. Soient les deux nombres 2909

qui est le sinus d'une minute ; & 29090000 , qui est dix mille fois plus grand : le rapport de ces deux nombres est celui de 1 à 10000.

Si on retranche au nombre plus grand , 50 unités ; le reste sera 29089950. Or le rapport de 2909 à 29089950 , rapport qu'on trouvera en divisant séparément ces deux nombres par un même nombre 2909 , est le rapport de 1 à 9999 + $\frac{1819}{2909}$, rapport égal , à infiniment peu près , à celui de 1 à 10000 : de sorte que ces deux rapports ne diffèrent que comme infiniment peu l'un de l'autre , & que l'on peut prendre l'un pour l'autre sans aucune erreur sensible. C. Q. F. D.

P R O B L È M E I.

717. *Construire une table des sinus des secondes.*

SOLUTION. I°. Dans des tables des sinus , ou le sinus total sera supposé de 10000000 parties , je prends le sinus de l'arc d'une minute : ce sinus est de 2909 parties , donc chacune est un dix-millionième du rayon.

II°. Je suppose tous les sinus , tels qu'ils sont dans les tables qui terminent cet ouvrage , suivis de deux zeros placés à la fin de leur dernier chiffre : ces sinus , suivis de deux zeros , conserveront entre eux leur même rapport. (713.)

III°. Je prends le sinus d'une minute , augmenté de deux zeros ; & je divise ce sinus 290900 proportionnellement à son arc. La moitié de ce sinus , ou la moitié de 290900 me donne le sinus de l'arc de 30 secondes : le quart de 290900 me donne le sinus de l'arc de 15 secondes : la soixantième partie de 290900 me donne le sinus de l'arc d'une seconde : la cent-vingtième partie de 290900 me donne le sinus de l'arc de 30 tierces ; & ainsi du reste (714). Ainsi en divisant successivement 290900 , par 2 , par 4 , par 60 , par 120 , j'aurai des quotiens qui exprimeront les sinus de

30 secondes, de 15 secondes, d'une seconde, de 30 tierces; & ainsi de suite. Ces sinus seront proportionnels aux sinus des tables augmentés ou suivis de deux zeros. (713.)

IV°. D'après ces principes évidens, a été construite la table suivante des sinus des secondes, depuis une seconde jusqu'à 60 secondes qui font une minute. Dans cette table, le sinus total est supposé de 100000000 parties : en supposant tous les sinus des tables, suivis de deux zeros, leur sinus total sera aussi de 1000000000 parties. Dans ce problème & dans le suivant, l'on prend tous les chiffres de chaque sinus, même ceux qui suivent le point intercalaire; & on leur ajoute à tous, deux zeros à la fin.

P R O B L Ê M E.

718. Résoudre un triangle, dont on connoisse un côté, un angle de quelques secondes, & un autre angle. (fig. 102.)

SOLUTION. Ce problème sert principalement à résoudre des triangles parallaxiques, dont nous parlons dans la partie astronomique de notre Physique, & à faire trouver la distance des différentes planetes à la terre. (Phy. 1221.)

Soit un triangle ACB, dont on connoisse l'angle A & l'angle B, avec le côté AC que je suppose de 1430 lieues communes de France. Que l'angle A soit droit; & l'angle B, de 10 secondes & 30 tierces : l'angle C, supplément à deux angles droits, fera de 89 degrés 59 minutes 49 secondes & demie (387). Pour trouver l'un des côtés inconnus, par exemple, le côté BC, on fera cette proportion : le sinus connu de l'angle B, est au côté opposé & connu AC; comme le sinus connu de l'angle A, est au côté opposé & inconnu CB. (702.)

I°. Pour avoir le sinus de l'angle B, il faut prendre

N^a

TABLE DES SINUS DES SECONDES.

Secondes.	Sinus.	Second.	Sinus.
1	4848.	36	174540.
2	9697.	37	179388.
3	14545.	38	184237.
4	19393.	39	189085.
5	24242.	40	193933.
6	29090.	41	198782.
7	33938.	42	203630.
8	38787.	43	208478.
9	43635.	44	213327.
10	48483.	45	218175.
11	53332.	46	223023.
12	58180.	47	227872.
13	63028.	48	232720.
14	67877.	49	237568.
15	72725.	50	242417.
16	77573.	51	247265.
17	82422.	52	252113.
18	87270.	53	256962.
19	92118.	54	261810.
20	96967.	55	266658.
21	101815.	56	271507.
22	106663.	57	276355.
23	111512.	58	281203.
24	116360.	59	286052.
25	121208.	60	290900.
26	126057.	<i>Sinus de 2 minutes,</i> 581800. <i>Sinus de 85 degrés,</i> 996194700. <i>Sinus total,</i> 1000000000. <i>Sinus de 30 tierces,</i> 2424.	
27	130905.		
28	135753.		
29	140602.		
30	145450.		
31	150298.		
32	155147.		
33	159995.		
34	164843.		
35	169692.		

dans la table précédente le sinus de 10 secondes, plus la moitié du sinus d'une seconde : ces deux sommes 48483 + 2424, réunies en une même somme, font le sinus de l'angle B, sinus égal à 50907 parties du rayon.

II°. Le sinus de l'angle droit A, est de 1000000000 parties, selon la table précédente. Ainsi, ayant le sinus des deux angles B & A, on fera en chiffres la proportion que nous avons annoncée : 50907 . 14307 : 1000000000 . x.

En divisant le produit 1430000000000 des deux moyens, par le premier extrême, on aura un quotient 28090439, plus une fraction qu'on néglige, lequel exprimera la grandeur du côté CB, ou le nombre de lieues communes qu'il contient. Telle est la méthode par laquelle on peut trouver la distance d'un astre au centre de la terre, par exemple, du soleil, quand on connoît l'angle B qui est l'angle de sa parallaxe horizontale. (*Phy.* 1216 & 1221.)

III°. Pour trouver l'autre côté BA, il faut faire cette proportion entre les sinus & les côtés ; S — B. AC : 1 S — C. AB. Or pour avoir le sinus C, il faut prendre dans les tables, le sinus de 89 degrés 59 minutes ; & mettre deux zeros à la fin de tous les chiffres de ce sinus : on aura pour ce sinus, 999999900 parties. Il manque à ce sinus, pour être le sinus exact de 89 degrés 59 minutes 49 secondes & demi, environ 50 unités. Mais on peut se dispenser d'ajouter à ce sinus & à tout autre sinus semblable, ce petit nombre d'unités : parce que ce petit nombre d'unités, qui est toujours au-dessous de 100, ne répondant qu'aux deux derniers chiffres, ne change que d'une quantité infiniment petite le rapport du sinus 50907 avec le sinus 999999900, auquel on le compare ici (716). On peut donc prendre ce sinus 999999900 pour le sinus exact de l'angle en question C.

Ayant donc les sinus des deux angles B & C, on fera en chiffres la proportion que nous avons annoncée : 50907 . 1430 :: 999999900 . x. En divisant le produit des deux moyens par le premier extrême, on aura un quotient qui exprimera la grandeur du côté AC, qui est la distance de l'astre B au point A de la terre. On voit par-là, comment il faudroit opérer, si l'angle A, au lieu d'être droit, comme nous l'avons supposé, étoit aigu ou obtus.

719. REMARQUE. Dans la résolution d'un tel triangle, on seroit assuré de trouver les côtés CB & AB dans la plus grande précision ; si les angles & le côté donnés étoient parfaitement exacts. Mais comme on ne peut jamais être assuré d'avoir les angles des minutes & des secondes avec une précision entière & parfaite, non plus que le côté AC ; il est inutile de chercher à mettre plus de précision dans des calculs qui ne peuvent donner que des à peu près, suffisans dans la théorie & dans la pratique.

PARAGRAPHE QUATRIÈME.

TANGENTES ET SÉCANTES.

720. DÉFINITION. I. **O**N nomme *tangente d'un arc* ou d'un angle, une ligne AN, perpendiculaire au rayon BA qui passe par une extrémité de l'arc ; laquelle ligne AN est terminée par la rencontre d'un autre rayon prolongé BN, qui passe par l'autre extrémité de l'arc. (*fig. 104.*)

Ainsi la ligne NA est la tangente de l'angle ABn, & de l'arc An. De même la ligne MA est la tangente de l'angle ABm, & de l'arc Am.

721. DÉFINITION II. On nomme *sécante d'un arc*, le rayon prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente.

Ainsi BN est la sécante de l'arc An , & de l'angle ABN. De même, BM est la sécante de l'arc Am , & de l'angle ABM.

THÉORÈME.

722. *La tangente est au sinus total, comme le sinus de son angle est au sinus de l'angle de complément.*
(fig. 104.)

DÉMONSTRATION. Soit un triangle quelconque NBA, formé par le rayon AB, par la sécante BN, & par la tangente NA. Ce triangle est rectangle en A, & son sinus est na .

I°. On a donc deux triangles semblables, savoir ANB & anB : puisque l'angle ABN est commun ; & que les angles NAB & naB , formés l'un par la tangente NA & l'autre par le sinus na , l'une & l'autre perpendiculaires au rayon BA, sont droits. On a donc cette proportion : NA . AB :: na . aB .

Or aB est égal au co-sinus nb , qui est le sinus de l'angle de complément NBD (637) : donc on a aussi cette proportion ; NA . AB :: na . nb .

Mais cette dernière proportion est celle qu'exprime le théorème : donc la tangente inconnue, est au sinus total connu ; comme le sinus connu de l'angle ABN qui l'intercepte, est au sinus connu de l'angle NBD du complément.

II°. Il est évident que la même démonstration auroit lieu pour le triangle ABM, dont MA est la tangente. Car les triangles MBA & mBd , sont semblables : puisque l'angle MBA est commun ; & que les angles MAB & mdB , formés l'un par la tangente MA & l'autre par le sinus md , sont droits.
C. Q. F. D.

PROBLÈME I.

723. *Étant donné un angle quelconque , trouver sa tangente.*

SOLUTION. Faites cette analogie, qui est celle du théorème précédent : la tangente inconnue est au sinus total connu ; comme le sinus connu de l'angle donné, est au sinus connu de l'angle de complément ; & les trois termes connus vous donneront le quatrième inconnu, qui sera la tangente cherchée.

I°. Par exemple, pour trouver la tangente d'un angle ou d'un arc de 10 degrés & 25 minutes ; nommez la tangente inconnue x : prenez le sinus total 100000 dans les tables ordinaires : prenez aussi le sinus 18081 de l'angle donné ; & le sinus 98352 de l'angle de complément, qui est de 79 degrés 35 minutes. Vous aurez la proportion suivante : $x . 100000 :: 18081 . 98352$.

Divisez le produit 1808100000 des deux moyens, par le dernier extrême : le quotient 18384 exprimera la tangente de l'angle de 10 degrés 25 minutes. On néglige ici les deux chiffres qui suivent le point intercalaire.

II°. Si vous renversez la dernière raison de cette proportion, vous aurez une autre proportion, qui vous donnera la tangente de l'angle de complément, savoir : $x . 100000 :: 98352 . 18081$.

Divisez le produit 9835200000 des deux moyens, par le dernier extrême : le quotient 543966 exprimera la tangente de l'angle de 79 degrés 35 minutes, en parties égales à celles du rayon. (646.)

PROBLÈME II.

724. *Étant donnée ou trouvée la tangente d'un angle, trouver la sécante de ce même angle. (fig. 104.)*

SOLUTION. Dans les triangles ABN ou ABM, la sécante BN ou BM est l'hypothénuse : puisque ces triangles sont rectangles en A. Donc le carré de la sécante quelconque BN, est égal aux deux carrés, de la tangente NA & du rayon BA (517). Donc si vous ajoutez le carré de la tangente au carré du rayon, vous aurez le carré de la sécante : extrayez donc la racine carrée de cette somme (129) ; & cette racine carrée sera la sécante elle-même.

725. REMARQUE. La sécante sert entre autres choses, à déterminer la courbure du niveau réel au-dessous du niveau apparent, dont nous avons parlé ailleurs (434). La sécante d'un arc très-petit n'excede presque point le rayon : mais à mesure que l'arc devient grand, la sécante augmente considérablement. La sécante d'un angle de 60 degrés est le double du rayon ; & la sécante devient infinie, quand elle atteint l'angle droit, où elle devient parallèle à la tangente.

ARTICLE SECONDE.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

726. OBSERVATION. *LA Trigonométrie sphérique est une science qui apprend à résoudre par le calcul, des triangles formés sur la surface d'une sphere, ou des triangles dont les côtés sont des arcs de grand cercle. Les petits cercles de la sphere n'entrent pas dans les calculs de la trigonométrie : soit parce que leurs rayons n'ont pas une même grandeur, comme les rayons des grands cercles ; soit parce que leurs plans ne sont pas assujettis à couper un même axe, ni à passer par un même point central, comme le plan des grands cercles. Nous nous bornerons à donner sur cet objet, les*

notions les plus simples & les plus nécessaires pour la géographie & pour l'astronomie, & à montrer comment la trigonométrie rectiligne s'applique aux triangles dont un côté est un arc de grand cercle. Mais il faudra se rappeler ici ce que nous avons dit ailleurs sur la formation & sur les propriétés de la sphère (554 & 557) : ce qui forme comme la partie préliminaire de cet article & de ses dépendances.

I°. On peut considérer principalement dans une sphère trois sortes de triangles ; des triangles rectilignes, formés par deux rayons & une corde ; des triangles mixtilignes, formés par deux rayons & un arc de grand cercle appuyé sur ces deux rayons ; des triangles sphériques, formés par la rencontre de trois grands cercles, ou par trois arcs de grands cercles.

Dans un *triangle rectiligne*, pris dans la sphère ou hors de la sphère, les angles & les côtés ont toujours les mêmes propriétés que nous avons développées dans la longimétrie, dans la planimétrie, dans la trigonométrie rectiligne. Chaque angle rectiligne a pour mesure l'ouverture rectiligne interceptée entre les deux lignes droites qui le forment. La théorie de ces triangles n'a rien de commun avec la trigonométrie sphérique.

Dans un *triangle mixtiligne*, formé par la rencontre de deux rayons & d'un arc de grand cercle appuyé sur ces deux rayons, chaque angle mixtiligne a pour mesure l'ouverture interceptée entre l'arc & le rayon.

Dans un *triangle sphérique*, formé par trois arcs de grand cercle, par exemple, du méridien, de l'équateur, & d'un grand cercle qui coupe obliquement l'équateur & le méridien, chaque *angle sphérique* a pour mesure l'ouverture interceptée entre les deux arcs qui le forment.

II°. Pour trouver le diamètre inconnu d'une sphère, sur laquelle vous voulez tracer différens cercles, placez

cette sphere entre deux plans ZO, YQ, paralleles entre eux & contigus à la sphere : la distance des deux plans sera le diametre de cette sphere ; la moitié de cette distance en sera le rayon AC. (fig. 86.)

III°. Pour tracer un grand cercle sur une sphere dont on connoît le rayon : avec un compas ordinaire, décrivez sur un plan, un cercle APBRA, qui ait pour rayon le rayon de la sphere donné : ce sera un cercle égal à un grand cercle de la sphere. Coupez ce cercle en quatre parties égales par deux diametres AB & PR, perpendiculaires l'un à l'autre ; & de l'extrémité A d'un diametre, prenez une ouverture de compas qui aboutisse à une extrémité P de l'autre diametre : cette ouverture AP sera la corde d'un arc de 90 degrés d'un grand cercle de la sphere.

Ensuite, avec un compas à jambes recourbées en dedans (qu'on nomme *compas sphérique*), prenez sur le cercle décrit sur un plan, une ouverture égale à la corde AP de 90 degrés ; & posant une pointe du compas sphérique sur un point P, donné ou pris à volonté dans la sphere, décrivez avec l'autre pointe recourbée une circonférence ABA ; ce sera un grand cercle de la sphere. Le point fixe P, d'où ce grand cercle est décrit, sera un de ses poles. (fig. 86.)

IV°. Pour tracer un grand cercle perpendiculaire à un autre grand cercle sur une sphere ; avec le même compas & de la même ouverture AP que la précédente, décrivez, d'un point B, donné ou pris à volonté sur le cercle que vous venez de décrire, un nouveau cercle ; ce nouveau cercle PRP sera par-tout éloigné de 90 degrés du point d'où il est décrit ; & sera perpendiculaire au premier cercle ABA.

On conçoit par-là comment on peut décrire tant de grand cercles qu'on voudra sur une sphere ; perpendiculaires ou obliques les uns aux autres.

727. DÉFINITION I. On nomme *axe d'un grand cercle*, une perpendiculaire qui enfile son centre de part & d'autre ; & qui de part & d'autre est égale au rayon de ce cercle. (*fig. 110.*)

I°. La ligne droite DCF est l'axe du cercle ABA : la ligne droite ACB est l'axe du cercle DFD : la ligne droite PCR est l'axe du cercle MNM. Les extrémités de l'axe sont les *poles du cercle*.

II°. L'axe DCF d'un grand cercle ABA, est aussi l'axe de tous les petits cercles parallèles MRM : puisqu'il passe par les centres du grand cercle ABA & des petits cercles parallèles MRM pris dans la même sphère ; & que cet axe étant perpendiculaire au plan du grand cercle, est aussi nécessairement perpendiculaire aux petits cercles parallèles.

III°. Le *plan d'un cercle* est l'aire ou la surface plane & sans profondeur de ce cercle, interceptée & terminée par la circonférence. Toute ligne droite qui se confond avec plus de deux points de cette surface circulaire, est dans le plan de ce cercle.

728. DÉFINITION II. On nomme *angle sphérique*, l'ouverture interceptée entre deux arcs de grand cercle qui s'entre-coupent dans une même sphère. Cet angle est ou droit, ou aigu, ou obtus. (*fig. 110.*)

I°. Un *angle sphérique* $A \nu D$ est droit ; quand ses deux côtés prolongés l'un & l'autre jusqu'à 90 degrés au-delà de leur point d'intersection ν , embrassent précisément un arc AMD de grand cercle, de 90 degrés.

II°. Un *angle sphérique* $A m M$ est aigu ; quand ses deux côtés prolongés l'un & l'autre jusqu'à 90 degrés au-delà de leur point d'intersection m , embrassent un arc AM de grand cercle, qui a moins de 90 degrés.

III°. Un *angle sphérique* $M m B$ est obtus ; quand ses deux côtés prolongés l'un & l'autre jusqu'à 90 degrés au-delà de leur point d'intersection m , embrassent

un arc MDB de grand cercle, qui a plus de 90 degrés.

En général, la *grandeur d'un angle sphérique*, intercepté entre deux grands cercles d'une même sphere, est le *plus court chemin circulaire* qu'on puisse parcourir pour aller de l'un à l'autre, en partant des deux points correspondans de leurs circonférences qui sont les plus éloignés l'un de l'autre; c'est-à-dire, en partant des deux points correspondans des deux arcs indéfiniment prolongés, qui sont à 90 degrés de leur sommet ou de leur commune intersection.

Ainsi, la grandeur de l'arc sphérique AmM , est l'arc AM ; en supposant que les points A & M soient à 90 degrés de la commune intersection n des deux cercles ABA & MNM .

THÉORÈME I.

729. Si deux grands cercles d'une même sphere sont perpendiculaires l'un à l'autre; l'axe de l'un est le diamètre de l'autre. (fig. 110.)

DÉMONSTRATION. Soient ABA & DFD deux grands cercles, dont les plans (523) soient perpendiculaires l'un à l'autre. Selon la définition du diamètre & de l'axe, il est clair que DCF est diamètre du cercle DFD , & axe du cercle ABA ; & que ACB est diamètre du cercle ABA , & axe du cercle DFD . On peut dire & démontrer la même chose, sur deux grands cercles quelconques, dont l'un sera perpendiculaire à l'autre. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

730. Quand l'axe d'un grand cercle est un diamètre d'un autre grand cercle, ces deux cercles sont perpendiculaires l'un à l'autre; & leurs poles sont éloignés l'un de l'autre de 90 degrés. (fig. 110.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux plans circulaires ABA & DFD; en telle sorte que le plan DFD renferme l'axe DCF du cercle ABA. Dans ce cas, l'arc DCF d'un cercle ABA, est un diamètre de l'autre cercle DFD; & réciproquement. Or il est clair que ces deux diamètres ACB & DCF, perpendiculaires l'un à l'autre, représentent la position de leurs plans: donc les diamètres & les axes ACB & DCF étant perpendiculaires l'un à l'autre; les plans ABA & DFD le sont aussi. C. Q. F. D.

THÉORÈME III.

731. *Quand les plans de deux grands cercles sont inclinés l'un à l'autre, leur inclinaison se mesure par l'arc d'un grand cercle, pris à 90 degrés de la commune intersection de leurs circonférences. (fig. 110.)*

DÉMONSTRATION. Soient les deux grands cercles ABA & MVM, dont les plans sont inclinés l'un vers l'autre, & dont les circonférences s'entre-coupent en m & en n . On conçoit d'abord aisément que l'angle sphérique AnM , par exemple, est égal à l'angle rectiligne que formeroient au point d'intersection n deux tangentes aux arcs nA & nM ; & que pour évaluer la grandeur de l'arc intercepté entre ces deux tangentes, en degrés égaux à ceux de l'un des deux cercles égaux, il faudra que cet arc soit décrit du point d'intersection n ou m , avec un rayon égal au rayon CA de la sphere.

1°. Il est évident que les côtés de l'angle sphérique AmM vont en s'écartant de plus en plus jusqu'à 90 degrés en A & en M; & qu'au-delà de 90 degrés, les côtés du même angle sphérique AmM vont en se rapprochant de plus en plus jusqu'en n .

II°. Il est encore évident que si le plan circulaire DFD fait une révolution sur son diamètre DCF; la

demi-circonférence $DxvF$ de ce plan, coupera d'abord inégalement les circonférences ABA & MNM : car la section mr sera plus grande que la section mv .

Mais quand par la révolution continuée, ce même plan roulant sur son diamètre DCF sera placé en $ADBFA$, à 90 degrés des intersections m & n ; alors ce plan circulaire passera par les poles PR & DF des deux cercles ABA & MNM , & sera perpendiculaire à l'un & l'autre cercle : puisque l'axe de ce cercle $ADBFA$ sera un diamètre du cercle ABA & du cercle MNM . (730.)

Par conséquent, l'arc MA du grand cercle $ADBFA$, perpendiculaire à la fois aux deux cercles ABA & MNM , mesurera la vraie ouverture de l'angle sphérique MmA : ce qui n'auroit point lieu, si l'arc AM étoit perpendiculaire à l'un des cercles & oblique à l'autre ; ou oblique à l'un, & plus oblique à l'autre. (728). C. Q. F. D.

DIVERS COROLLAIRES.

732. COROLLAIRE I. *La mesure de l'arc intercepté entre deux cercles, est donc un arc d'un nouveau cercle perpendiculaire à la fois aux deux premiers cercles.* (fig. 110.)

EXPLICATION. I°. Quand deux cercles ABA & MRM , égaux ou inégaux, sont parallèles ; la mesure de l'arc qui les sépare, est l'arc quelconque xv qu'ils interceptent d'un grand cercle DFD qui passe par leurs poles communs : puisque ce cercle, passant par les poles D & F , qui sont communs aux deux cercles parallèles ABA & MRM , est perpendiculaire à l'un & à l'autre cercle parallèle.

II°. Quand deux grands cercles sont obliques l'un à l'autre ; la mesure de l'arc qui les sépare, est l'arc qu'ils interceptent d'un grand cercle qui passe par leurs quatre poles : puisque cet arc, intercepté entre leurs plans &

perpendiculaire à l'un & à l'autre plan, mesure la vraie distance & la vraie ouverture de ces plans. Cet arc est toujours à 90 degrés des deux intersections.

III°. Dans la sphère céleste & terrestre, tous les méridiens sont *perpendiculaires à l'équateur* : puisque l'axe de tout méridien est un diamètre de l'équateur. Tous les méridiens sont *obliques à l'écliptique*, à l'exception des deux méridiens qui sont à 90 degrés des points d'intersection de l'écliptique & de l'équateur : puisque l'axe de ces deux seuls méridiens est un diamètre de l'écliptique confondue en ces deux seuls points avec l'équateur. Tous les méridiens, en coupant perpendiculairement l'équateur, coupent aussi perpendiculairement tous les *cercles parallèles à l'équateur* : puisque ces parallèles à l'équateur ont le même axe que l'équateur lui-même.

733. COROLLAIRE II. *L'espace intercepté entre deux cercles parallèles ABA & MRM, est une zone, dont la largeur est l'arc d'un grand cercle perpendiculaire aux deux cercles parallèles : puisque cet arc MA ou RB mesure perpendiculairement le plus court chemin circulaire qu'on puisse parcourir en allant du cercle MRM au cercle parallèle ABA.*

734. COROLLAIRE III. *La surface d'une zone est le produit de la circonférence d'un grand cercle, par la partie de l'axe interceptée entre les deux cercles parallèles : puisque cette zone est égale en surface, à la surface d'une partie correspondante du cylindre circonscrit à la sphère. (576.)*

HYPOTHESE OU APPLICATION.

735. *Si la sphère ADBFA est le globe terrestre ou le globe céleste (fig. 110.) :*

1°. Le point C sera le centre de la terre & le centre sensible de l'univers. Il est clair que de ce centre, on

peut mener par la pensée tant de lignes droites & indéfinies qu'on voudra, vers la surface de la terre ou du firmament.

II°. Si le globe terrestre ou céleste tourne sur lui-même autour de la ligne DCF ; cette ligne sera l'axe de la terre & du monde ; & les points D & F en seront les *poles*. Le cercle ABA sera l'équateur : le cercle MRM sera un cercle *parallèle* à l'équateur : l'espace MRBA sera une *zone* : le cercle MNM sera un cercle *incliné* à l'équateur : la ligne droite mCn sera la *commune intersection* de ces deux cercles ABA & MNM, & les divisera l'un & l'autre en deux portions égales : les deux points m & n , où les circonférences de ces deux cercles s'entre-coupent, seront ce qu'on appelle leurs *nœuds*. L'arc MA, dont les deux extrémités sont de part & d'autre à 90 degrés des nœuds m & n , est la mesure de l'inclinaison de ces deux cercles.

III°. Deux rayons CA & CM, menés du centre aux deux extrémités de l'arc MA, formeront un triangle mixtiligne ACM, dont MS sera le *sinus droit*, & dont SA sera le *sinus versé*. On pourra donc appliquer à ce triangle ACMA, toute la théorie des sinus, des tangentes, des sécantes, que nous avons donnée dans la trigonométrie rectiligne.

PROBLÈME I

736. *Mesurer dans le ciel un arc sphérique, intercepté entre deux cercles parallèles.* (fig. 110.)

SOLUTION. Soient dans le ciel, deux cercles parallèles ABA & MRM : il s'agit de mesurer l'arc MA ou RB d'un cercle ADBFA qui leur est perpendiculaire, ou dont le plan passe par leurs poles communs D & F. Ces deux cercles étant parallèles ; il est évident que l'arc intercepté entre leurs circonférences, est par-tout le même & d'égale grandeur. Ainsi l'arc perpendiculaire que l'on trouvera entre deux points

quelconques , sera l'arc perpendiculaire qui est intercepté entre tous les autres points.

I°. Pour mesurer cet arc , on aura un grand quart de cercle astronomique (421) ; & on fixera ce quart de cercle , en telle sorte que son plan soit perpendiculaire au plan des deux cercles paralleles , ou soit dirigé vers leurs deux poles. Par exemple ,

Si on veut mesurer l'arc intercepté entre l'équateur céleste ABA & un cercle parallele MRN ; après avoir placé le plan du quart de cercle dans le plan du méridien DAFBD , on dirigera la regle mobile vers un point A de l'équateur , & ensuite la même regle mobile vers le point M du cercle parallele ; & on comptera exactement sur le quart de cercle , le nombre de degrés , de minutes & de secondes : ce qui donnera la mesure de l'angle ACM , intercepté entre ces deux cercles.

Car le rayon du globe terrestre n'étant qu'une quantité infiniment petite en comparaison de la distance du firmament (*Phy.* 1354) ; le quart de cercle , placé sur la surface de la terre est comme s'il étoit placé au centre du firmament. Or dans ce cas , la regle mobile & le rayon visuel qu'elle dirige , se confondroient avec les rayons CA & CM ; & l'angle ACM seroit mesuré sur le quart de cercle (*fig.* 3.) , par le nombre de degrés , de minutes & de secondes , qu'interceptent les deux directions de la regle mobile.

II°. Il est important de remarquer ici , que dans l'astronomie les sinus viennent souvent se mettre à la place de leurs arcs. Pour le faire comprendre , je suppose qu'une planete A décrive une orbite ADFHA , autour d'un centre C ; & que je sois placé en O , pour observer son mouvement. (*fig.* 121.)

Cette planete A , en partant de la ligne ACO des centres , décrira un arc AB que je ne puis mesurer en lui-même : elle ne me paroîtra en B , éloignée de la ligne

ligne des centres, que de la quantité BS, qui est le sinus de l'arc AB décrit par la planete.

Quand la planete aura parcouru l'arc ABD de 90 degrés, elle sera dans son plus grand éloignement de la ligne CO des centres; & j'estimerai cet éloignement, par la ligne CD, qui est le sinus de l'angle droit ACD. Le point D sera sa plus grande distance de la ligne des centres, & le commencement de son rebroussement. Après quoi, elle ira en E, où sa distance apparente de la ligne des centres, sera le sinus ET: elle ira ensuite en F, où sa distance de la ligne des centres, sera zéro.

La planete passera ensuite en G, en H, en K; & j'estimerai de même sa distance de la ligne des centres, par les sinus GT, HC, KS; sinus qui seront en sens contraire des précédens: de sorte que si les premiers sinus sont positifs, les derniers seront négatifs. Si la planete en D est du côté de l'orient, par rapport à la ligne ACO des centres en H; la même planete sera du côté de l'occident, relativement à la même ligne des centres.

PROBLÈME II.

737. *Mesurer dans le ciel, un arc sphérique, intercepté entre deux grands cercles qui s'entre-coupent.* (fig. 110.)

SOLUTION. Que l'arc à mesurer, soit l'arc intercepté entre les deux cercles ABA & MNM, dont les poles sont DF & PR. Placez le quart de cercle, dont nous venons de parler, en telle sorte que son plan indéfiniment prolongé atteigne les quatre poles DF & PR des deux cercles dont vous voulez mesurer l'inclinaison.

Il est clair qu'un rayon indéfini, qui feroit une révolution sur le plan de ce quart de cercle, décri-

roit un cercle ADBFA, perpendiculaire aux deux cercles dont on veut mesurer l'arc : puisque son plan passeroit par les poles de ces deux cercles (730). Par conséquent, si d'un point C, pris sur la surface de la terre, on dirige une règle & un rayon visuel vers A, & la même règle & un autre rayon visuel vers M; l'angle MCA, mesuré sur le quart de cercle, donnera le nombre de degrés, de minutes & de secondes, de l'arc MA; comme dans le problème précédent. (*fig. 3.*)

On comprend aisément qu'on peut mesurer ces arcs célestes, en plus d'une autre manière. Nous prétendons ici uniquement faire voir que cette mesure est possible, en montrant une manière de l'effectuer.





PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE, O U ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES. GÉOMÉTRIE.

CINQUIÈME TRAITÉ.

INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

LA théorie des Sections coniques, théorie créée par Platon ou par son École, étendue & perfectionnée par Archimède & par Apollonius de Perge, est une des brillantes parties des Mathématiques, celle par où elles commencent à sortir de la sphère des simples élémens. Nous ne prétendons donner sur cet objet, que quelques notions fondamentales ; celles qui sont absolument nécessaires pour l'intelligence des grands phénomènes de la Physique, dont tout le monde aime à être instruit. Les personnes qui voudront porter plus loin leurs connoissances en ce genre, pourront se donner de plus grandes lumières sur cette partie des

Mathématiques, dans une foule d'ouvrages où elle est traitée dans toute son étendue.

IDÉE GÉNÉRALE DES SECTIONS CONIQUES.

738. OBSERVATION. On nomme *Sections coniques*, certaines figures planes, qui sont terminées par des lignes courbes; & qui ressemblent aux sections que feroit un *plan tranchant* (522), en coupant un cône, droit ou incliné, selon différentes directions. Par exemple, (fig. 107):

I°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné BAD, commence la section par le sommet A; cette section, soit qu'elle passe par le centre C de la base toujours circulaire du cône, soit qu'elle passe à côté de ce centre C, sera un *triangle* plus ou moins ouvert BAD.

II°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné, forme une section parallèle à la base circulaire du cône; la section sera un *cercle* plus ou moins grand bdb, VXV, vxv. (fig. 107 & 112.)

Dans un cercle ADXDA, envisagé comme section conique, ou considéré relativement aux sections coniques (fig. 111); on nomme *axe*, un diamètre quelconque AX: on nomme *sommet*, une extrémité quelconque A de l'axe: on nomme *ordonnées*, des perpendiculaires à l'axe, telles que MB, MK, MG, MH: on nomme *abscisses*, les sections AB, AK, AG, AH, de l'axe, prises depuis le sommet A de l'axe jusqu'aux ordonnées correspondantes. Le mot d'*abscisses*, dans toutes les sections coniques, est latin dans son origine: *Partes axis ab ordinatâ quâvis abscissa*.

Dans le cercle, & dans les trois sections coniques dont nous allons parler, on désigne ordinairement les ordonnées des courbes, par *y*; & les abscisses, par *x*; c'est leur expression algébrique: en sorte que dans le discours familier, on dit les *x* & les *y* d'une courbe;

pour désigner ses abscisses & ses ordonnées quelconques, grandes ou petites.

Ces deux sections coniques, la section triangulaire & la section circulaire, ou le *triangle* & le *cercle*, dont on connoît les propriétés par la Géométrie élémentaire, ne sont point mises par les Géomètres, au rang des sections coniques proprement dites ; & c'est aux trois sections suivantes, qu'est uniquement & exclusivement affecté ce nom. Les propriétés connues de la section triangulaire & de la section circulaire, sont uniquement destinées dans cette théorie, à faire connoître les propriétés des trois *sections coniques proprement dites* ; ou de la Parabole, de l'Ellipse, de l'Hyperbole, dont nous allons voir la formation.

Sections coniques dans le cône.

III°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné ; commence la section hors du sommet, en un point quelconque S ; & si cette section est *parallele à l'un des côtés* AB du cône, ou à un plan posé sur ce côté AB ; cette section MSM est *une parabole* : & si le cône BAD est supposé prolongé & augmenté à l'infini, en conservant la même ouverture BAD ; cette section parabolique MSM, prolongée à l'infini, ne sortira jamais du cône. (*fig. 107.*)

Dans cette courbe MSM, il n'y a qu'un seul axe SN, lequel peut être prolongé à l'infini, divisant toujours la courbe en deux parties égales. Les ordonnées à cette courbe, perpendiculaires à l'axe SN, sont nm ; NM. Les abscisses de cette courbe, se prennent sur l'axe, depuis le sommet S jusqu'à la rencontre de l'ordonnée correspondante : ces abscisses sont Sn, SN.

IV°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné (*fig. 112*), commence la section hors du sommet, en un point quelconque E ; & si la section, indéfiniment prolongée, sort du cône, sans en atteindre la base, &

sans être parallèle à cette base ; cette section sera *une ellipse* plus ou moins allongée indéfiniment **EMRME** (*fig. 112.*)

Dans cette courbe **RER**, il y a un *grand axe* **ENR**, & un *petit axe* qui coupe perpendiculairement le grand axe par le milieu. Les ordonnées, perpendiculaires au grand axe, sont *mn*, **MN**. Les abscisses de cette courbe se prennent depuis un sommet **E** ou **R**, à l'extrémité du grand axe, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée correspondante : ces abscisses sont *En*, **EN**.

V°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné **BAD** (*fig. 125*), commence la section hors du sommet, en un point quelconque **H** ; & si la section **PHI** est ou parallèle à l'axe **AX** du cône, ou inclinée à cet axe sans être parallèle à aucun des côtés **AB** & **AD** ; cette section **IHP** sera *une hyperbole* : & si le cône est infini ; cette section, prolongée à l'infini, ne sortira jamais du cône. (*fig. 125.*)

Si au sommet **A** du cône **BAD**, on suppose placé un autre cône **ZAV**, qui ait le même axe **XA** *x* que le premier ; le plan qui vient de former la section **HIPH**, indéfiniment prolongé, formera une autre section semblable *hiph*, qu'on appelle *hyperbole conjuguée*.

Dans une hyperbole quelconque **IHP**, il y a deux axes, placés l'un & l'autre hors de la courbe. On nomme *premier axe*, la ligne **OH**, qui joint les sommets des deux hyperboles opposées ; & qui prolongée diviseroit les hyperboles en deux parties égales : c'est sur ce prolongement **HK**, que se prennent les abscisses & les ordonnées de l'hyperbole **IHP**. On nomme *second axe*, une droite **AS**, qui est perpendiculaire au grand axe **OH** ; qui le coupe par le milieu & qui en est coupée aussi par le milieu : ce second axe **AS** peut être ou égal ou inégal au premier axe. Le centre d'une hyperbole **IHP** ou *ihp*, est en dehors en **C**.

Dans cette courbe **IHP**, les ordonnées **PK** sont des

perpendiculaires menées d'un point de la courbe sur le prolongement HK du premier axe OH ; & les *abscisses* HK se prennent depuis le sommet H de la courbe , jusqu'à la rencontre de l'ordonnée correspondante PK. Mais en faisant le rectangle d'une abscisse HK , on multiplie cette abscisse , par elle-même augmentée du premier axe : ainsi le rectangle de l'abscisse HK est $HK \times OK$.

VI°. Nous ferons voir ailleurs , qu'un plan , en coupant un cône droit ou incliné , ne peut pas faire des sections différentes des cinq sections dont nous venons d'observer la formation. La *théorie de la parabole* est relative à la chute des graves , lancés parallèlement ou obliquement à l'horison (*Phy.* 381). La *théorie de l'ellipse* est nécessaire dans la dioptrique & dans la catoptrique , pour la construction de certains miroirs ardents ; dans l'acoustique , pour la direction du son ; dans l'astronomie , pour saisir & pour suivre les mouvemens des planetes & des cometes , qui toutes décrivent des ellipses autour de leur centre de mouvement (*Phy.* 1307). La *théorie de l'hyperbole* a ses usages dans la dioptrique , dans la catoptrique , dans quelques parties de l'astronomie : mais comme nous n'en faisons pas mention dans notre *Physique* ; nous nous bornerons à en donner une idée générale , sans en suivre & sans en développer les propriétés particulières.

Sections coniques sur un plan.

Après avoir pris une idée générale des trois sections coniques , en les considérant dans le cône ; il ne sera pas inutile d'en prendre encore une idée générale , en les considérant sur un plan. (*fig.* 115.)

VII°. Les *trois sections coniques* , la parabole , l'ellipse , l'hyperbole , sont des figures planes terminées par des lignes courbes *mm SMM* , qui s'infléchissent

selon différentes loix relativement à une ligne droite AGG, prise hors de la courbe, & relativement à une autre ligne droite SPP, prise dans la courbe.

Pour déterminer la position d'un point, & par-là même, la position d'une suite de points & d'une courbe entière, sur un plan; la manière la plus commode & la plus usitée chez les géomètres, c'est de rapporter ce point & successivement chaque autre point de la courbe, à deux lignes droites, différemment posées sur ce plan; ce qui se fait fort facilement, lorsque l'on connoît la distance de ce point à chacune de ces droites, & de quel côté il est placé à leur égard. Par exemple (*fig. 105*):

Si on dit qu'un point s est éloigné d'une ligne ZR, de la quantité sr , & d'une autre ligne SH, de la quantité sX ; il sera facile de déterminer la position s de ce point.

VIII°. Dans les trois sections coniques, on fait d'abord principalement attention à six choses, savoir (*fig. 115*):

A une ligne droite GAG, prise hors de la courbe, & qu'on nomme la *directrice*.

A une autre ligne droite SX qui est perpendiculaire à la directrice, qui divise la courbe en deux parties égales, & qu'on nomme l'*axe* de la courbe.

A un point F, pris dans la courbe, & qu'on nomme le *foyer* de la courbe.

A des perpendiculaires MP, mP , menées d'un point de la courbe sur la ligne SPX, & qu'on nomme les *ordonnées* ou les y de la courbe.

A une de ces ordonnées pFp , qui passe par le foyer de la courbe, & qu'on nomme le *paramètre* de la courbe.

A des lignes SF, SP, prises sur l'axe ou sur le prolongement de l'axe; & qu'on nomme les *abscisses* ou les x de la courbe.

IX°. Il y a certaines différences générales à observer dans les trois sections coniques. (*fig. 115.*)

Dans la parabole, le sommet S est à *égale distance* & de la directrice A & du foyer F. Dans l'ellipse, le sommet S est *plus loin* de la directrice A, que du foyer F. Dans l'hyperbole, le sommet S est *moins loin* de la directrice A, que du foyer F.

Si au sommet S de chacune des trois sections coniques, on élève une *tangente* SB, qui soit égale à la distance SF du sommet au foyer de la courbe; & que du point A de la directrice, pris dans la direction de l'axe prolongé, on mene par l'extrémité B de cette tangente, une droite indéfinie ABDD; l'angle SAB sera de 45 *degrés* pour la parabole; de *moins de 45 degrés*, pour l'ellipse; de *plus de 45 degrés*, pour l'hyperbole.

On démontre dans tout traité des sections coniques, & nous supposons ici démontré, que dans la parabole, le carré d'une ordonnée quelconque MP, est *égal* au rectangle de l'abscisse correspondante SP par le paramètre pFp: que dans l'ellipse, le carré d'une ordonnée quelconque MP, est *plus petit* que le rectangle de l'abscisse correspondante SP par le paramètre pFp: que dans l'hyperbole, le carré d'une ordonnée quelconque MP, est *plus grand* que le rectangle de l'abscisse correspondante SP par le paramètre pFp: ou algébriquement (75), dans la parabole, $yy = px$; dans l'ellipse, $yy < px$; dans l'hyperbole, $yy > px$.

De tout cela résulte l'étymologie du nom propre & particulier de chacune des sections coniques, qui signifient *égalité*, *défaut*, *excès*. Parabole; de παραβολη, *similitudo*, *aqualitas*: ellipse, de ελλειπω, *deficio*: figura ab aequalitate deficiens: hyperbole; de υπερβολη, *figura excedens aequalitatem*.

X°. Si les courbes que nous examinons dans ce

traité, se formoient & s'infléchissoient au hasard & sans aucune regle fixe; la géométrie n'auroit point prise sur elles: parce qu'elle ne pourroit pas partir de certains rapports connus, pour s'élever à la connoissance des rapports qui restent à connoître. Mais si ces courbes se forment & s'infléchissent selon certaines loix fixes & persévéramment les mêmes pour chaque espece de courbe; la géométrie a prise sur elles: & par certains rapports donnés ou trouvés, elle peut saisir & suivre toutes les propriétés de la courbe, dans tous ses accroissemens & dans toutes ses inflexions possibles; & l'expression algébrique qui marque selon quelle loi chaque section conique se forme & s'infléchit, s'appelle *l'équation à la courbe*. Par exemple, si la parabole est une courbe telle que les quarrés de ses ordonnées soient entre eux comme les produits des abscisses correspondantes par le parametre; l'équation de cette courbe sera $yy = px$; & ainsi du reste.

Nous supposerons, dans tout ce traité, qu'on a toujours présentes à l'esprit, & la *propriété fondamentale du triangle rectangle*, savoir, que le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des deux quarrés faits sur les deux autres côtés (517); & la *propriété fondamentale du cercle*, savoir que le quarré d'une ordonnée quelconque MG (*fig. 111*), est égal au rectangle formé par les deux segmens AG & GX du diametre ou de l'axe AX, ou que $\overline{MG} = AG \times GX$ (410); ou algébriquement, en nommant a le demi-axe, & $2a$ l'axe entier, que $yy = 2ax - xx$. C'est l'équation au cercle; équation qui sert à faire trouver l'équation aux autres courbes.

Pour connoître la nature & les propriétés de la parabole & de l'ellipse; nous allons les considérer, d'abord sur un plan, ensuite dans le cône.

PARAGRAPHE PREMIER.

LA PARABOLE, SUR UN PLAN.

739. PROBLÈME. **C**ONSTRUIRE ou décrire une parabole, sur un plan. (fig. 105.)

SOLUTION. Soit une droite indéfinie ZDR, posée sur ce plan : ce sera la *directrice* de la parabole MMSmm que nous allons décrire.

I°. Sur un point quelconque D de cette droite ou de cette directrice, élevez une perpendiculaire indéfinie DX, & sur cette perpendiculaire prenez à volonté un point F : ce point sera le *foyer de la parabole* à décrire.

II°. Divisez la ligne FD en deux parties égales au point S : ce point sera le *sommet de la parabole* à décrire. La ligne SX indéfiniment prolongée, sera l'*axe de la même parabole* : la ligne VST sera une tangente à la parabole, la *tangente au sommet*.

III°. Sur tant de points que vous voudrez, pris dans l'axe indéfini SX, menez des parallèles indéfinies à la directrice ZDR : ces parallèles BM, EM, HM, Bm, Em, Hm, perpendiculaires à l'axe, seront les *ordonnées à la parabole* ; & les parties SB, SE, SG, SH de l'axe, comprises entre le sommet & chaque ordonnée, seront les *abscisses de la parabole*.

IV°. Comme les ordonnées sont encore indéfinies, il s'agit de déterminer la grandeur de chacune : la courbe qui passera par l'extrémité déterminée M de chaque ordonnée, sera la parabole qu'il falloit décrire.

Pour déterminer la longueur de chaque ordonnée ; du point où une ordonnée quelconque ME atteint ou coupe l'axe, prenez avec une ouverture de compas, la distance ED de l'ordonnée à la directrice ; & posant une jambe du compas sur le foyer F, coupez par l'autre

pointe l'ordonnée EM : le point M, où le compas coupera l'ordonnée EM, fera la longueur de cette ordonnée EM, auparavant indéfinie & maintenant déterminée.

Faites la même opération pour toutes les autres ordonnées MB, MG, MH; en telle sorte que chaque M soit toujours égal à la distance BD, GD, HD, de l'ordonnée quelconque à la directrice : vous aurez les extrémités déterminées de toutes les ordonnées BM, GM, HM, Bm, Gm, Hm.

V°. Faites passer une courbe par toutes les extrémités SMM de ces ordonnées, extrémités par-tout également distantes & de la directrice & du foyer : cette courbe SMM sera *une parabole*. Si vous faites passer de même une courbe par toutes les extrémités Smm des mêmes ordonnées de l'autre côté de l'axe; cette courbe Smm sera aussi *une parabole*.

VI°. Une ligne droite, quadruple de $DS = SF$, est le *parametre de la parabole* : nous ferons voir que ce parametre est toujours égal à la double ordonnée pFp , qui passe par le foyer F. La propriété fondamentale de cette courbe, est que le carré d'une ordonnée quelconque EM, soit toujours égal au rectangle de son abscisse ES, par le parametre $4DS$ ou $4SF$; & que les carrés des ordonnées soient entre eux comme les abscisses correspondantes.

VII°. Une ligne MN, ou *mn*, menée d'un point quelconque de la courbe parabolique, parallèlement à l'axe SX, est un *diametre de la parabole*.

Nous ferons voir que la courbe que nous venons de décrire, est une vraie parabole : puisqu'elle a les *mêmes propriétés* que la parabole que nous avons déjà examinée & que nous examinerons encore dans le cercle. (741 & 766.) On suppose ici que la ligne MmMS est parfaitement courbe; ou que les lignes SM, MM, ne sont chacune que de deux points contigus.

T H É O R È M E I.

740. Dans la courbe qu'on vient de décrire, ou dans une parabole quelconque; le carré d'une ordonnée quelconque, est égal au rectangle de l'abscisse correspondante par le parametre. (fig. 105.)

DÉMONSTRATION. L'ordonnée, perpendiculaire à l'axe SX, peut être prise ou au-dessous du foyer, ou au au-dessus du foyer, ou dans le foyer même F.

1°. Soit d'abord l'ordonnée EM, prise *au-dessous* du foyer. Nommons y l'ordonnée EM; nommons x l'abscisse SE; nommons a la quantité constante SD ou SF, qui est le quart du parametre. Dans le triangle rectangle FEM; on aura, par la construction, $FM = MZ = ES + SD = x + a$. On aura encore & de même $EF = ES - SF = x - a$.

Or ce triangle rectangle FEM, donne $\overline{FM}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{EF}^2$: il donne donc algébriquement

d'abord, $x + a \times x + a = xx + 2ax + aa = \overline{FM}^2$:

ensuite, $y \times y = yy = \overline{EM}^2$;

enfin, . . $x - a \times x - a = xx - 2ax + aa = \overline{EF}^2$.

Prenant donc & disposant ces divers produits, selon l'exigence de l'équation donnée par le triangle rectangle FEM;

on aura, $xx + 2ax + aa = yy + xx - 2ax + aa$;

& en transpos. $yy = xx + 2ax + aa - xx + 2ax - aa$;

& en réduisant, $yy = + 4ax$.

Or selon la définition du parametre, $4a = p$: donc, en mettant p à la place de son égale $4a$, on aura $yy = px$.

On conçoit aisément qu'on démontrera la même chose dans un triangle rectangle quelconque FMH; FmG, où l'ordonnée HM, Gm, sera prise au-dessous

du foyer : donc le carré d'une ordonnée quelconque y , prise au-dessous du foyer, est toujours & par-tout égal au rectangle ou au produit de son abscisse par le parametre.

II°. Soit ensuite l'ordonnée BM , prise *au-dessus du foyer*. Dans le triangle rectangle BMF ; on aura, par la construction, $FM = MK = BS + SD = x + a$. On aura de même $BS = SF - SB = a - x$.

Or ce triangle rectangle BMF , donne $\overline{MF} = \overline{BM} + \overline{BF}$: il donne donc algébriquement,

d'abord $x + a \times x + a = xx + 2ax + aa = \overline{MF}$;

ensuite, $y \times y = yy = \overline{BM}$;

Enfin, $a - x \times a - x = aa - 2ax + xx = \overline{BF}$.

Prenant donc & disposant ces divers produits, selon l'exigence de l'équation donnée par le triangle rectangle BMF ,

on aura $xx + 2ax + aa = yy + aa - 2ax + xx$;

& en transpos. $yy = xx + 2ax + aa - aa + 2ax - xx$;

& en réduisant, $yy = 4ax = px$.

III°. Soit enfin l'ordonnée Fp , prise *au foyer même*.

Par la construction, on a $Fp = pv = 1a$: on a aussi $SF = x = a$: l'ordonnée est donc ici comme 2, & l'abscisse comme 1. Or le carré de l'ordonnée 2, est 4; & le rectangle ou le produit de l'abscisse 1 par le parametre 4, est aussi 4 : donc le carré yy ou $2 \times 2 = 4$ de l'ordonnée, est encore ici égal au produit $1 \times 4 = 4$ de l'abscisse correspondante x ou 1, par le parametre constant p ou 4. C. Q. F. D.

DIVERS COROLLAIRES.

741. COROLLAIRE I. Dans la courbe qu'on vient de décrire ; les carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes. (fig. 105.)

DÉMONSTRATION. La quantité p , qui est le paramètre, étant constante; on peut à sa place substituer l'unité: donc l'expression $yy = px$, deviendra $yy = 1x = x$, pour chaque ordonnée & pour chaque abscisse correspondante.

Par conséquent on aura cette proportion: le carré d'une ordonnée quelconque $HM = yy$, est à son abscisse $HS = x$; comme le carré d'une autre ordonnée quelconque $EM = yy$, est à son abscisse $BS = x$; & ainsi du reste.

Par conséquent encore, les abscisses SB , SG , SX ; croissant à l'infini; les ordonnées correspondantes à ces abscisses, croîtront proportionnellement à l'infini: à cause de yy , toujours proportionnel à x .

Par conséquent enfin, à cause de $yy = px$; les ordonnées y seront toujours égales aux racines carrées du produit des abscisses par le paramètre. Ainsi étant donné le paramètre d'une parabole, paramètre égal à 4 toises, par exemple; on trouvera la valeur d'une ordonnée à une distance quelconque du sommet, par exemple, à la distance de 1000 toises; en extrayant la racine carrée de 4000 toises, produit de l'abscisse x par le paramètre p : cette racine carrée exprimera l'ordonnée correspondante à cette abscisse de 1000 toises; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

742. COROLLAIRE II. *Le paramètre est une troisième proportionnelle à l'abscisse & à l'ordonnée correspondante: car puisque $yy = px$; il s'ensuit que $x.y :: y.p$; ou que $\div x.y.p.$ (173.)*

743. COROLLAIRE III. *Sur cette propriété du paramètre est fondé son usage, qui consiste à déterminer le rapport entre la longueur & la largeur de la parabole, lequel est le même que celui qui regne entre l'ordonnée & l'abscisse correspondante.*

EXPLICATION. En effet, dans l'équation $yy = px$;

supposons $p=1$: cette équation deviendra $yy=x$.
Or alors,

I°. Si l'on suppose l'abscisse $x=\frac{1}{9}$ du parametre ; l'on aura $yy=\frac{1}{9}$, & $y=\frac{1}{3}$. C'est-à-dire, que lorsque l'abscisse est un neuvième du parametre, l'ordonnée en est le tiers : par conséquent, la parabole alors croît davantage selon la largeur qui se prend sur l'ordonnée, que selon la longueur qui se prend d'un point de l'axe au sommet.

II°. Si l'on suppose l'abscisse $x=\frac{1}{4}$ du parametre ; l'on aura $yy=\frac{1}{4}$, & $y=\frac{1}{2}$: c'est-à-dire, qu'alors l'ordonnée est la moitié du parametre. Or le point de l'axe où l'abscisse est $\frac{1}{4}$ du parametre, est le foyer : puisque selon la définition du parametre, le parametre est quatre fois la distance du sommet au foyer. D'où l'on conclut que dans la parabole, la double ordonnée qui passe par le foyer, est égale au parametre ; & que dans ce cas, la parabole a encore plus de largeur que de longueur.

III°. Si l'on suppose l'abscisse $x=1$, ou égale au parametre ; l'on aura $yy=1$, & $y=1$: c'est-à-dire, que dans ce cas, l'ordonnée & l'abscisse sont égales ; & que la parabole a autant de largeur que de longueur.

IV°. Si l'on suppose l'abscisse $x=4$, ou quadruple du parametre ; l'on aura $yy=4$; & $y=2$: c'est-à-dire, que l'ordonnée n'est que double du parametre ; & qu'alors la parabole croît davantage selon la largeur.

V°. En général, lorsque les abscisses sont représentées par les fractions de l'unité $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$; les ordonnées sont représentées par leurs racines $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, qui croissent dans un plus grand rapport. Mais lorsque les abscisses sont représentées par les nombres 1, 4, 9, 16, 25 ; les ordonnées sont comme les nombres 1, 2, 3, 4, 5, qui sont dans un moindre rapport que leurs quarrés.

Par

Par conséquent, dans le premier cas, la parabole a plus de largeur que de longueur, ou s'écarte plus de l'axe que de la directrice. Mais dans le second cas, la parabole a plus de longueur que de largeur, ou s'écarte plus de la directrice que de l'axe.

TANGENTES A LA PARABOLE.

744. DÉFINITION. On nomme *tangente* à une courbe quelconque, une ligne droite qui touche cette courbe en un seul point, & qui indéfiniment prolongée de part & d'autre, ne toucheroit toujours la courbe qu'en un seul point, sans pénétrer dans le plan qu'embrasse cette courbe. La tangente au cercle est toujours perpendiculaire au rayon : il n'en est pas de même de la tangente à la parabole, à l'ellipse, & à l'hyperbole.

PROBLÈME.

745. Trouver une tangente à un point quelconque d'une parabole. (fig. 109.)

SOLUTION. I°. Du point donné quelconque M, menez une parallèle MV à l'axe SX, laquelle aboutisse à la directrice en V; & du foyer F, menez une ligne droite FV au même point V.

II°. Coupez en deux parties égales cette ligne FV, par une perpendiculaire Pm: cette perpendiculaire indéfiniment prolongée en N, sera une tangente à la parabole, la tangente au point M.

DÉMONSTRATION. I°. Les deux côtés VM & MF du triangle VFM, sont égaux; par la construction: donc si du point M, avec un rayon MV ou MF, on décrit un arc de cercle VF; le point M sera à la fois, un point de la parabole, le sommet du triangle isocèle MVF, & le centre de l'arc circulaire VF.

II°. Si la ligne ou la corde VmF, est coupée en
P p

deux parties égales par une perpendiculaire Pm ; cette perpendiculaire, indéfiniment prolongée, passera par le centre du cercle en M (407), lequel centre du cercle est un point de la parabole.

III°. Cette perpendiculaire PM , indéfiniment prolongée jusqu'en N , ne coupera point la parabole : car elle passera par tous les points également éloignés de V & de F (320). Or les points de la parabole, qui sont au-dessous de M , s'éloignent toujours plus de V que de F : parce qu'ils sont tous, par la construction, à égale distance du foyer & de la directrice. Par conséquent ces points de la parabole, tels que R , seront plus près du foyer F que du point V , & ne seront point atteints par la perpendiculaire PMN , qui passe par tous les points également éloignés de F & de V . Il est clair que la ligne $RF = RZ$, n'est point égale à la ligne RV : puisque la ligne RZ est perpendiculaire & que la ligne RV est oblique à la directrice ZVD . (398.)

De même du point F menez une ligne droite au point Z , & du milieu de cette ligne menez une droite au point R : cette droite sera la tangente au point R : & ainsi de tout autre point de la parabole. $C. Q. F. D.$

MIROIRS PARABOLIQUES.

746. REMARQUE I. L'angle VMF est divisé en deux parties égales par la ligne PMN (407) : donc $VMP = FMP$. Or $VMP = NMH$ (343) : donc $NMH = PMF$. Par conséquent (*fig. 109*) :

I°. Si un rayon de lumière est dirigé selon la ligne HM parallèlement à l'axe SX ; ce rayon de lumière se réfléchira au foyer F ; en faisant un angle de réflexion PMF , égal à son angle d'incidence NMH , sur un point quelconque de la parabole. Pareillement & pour la même raison, si un rayon de lumière est dirigé du foyer F vers un point quelconque M de la parabole;

il se réfléchira , & après la réflexion il se mouvra dans la direction MH , parallèlement à l'axe.

II°. Si la courbe parabolique RMS , venoit à faire une révolution sur elle-même , autour de son axe SX ; elle décrirait un *solide à concavité parabolique* , propre à réfléchir vers un même point F , tous les rayons de lumière qui viendroient heurter sa concavité dans une direction parallèle à l'axe ; & à réfléchir dans une direction parallèle à l'axe , tous les rayons de lumière qui partiroient en tout sens du foyer F , & qui atteindroient un point quelconque de sa concavité.

Telle est la figure & tels sont les effets des *miroirs à concavité parabolique*. Telle est aussi pour le fond des choses , une portion du *porte-voix* ; instrument destiné à donner une même direction parallèle à toutes les molécules aériennes que la langue & la bouche & le métal ont modifiées de concert avec la plus grande force & de la manière la plus convenable. (*Phy.* 778.)

III°. Une ligne quelconque MH , parallèle à l'axe SX , est un diamètre de la parabole : cette ligne MH , prolongée à l'infini , aboutiroit sensiblement à l'autre foyer de la parabole , lequel est dans l'axe à une distance infinie du foyer F. D'où il résulte que selon la remarque précédente , un rayon de lumière , parti d'un foyer & dirigé vers un point quelconque de la concavité parabolique , seroit réfléchi à l'autre foyer. (*fig.* 109.)

IV°. Dans cette courbe , toute ligne droite FM , FR , menée du foyer F à un point quelconque de la parabole , se nomme *rayon vecteur*.

747. REMARQUE II. Nous venons d'observer & de démontrer , que dans la parabole le carré des ordonnées est toujours égal au rectangle des abscisses correspondantes par le paramètre ; & que les ordonnées sont entre elles comme les racines carrées du produit des abscisses correspondantes par le paramètre. Par conséquent. (*fig.* 105) :

Pp ij

I°. Si le parametre & les abscisses SB, SE, SG, SH , restant les mêmes, les ordonnées BM, EM, GM, HM , devenoient toutes proportionnellement plus grandes; la courbe SMM cesseroit d'être une parabole, & deviendrait une *hyperbole*.

II°. Si au contraire le parametre & les mêmes abscisses restant les mêmes, les ordonnées devenoient toutes proportionnellement plus petites; la courbe SMM cesseroit d'être une parabole, & deviendrait une *ellipse* ou une *portion d'ellipse*.

III°. Dans la *parabole*, le carré d'une ordonnée quelconque est toujours égal au rectangle de son abscisse par le parametre. Dans l'*ellipse*, le carré d'une ordonnée au grand axe, est toujours égal au rectangle de son abscisse par une ligne moindre que le parametre de cet axe. Dans l'*hyperbole*, le carré d'une ordonnée est plus grand que le rectangle de son abscisse par le parametre. De-là, comme nous l'avons déjà observé ailleurs (738. IX°), l'étymologie des trois dénominations de ces courbes.

748. PROBLÈME. *Mesurer un espace parabolique, intercepté entre l'axe, la courbe, & une ordonnée quelconque.* (fig. 107.)

SOLUTION Soit $SXCmmS$, l'espace ou la surface parabolique à mesurer: on suppose ici que cet espace est terminé par une courbe exactement parabolique & sans angles sensibles. Autour de cet espace, je décris le rectangle circonscrit $STCXS$; & je démontre que *les deux tiers de ce rectangle sont la valeur de l'espace parabolique à mesurer.* Pour cela,

I°. Je conçois que la ligne ST soit divisée en une infinité de parties égales infiniment petites Sh, be, eT ; & que des points de division soient menés à la courbe, une infinité de droites bm, em, TC , lesquelles seront les élémens du complément $SmmCTS$, ou les

surfaces d'une infiniment petite largeur qui partant toutes de la ligne ST vont se terminer à la courbe exactement parabolique $S m C$.

De l'extrémité de chacun de ces *éléments du complément*, je mene par la pensée, une infinité d'ordonnées mB , mE , CX , à l'axe SX . Il est clair qu'alors tous les éléments bm , em , TC , du complément, seront égaux aux abscisses correspondantes SB , SE , SX ; & que les distances Sb , Se , ST , des droites ou des éléments bm , em , TC , au sommet S du complément, seront égales aux ordonnées correspondantes mB , mE , CX .

Or par la propriété de la parabole (741 & 766); les abscisses SB , SE , SX , sont entre elles comme les carrés de leurs ordonnées mB , mE , CX : donc les éléments bm , em , TC , du complément, seront entre eux comme les carrés de leurs distances au sommet S , ou comme les carrés des lignes Sb , Se , ST .

II°. Nous avons démontré ailleurs (590); que si l'on coupe une pyramide par une infinité de plans parallèles à sa base; ces plans sont entre eux comme les carrés de leurs hauteurs, ou comme les carrés de leurs distances au sommet de la pyramide: donc les éléments bm , em , TC , du complément, qui sont entre eux comme les carrés de leurs distances au sommet S , sont aussi entre eux comme les plans élémentaires d'une pyramide.

Mais la somme des plans élémentaires d'une pyramide, somme qui forme sa solidité, est égale au produit de la base multipliée par le tiers de sa hauteur ou de sa distance au sommet (604): donc la somme des éléments bm , em , TC du complément $SmmCTS$, est égale au produit de la base ou du plus grand élément CT , par le tiers de la hauteur TS , ou par le tiers de la distance du plus grand élément au sommet S où se trouve le premier & le plus petit des éléments de ce complément.

III°. Or la base CT du complément, multipliée par toute la hauteur ST de ce complément, donne le rectangle SXCTS; & la base CT multipliée par le tiers de cette hauteur, ou $CT \times \frac{1}{3}ST$, donne précisément le tiers du même rectangle : donc la somme des éléments du complément, somme qui n'est autre chose que le complément lui-même ou sa surface, est égale au tiers de ce rectangle SXCTS. Donc si de ce rectangle on retranche le complément *SmmCTS*, qui est géométriquement le tiers du rectangle; le reste est la demi-parabole *SmmCXS* : donc cette demi-parabole est exactement le tiers du rectangle SXCTS.

Et comme on peut démontrer de la même manière que l'autre demi-parabole *SXsMMS* est égale aux deux tiers d'un semblable rectangle circonscrit; il s'en suit que cette parabole & toute parabole quelconque, est les deux tiers du rectangle circonscrit : & par-là on a la quadrature de la parabole.

IV°. Si du sommet S de la parabole, on mène une ligne droite à l'extrémité C de sa dernière ordonnée; cette ligne droite SC divisera le rectangle STCXs, en deux parties égales : & alors, si le rectangle est supposé = 1; la demi-parabole fera $\frac{2}{3}$, & le triangle SCXS fera $\frac{1}{3}$.

Ainsi, en réduisant tout au même dénominateur; le rectangle, la demi-parabole, le triangle inscrit, seront entre eux comme $\frac{6}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{6}$, ou comme 6, 4, 2.

Or, en retranchant de la demi-parabole, le triangle inscrit SCXS; le reste est la valeur du segment parabolique *SCmmS* : donc le rectangle circonscrit, la demi-parabole, le triangle inscrit, & le segment parabolique, sont entre eux comme 6, 4, 2, 1.

On aura les mêmes rapports, si au lieu de la demi-parabole, on prend la parabole entière & un rectangle circonscrit à cette parabole : puisque les tous sont entre eux, dans le même rapport que leurs moitiés.

PARAGRAPHE SECOND.

L'ELLIPSE SUR UN PLAN.

749. PROBLÈME. *CONSTRUIRE ou décrire une ellipse sur un plan. (fig. 111.)*

SOLUTION. Nous supposons ici ce que nous démontrerons ailleurs (767), savoir, que dans une ellipse quelconque, les carrés des ordonnées sont entre eux, comme les rectangles de leurs abscisses correspondantes. C'est d'après cette propriété fondamentale de l'ellipse, que doit être résolu le présent problème.

Soient deux lignes droites inégales AX & ax , qui se coupent l'une & l'autre à angles droits par le milieu : ce milieu C sera le centre de l'ellipse que vous allez décrire.

I°. Du point d'intersection C , avec une ouverture de compas CA , décrivez un cercle $ADXDA$: ce cercle sera un cercle circonscrit à l'ellipse que vous allez décrire ; & il va vous servir de règle pour décrire cette ellipse, dont ACX sera le grand axe, & dont aCx sera le petit axe.

II°. Sur le grand axe ACX , élevez tant de perpendiculaires qu'il vous plaira ; en telle sorte que ces perpendiculaires aboutissent toutes de part & d'autre à la circonférence du cercle circonscrit : ces perpendiculaires BM , CD , GM , HM , seront les ordonnées au cercle circonscrit, sur lesquelles on trouvera les parties Bm , Ca , Gm , Hm , qui seront les ordonnées à l'ellipse qu'il faut décrire.

Une ordonnée quelconque GM divise le grand axe AX en deux parties AG & GX : ces deux portions de l'axe sont les abscisses de l'ellipse & du cercle circonscrit.

La principale propriété de l'ellipse, est que les carrés des ordonnées sont entre eux, comme les rectangles des deux parties de l'axe qu'elles coupent, ou

Pp iv

comme les rectangles des deux abscisses ; ainsi que nous le démontrerons ailleurs (767). Selon cette propriété fondamentale de l'ellipse, $Hm \cdot Gm :: HA \times HX \cdot GA \times GX$.

III°. Dans le cercle, le carré d'une ordonnée quelconque est égal au rectangle de ses deux abscisses. Car dans le cercle, $AG \cdot GM :: GM \cdot GX$ (410). Par conséquent $AG \times GX = GM \times GM$. Il s'agit de construire l'ellipse, de telle sorte que le carré d'une ordonnée quelconque Gm , soit au rectangle $GA \times GX$ des deux abscisses ou des deux parties de l'axe qu'elle coupe ; comme le carré d'une autre ordonnée quelconque Hm , est au rectangle $AH \times HX$ des deux parties de l'axe qu'elle coupe aussi.

Pour cela il faut rendre toutes les ordonnées de l'ellipse à décrire, proportionnellement plus petites que les ordonnées correspondantes du cercle circonscrit. Car alors les carrés des ordonnées au cercle étant égaux aux rectangles de leurs abscisses ; les carrés des ordonnées à l'ellipse seront *proportionnels* aux rectangles des abscisses, qui sont les mêmes que celles du cercle.

IV°. Ainsi pour avoir la grandeur d'une ordonnée quelconque à l'ellipse, par exemple, de l'ordonnée Gm ; cherchez une quatrième proportionnelle au rayon du cercle $CA = CD$, au demi-petit axe Ca de l'ellipse, & à l'ordonnée GM du cercle, par cette proportion : $CD, Ca :: GM . x = Gm$ (413). Vous aurez l'ordonnée Gm à l'ellipse, proportionnelle à l'ordonnée GM au cercle.

Cherchez de même la grandeur de l'ordonnée Hm à l'ellipse, en faisant cette proportion : $CD . Ca :: HM . x$. Vous aurez l'ordonnée Hm à l'ellipse, proportionnelle à l'ordonnée HM au cercle. En faisant la même opération sur toutes les ordonnées au cercle, on aura toutes les ordonnées à l'ellipse, toujours propor-

tionnelles aux ordonnées correspondantes du cercle.

V°. La courbe $A m a m X m x m A$, qui passera par l'extrémité de toutes ces ordonnées, proportionnelles aux ordonnées au cercle circonscrit, fera l'*ellipse qu'il falloit décrire*. Donc; en construisant l'ellipse ou en supposant l'ellipse construite d'après cette théorie, on pourra en connoître la nature & les propriétés principales.

Selon cette théorie, on peut supposer l'ellipse toute construite sur cette proportion continue $\div CD = CA . Ca . GM . Gm . HM . Hm$; & ainsi de suite à l'infini.

VI°. Par la propriété fondamentale du cercle, le carré d'une ordonnée quelconque KM est égal au rectangle des abscisses $KA \times KX$; donc, puisque l'ordonnée Km de la courbe qu'on vient de décrire, est proportionnelle à l'ordonnée KM du cercle; il s'ensuit que le carré de l'ordonnée Km fera, non égal, mais proportionnel au même rectangle des abscisses $KA \times KX$, lesquelles abscisses sont les mêmes pour le cercle & pour l'ellipse. On peut dire la même chose de chaque ordonnée au cercle & à l'ellipse: donc dans la courbe qu'on vient de décrire, les carrés des ordonnées sont par-tout entre eux, comme les rectangles des abscisses.

Or cette propriété est la propriété caractéristique de l'ellipse, comme nous le ferons voir dans la suite; donc la courbe que nous venons de décrire, est l'ellipse même dont nous avons vu la formation dans le cône.

VII°. Une ligne $m C m$, menée d'un point quelconque de cette courbe par le centre C à un point opposé, est un *diametre de l'ellipse*.

L'ordonnée $p F p$, qui passe par l'un des deux foyers indifféremment, est le *parametre de l'ellipse*.

VIII°. On peut également construire une ellipse, en menant les ordonnées au petit axe. (*fig. 114.*)

Pour cela, décrivez un cercle $N a M b N$, dont le petit axe donné NCM soit le diametre; & ayant mené

le grand axe donné ACB perpendiculairement sur le milieu C du petit axe , cherchez tant d'ordonnées rs, rs , qu'il vous plaira, telles que chaque ordonnée à l'ellipse que vous voulez décrire, soit à l'ordonnée correspondante & plus petite du cercle inscrit; comme le grand axe est au petit axe : la courbe NAMBN, qui passera par l'extrémité déterminée de toutes ces ordonnées, fera une ellipse; & elle aura les mêmes propriétés que la précédente.

DIVERS COROLLAIRES.

750. COROLLAIRE I. *La somme de toutes les ordonnées au cercle, est à la somme de toutes les ordonnées à l'ellipse; comme une ordonnée au cercle, est à l'ordonnée correspondante à l'ellipse.* (fig. III.)

DÉMONSTRATION. Il est évident qu'il y a un rapport quelconque entre l'ordonnée CD au cercle, & l'ordonnée correspondante Ca à l'ellipse. Or par la construction, ce même rapport se trouve entre toutes les ordonnées correspondantes du cercle & de l'ellipse. Donc toutes les ordonnées au cercle sont les antécédens, & toutes les ordonnées à l'ellipse sont les conséquens de tout autant de raisons géométriques, dans lesquelles la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent. (222.) C. Q. F. D.

751. COROLLAIRE II. *La surface d'un cercle circonscrit à l'ellipse, est à la surface de l'ellipse inscrite, comme le grand axe de l'ellipse est à son petit axe.* (fig. III.)

DÉMONSTRATION. Comme la somme de toutes les ordonnées qu'on peut mener dans un cercle, est évidemment égale à la surface de ce cercle; & que la somme de toutes les ordonnées qu'on peut mener dans l'ellipse, est aussi évidemment égale à la surface de

l'ellipse; il est clair que la surface du cercle est à la surface de l'ellipse, comme la somme de toutes les ordonnées au cercle est à la somme de toutes les ordonnées à l'ellipse.

Or par le corollaire précédent, la somme de toutes les ordonnées au cercle circonscrit, est à la somme de toutes les ordonnées à l'ellipse inscrite; comme une ordonnée quelconque CD du cercle, est à l'ordonnée correspondante Ca de l'ellipse.

Mais $CD=CA$ est la moitié du grand axe de l'ellipse; & $Ca=Cx$ est la moitié du petit axe de l'ellipse: donc les moitiés étant entre elles comme leurs tous (163), la surface du cercle sera aussi à la surface de l'ellipse; comme le double de CD ou de CA , est au double de Ca , ou comme le grand axe est au petit axe.

Par conséquent, si le grand axe AX est au petit axe ax , comme 6 est à 3, ou comme 9 est à 10, ou comme 1000 est à 999; la surface du cercle circonscrit sera à la surface de l'ellipse inscrite, comme 6 est à 3, ou comme 9 est à 10, ou comme 1000 est à 999: & ainsi du reste. C. Q. F. D.

752. COROLLAIRE III. *La surface d'une ellipse est égale à la surface d'un cercle, dont le diamètre est moyen proportionnel entre le grand axe & le petit axe de l'ellipse.* (fig. 111.)

DÉMONSTRATION. Nommons C , la surface du cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse: nommons E , la surface de l'ellipse: nommons M , la surface du cercle décrit sur la moyenne proportionnelle: nommons a & b , le grand axe & le petit axe de l'ellipse: nommons m , la moyenne proportionnelle (414) entre le grand axe & le petit axe.

1°. Par l'hypothèse, on aura d'abord cette proportion continue: $\div a.m.b$. Dans cette proportion con-

tinue, le premier terme est au troisieme, comme le quarré du premier est au quarré du second (234). Donc on aura aussi cette proportion : $a.b :: aa.mm$.

Or par le corollaire précédent : $C.E :: a.b$: par conséquent (168), on aura aussi : $C.E :: aa.mm$.

II°. Mais les surfaces des cercles étant entre elles, comme les quarrés de leurs rayons & de leurs diametres (501); la surface du cercle C, construit sur le grand axe a , sera à la surface du cercle M, construit sur la moyenne proportionnelle m ; comme aa est à mm . On aura par conséquent, $C.M :: aa.mm$.

III°. On vient de voir que $C.E :: aa.mm$. Donc E est égal à M : puisque ces deux grandeurs E & M ont un même rapport avec la grandeur mm . Par conséquent la surface E de l'ellipse, est égale à la surface d'un cercle, dont le diametre est moyen proportionnel entre le grand axe & le petit axe de l'ellipse. C. Q. F. D.

753. PROBLÈME I. *Trouver à très-peu près la surface d'une ellipse, dont on connoît le grand axe & le petit axe. (fig. 111.)*

SOLUTION. Trouvez une moyenne proportionnelle entre le grand axe & le petit axe (414): cette moyenne proportionnelle sera l'axe ou le diametre d'un cercle égal en surface à l'ellipse; selon le corollaire précédent. Par conséquent, en prenant le produit de la circonférence de ce cercle par la moitié de son rayon, on aura à très-peu près la surface de ce cercle (481): on aura par-là même, la surface de l'ellipse en question, qui est égale à celle de ce cercle. (752.)

Si on pouvoit avoir géométriquement la quadrature du cercle, on auroit avec la même précision la quadrature de l'ellipse: mais comme on ne peut avoir qu'à peu près la quadrature de celui-là, on n'a aussi qu'à peu près la quadrature de celle-ci.

754. PROBLÈME II. *Trouver la solidité d'un sphéroïde ellipsoïdal, dont on connoît le grand axe & le petit axe.* (fig. 111.)

SOLUTION. Soient une ellipse, & un cercle circonscrit à cette ellipse. Nommons a , le grand axe de l'ellipse & le diamètre du cercle : nommons b , le petit axe de l'ellipse : nommons x , les ordonnées au cercle : nommons y les ordonnées à l'ellipse. Par la construction (749), on a $x.y :: a.b$; & $x^2.y^2 :: aa.bb$. (225.)

1°. Si le demi-cercle ADXCA, & la demi-ellipse AaXCA, font ensemble une révolution autour de leur axe commun ACX ; il est clair que les ordonnées BM, KM, GM, HM, au cercle, décriront une *sphere* ; & que les ordonnées correspondantes à l'ellipse, décriront un *sphéroïde ellipsoïdal*. Il est clair que la solidité de la sphere, sera la somme des plans circulaires décrits par les ordonnées au cercle ; & que la solidité du sphéroïde ellipsoïdal, sera la somme égale des plans circulaires décrits par la révolution des ordonnées à l'ellipse. Ces plans circulaires sont entre eux comme les quarrés de leurs rayons (500), lesquels rayons sont d'une part les ordonnées au cercle ; & de l'autre les ordonnées à l'ellipse. On aura donc cette proportion : la solidité S de la sphere, est à la solidité E du sphéroïde ellipsoïdal, comme x^2 est à y^2 ; ou $S.E :: x^2.y^2$.

Par conséquent, ayant cherché & trouvé la solidité S de la sphere (608) ; on aura dans cette dernière proportion, trois termes connus, qui feront trouver le quatrième inconnu E, ou la solidité du sphéroïde ellipsoïdal. Ou bien,

II°. Concevez deux cylindres décrits par la révolution des lignes ST & OP, autour de l'axe AX. Ces deux cylindres, circonscrits l'un à la sphere & l'autre

au sphéroïde, auront même hauteur AX : ils seront donc entre eux en solidité, comme leurs bases qui sont des cercles décrits l'un par le grand axe, & l'autre par le petit axe : donc ils seront entre eux en solidité, comme le quarré du grand axe est au quarré du petit axe. Nommant donc ces deux cylindres C & c ; on aura $C.c :: aa.bb$.

Or puisqu'on a déjà $x^2.y^2 :: aa.bb$; & $S.E :: aa.bb$; on aura aussi, $S.E :: C.c$. C'est-à-dire, la solidité de la sphere, est à la solidité du sphéroïde ellipsoïdal ; comme la solidité du cylindre circonscrit à la sphere, est à la solidité du cylindre circonscrit à l'ellipse. Or la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit (624) : donc le solide ellipsoïdal sera aussi les deux tiers du cylindre circonscrit, ou du cylindre qui a pour diamètre le petit axe, & pour hauteur le grand axe.

IV°. Il faut observer ici que la même solution & la même démonstration auroient lieu ; si les ordonnées, au lieu d'être menées au grand axe, étoient menées au petit axe. (fig. 114.)

Soient une ellipse $ANBMA$, & un cercle $aNbMa$ inscrit au petit axe de l'ellipse. Les ordonnées rs , rs , seroient proportionnelles aux ordonnées correspondantes d'un cercle dont ACB seroit le diamètre ; par la construction (749) : elles seront donc aussi proportionnelles aux ordonnées correspondantes d'un cercle dont aCb est le diamètre ; puisque dans deux cercles inégaux, tous les diamètres, tous les rayons, toutes les cordes, tous les arcs, toutes les parties semblables, sont des grandeurs proportionnelles (475 & 648). Par conséquent si la demi-ellipse $NAMCN$, & le demi-cercle $NambCN$, font ensemble une révolution autour de leur axe commun NCM ; ils décriront, l'une un solide ellipsoïdal, l'autre une sphere, dont les solidités seront respectivement la somme

égale des plans circulaires inégaux, décrits pendant la révolution, d'une part par les ordonnées à l'ellipse; de l'autre, par les ordonnées au cercle.

En faisant donc les mêmes raisonnemens & les mêmes proportions que ci-dessus; on trouvera que la solidité E du sphéroïde ellipsoïdal ANBMA, est à la solidité S de la sphere inscrite $aNbMa$; comme le quarré aa du grand axe, est au quarré bb du petit axe; ou comme le cylindre STVX circonscrit au grand axe, est au cylindre OPKL circonscrit au petit axe.

SOLIDITÉ ET SURFACE DU GLOBE TERRESTRE.

755. OBSERVATION. Le problème que nous venons de résoudre, sert à faire trouver à très-peu près le rapport du sphéroïde terrestre, avec une vraie sphere: comme nous allons l'expliquer. (*fig.* 114.)

1°. On fait que la Terre n'est point un vrai globe, mais une espece de sphéroïde ANBMA, applati vers ses poles N & M, & alongé vers son équateur ACB. Si l'on conçoit un plan, qui passant par le centre & par les poles de la terre, du midi au nord, divise cette énorme masse en deux parties égales; ce plan formera dans la terre une section AMBNA, qui sans être peut-être une vraie ellipse, ne différera que fort peu d'une ellipse dont AB seroit le grand axe; & NM, le petit axe; & si cette section fait une révolution sur le petit axe NM, elle décrira, abstraction faite des montagnes, un *sphéroïde ellipsoïdal* qui sera notre globe terraque, renflé vers l'équateur & applati vers les poles.

En supposant que l'on connoît le grand axe & le petit axe de ce sphéroïde (*Phy.* 1375); on en trouvera, par le problème précédent, la solidité, telle à peu près que nous l'avons marquée ailleurs.

II°. Quant à la surface de ce sphéroïde, on ne peut

guere la trouver géométriquement, sans le secours du calcul différentiel & du calcul intégral, ou sans le secours de quelques autres méthodes à peu près aussi compliquées & aussi difficiles : ressources assez inutiles dans la question présente, dans laquelle on ne peut avoir, avec la précision géométrique, ni le grand axe, ni le petit axe ; & dans laquelle, avec le secours des calculs les plus géométriques & les plus rigoureux, on ne peut avoir dans la réalité, que des *à peu près*, tels que nous allons les trouver sans grand appareil.

Si la terre étoit une vraie sphere $NAMB$, ayant pour diamètre le petit axe $NM = ab$; sa surface seroit égale à la surface convexe du cylindre circonscrit $OPQR$: si la terre étoit une autre vraie sphere, qui eût pour diamètre le grand axe ACB ; sa surface seroit égale à la surface convexe du cylindre circonscrit $STVX$. (573.)

La surface de l'ellipse $ANBMA$ est égale à la surface d'un cercle vNm , dont le diamètre vCv est moyen proportionnel entre le grand axe & le petit axe de l'ellipse (752). En supposant donc, (comme on peut le supposer sans crainte d'aucune erreur bien considérable, dans un sphéroïde aussi peu aplati que l'est la terre) ; en supposant, dis-je, que la surface du sphéroïde terrestre soit égale à la surface d'une sphere dont vCv seroit le diamètre ; on trouvera que cette surface est la même que la surface convexe du cylindre $GHLK$, circonscrit au cercle dont le diamètre vCv est moyen proportionnel entre le grand axe & le petit axe.

Cette surface convexe du cylindre $GHLK$, ne sera pas dans la rigueur géométrique, la surface exacte & précise du sphéroïde terrestre : mais elle en approchera assez pour qu'on puisse se dispenser de la chercher & désespérer de la trouver avec plus de précision dans la réalité. On trouvera cette surface du sphéroïde terrestre, telle

telle à peu près que nous l'avons marquée dans le second volume de la théorie des êtres sensibles. (*Phy.* 496.)

L'ELLIPSE ENCORE SUR UN PLAN.

756. *Décrire d'une autre manière, une ellipse sur un plan.* (fig. 103.)

SOLUTION. Sur un plan, plantez un petit piquet cylindrique & perpendiculaire en C, auquel vous attacherez les deux extrémités d'une ficelle qui puisse tourner autour du piquet.

I°. Si un crayon perpendiculaire au plan, & placé à l'extrémité des deux branches de la ficelle qu'il tend toujours également, fait une révolution autour du piquet C; ce crayon décrira sur le plan un cercle ADXDA.

II°. Mais si sur le même plan, au lieu d'un seul piquet, vous en plantez deux, l'un en F & l'autre en f, auxquels vous attacherez les deux extrémités de la même ficelle; le même crayon perpendiculaire au plan, & toujours placé à l'extrémité des deux branches égales ou inégales de la ficelle, décrira une autre courbe AaXxA, dont les deux axes AX & ax seront inégaux : cette courbe sera une ellipse; comme nous le ferons voir bientôt.

On peut donc considérer une ellipse, comme un cercle dont le centre C s'est écarté également de part & d'autre en F & en f; dont un diamètre AX s'est allongé plus ou moins aux dépens du diamètre perpendiculaire ax.

757. DÉFINITION I. Ces deux points F & f du grand axe, sont les foyers de l'ellipse; & chaque foyer est éloigné des deux extrémités du petit axe ax, de la grandeur du demi-grand axe CA ou CX. Ces deux foyers sont à égale distance du centre C de l'ellipse;

& la distance plus ou moins grande FC d'un foyer quelconque au centre, est l'*excentricité de l'ellipse*.

Telle est la courbe plus ou moins excentrique que décrivent dans les espaces célestes, tous les globes opaques autour de leur centre de mouvement, qui est le soleil pour les comètes & pour les planètes principales; qui est une planète principale pour les planètes secondaires (*Phy.* 1198). Le centre de mouvement, immobile ou mobile, est toujours, non au centre C de l'ellipse, mais hors du centre & dans un des foyers F, sur le grand axe de l'ellipse plus ou moins alongée AaXx A.

758. DÉFINITION II. L'ellipse a un paramètre, aussi bien que la parabole. Ce paramètre de l'ellipse, est une troisième proportionnelle au grand axe & au petit axe (413). Ainsi pour avoir le paramètre d'une ellipse dont on connoît les deux axes, on n'a qu'à faire cette proportion : le grand axe A, est au petit axe a , comme ce petit axe a , est au paramètre p ; c'est-à-dire, $A. a :: a. p$. Ainsi $A p = a a$.

On démontre dans tout traité complet des sections coniques que ce paramètre de l'ellipse est égal à la double ordonnée $p F p$ ou $p f p$, qui passe par l'un des foyers & qui est perpendiculaire au grand axe AX.

Pour rendre plus sensible cette théorie de l'ellipse, nous allons en donner une nouvelle formation, qui n'est qu'une application du problème précédent. (*fig.* 106.)

759. APPLICATION. Etant donnée sur un plan une ligne droite d'une grandeur quelconque AX, sur laquelle on aura pris ou donné à volonté deux points F & f également distans des deux extrémités A & X; prenez hors de cette ligne une infinité de points successifs ABaDXE x GA, tels que la somme des distances de chacun de ces points aux deux points F & f soit constante & toujours égale à la ligne donnée AX.

la courbe qui passera par tous ces points sera une ellipse.
(fig. 106.)

Ou bien, la ligne donnée AX étant indéfinie, plantez un piquet à chacun des points donnés F & f; & attachez les deux extrémités d'un fil plus ou moins long, à chaque piquet. Après quoi, avec un crayon que vous tiendrez toujours perpendiculaire au plan, & qui tendra toujours également les deux branches du fil, décrivez une courbe autour des deux piquets : cette courbe sera encore une ellipse. La ligne AX en sera le grand axe : la ligne ax en sera le petit axe : le point C en sera le centre ; les points F & f, également éloignés du centre, également éloignés des deux extrémités du grand axe, en sont les foyers.

I°. Par la construction, la ligne quelconque FBf ou FEf, menée d'un foyer à la circonférence & de la circonférence à l'autre foyer, est égale au grand axe AX ; puisque les deux parties de cette ligne FBf sont égales à toute la longueur du fil tendu, aussi bien que la ligne FXf = AX.

II°. Par la construction encore, la courbure de cette ellipse est égale de part & d'autre, à égale distance d'une extrémité quelconque du grand axe. Ainsi la courbure est égale en D & en E, en A & en X, en G & en B, en a & en x.

Mais cette courbure va en diminuant de part & d'autre, depuis une extrémité quelconque du grand axe, jusqu'aux extrémités du petit axe : de sorte que l'ellipse a son plus grand applatissement en a & en x, & son moindre applatissement ou sa plus grande courbure en A & en X.

III°. Par la construction enfin, les points a & x sont également éloignés des deux foyers : les deux lignes Fa & fa, prises ensemble, sont égales au grand axe AB : chaque foyer est à égale distance du centre, à égale distance des deux extrémités du grand axe, à

égale distance aussi des deux extrémités du petit axe.

760. REMARQUE. Si on suppose que le centre d'une planète ou d'une comète décrive cette courbe autour du soleil immobile dans un foyer F (fig. 106.) :

1°. Une ligne droite quelconque FA, FD, FE, FX, menée du centre du soleil au centre de la planète ou comète, s'appelle un *rayon vecteur* de cette planète ou comète.

II°. La planète ou comète sera dans sa *moyenne distance* en a & en x : elle sera dans sa *plus grande distance* ou dans son *aphélie* en X : elle sera dans sa *plus petite distance* ou dans son *périhélie* en A : la ligne FC sera son *excentricité*.

CERCLES OSCULATEURS.

761. OBSERVATION. Comme l'ellipse est une courbe d'une infinité de côtés d'inégale courbure ; il est clair que trois points contigus d'un arc elliptique, peuvent être communs avec trois points contigus d'une circonférence de cercle plus ou moins grand. (fig. 106.)

Car en supposant le point du milieu de l'arc elliptique BAG, placé sur le point du milieu de l'arc circulaire bAg ; on conçoit que l'arc circulaire peut s'ouvrir ou se resserrer à l'infini, jusqu'à ce que les deux points contigus de l'arc circulaire, se confondent avec les deux points contigus de l'arc elliptique.

762. DÉFINITION. Un cercle, dont trois points contigus se confondent avec trois points contigus d'une ellipse, se nomme *cercle osculateur*. Ce cercle est évidemment possible, selon l'observation précédente : nous allons donner une idée de sa nature & de ses usages. (fig. 106.)

1°. Il est évident que le cercle osculateur devient d'autant *plus grand*, que l'arc infiniment petit qu'il touche dans la partie concave de l'ellipse, est plus *aplati* ; & que le cercle osculateur devient d'autant *plus*

petit, que l'arc elliptique qu'il atteint, est plus courbe ou moins applati.

Ainsi il y a autant de différens cercles osculateurs à l'ellipse, qu'il y a de points dans tout l'arc ABa , qui en embrasse le quart. Le cercle osculateur du point A ou du point X , est le plus petit : au lieu que le cercle osculateur du point a ou du point x , est le plus grand. Le rayon du cercle osculateur va en croissant, depuis le point A jusqu'au point a : il va ensuite en décroissant, depuis le point a jusqu'au point X . De même, le rayon du cercle osculateur va en croissant, depuis le point X jusqu'au point x ; & en décroissant, depuis le point x jusqu'au point A .

II°. Le rayon du cercle osculateur, en A & en X , se confond avec une partie du grand axe AX ; mais il n'atteint pas jusqu'au centre C de l'ellipse : parce que la courbure de l'ellipse est plus grande en A & en X , que celle d'un cercle qui auroit pour rayon la moitié CA du grand axe. Il faut par conséquent que l'arc du cercle se resserre davantage, & que son rayon AF se raccourcisse en-deçà du centre C .

Le rayon du cercle osculateur, en a & en x , se confond avec une partie du petit axe ; mais il aboutit en n , plus ou moins au-delà du centre C de l'ellipse : parce que la courbure de l'ellipse est moindre en a & en x , que celle d'un cercle qui auroit pour rayon la moitié du petit axe. Il faut donc que l'arc du cercle s'ouvre davantage, & que son rayon s'allonge au-delà du centre C .

Dans les points intermédiaires, le rayon du cercle osculateur devient alternativement plus court & plus long, à mesure que l'arc devient plus courbe ou plus applati : mais alors le rayon ne se confond plus avec les axes, & n'est plus dirigé vers le centre C de l'ellipse.

III°. Les Astronomes ont imaginé le *cercle oscula-*
Qq iij

teur, pour pouvoir rapporter les différens arcs d'une courbe différente du cercle, aux arcs d'un cercle; ou pour pouvoir prendre chaque arc infiniment petit d'une courbe différente du cercle, pour l'arc d'un cercle qui auroit la même courbure que cet arc infiniment petit avec lequel se confondroit un arc égal du cercle. Cet arc infiniment petit de la courbe différente du cercle, par exemple, d'une ellipse, aura évidemment les mêmes propriétés & donnera les mêmes résultats, que s'il appartenait au cercle avec lequel on le compare. Le cercle osculateur a lieu dans la parabole & dans l'hyperbole, ainsi que dans l'ellipse.

P R O B L È M E.

763. Trouver une tangente à un point quelconque d'une ellipse, dont on connoît le grand axe & le rayon vecteur. (fig. 108.)

SOLUTION. 1°. Étant donné sur l'ellipse $SxXs$ un point quelconque M , prolongez le rayon vecteur fM , de façon que MV soit égal à MF ; & menez du point F , une ligne droite au point V .

II°. Divisez par le milieu m cette ligne FV , par une perpendiculaire PMN : cette perpendiculaire sera une tangente à l'ellipse, la tangente au point M .

DÉMONSTRATION. 1°. Dans le triangle rectiligne $MFVM$, les deux côtés MV & MF sont égaux, par la construction. Donc si du point M , avec un rayon MV ou MF , on décrit un arc de cercle VPF ; le point M sera à la fois, un point de l'ellipse, le sommet du triangle $MFVM$, & le centre de l'arc circulaire VPF .

II°. Si la ligne ou la corde VmF , est coupée en deux parties égales par la perpendiculaire NP ; cette perpendiculaire, indéfiniment prolongée, passera par le centre du cercle en M (467), lequel centre du cercle est un point de l'ellipse.

III°. Cette perpendiculaire PMN, indéfiniment prolongée, ne coupera point l'ellipse : car elle passera par tous les points également éloignés de F & de V (320). Or les points de l'ellipse, qui sont au-dessus ou au-dessous du point M, s'éloignent toujours plus de V que de F : par conséquent, tous les points de l'ellipse qui sont au-dessus & au-dessous de M, seront plus près de F que de V ; & se trouveront au-dessous & hors de la tangente PMN qui passe par tous les points également distans de F & de V. Il est évident que tout point x de l'ellipse, pris au-dessus ou au-dessous du point M, est plus près du point F que du point V. Par conséquent la ligne PMN ne touche l'ellipse qu'en un seul point M, & est la tangente à ce point M.

De même, & pour les mêmes raisons, la ligne ST, qui divise en deux parties égales l'arc FSK, est la tangente au point a .

II°. Si l'on prend pour rayon vecteur le rayon FM ; il faudra prolonger ce rayon, jusqu'à ce que Mv soit égal à Mf. Après quoi, on décrira l'arc vNf ; & la ligne NM, qui divise & cet arc & la corde en deux parties, sera la tangente au point M : ce que l'on démontrera, comme nous venons de démontrer que la ligne PM est tangente à ce même point. C. Q. F. D.

MIROIRS ELLIPTIQUES.

764. REMARQUE. L'angle VME est divisé en deux parties égales par la ligne ou par la tangente NMP (407) : donc $\angle PMV = \angle PME$. Or $\angle PMV = \angle Mf$ (343) : donc $\angle PMf = \angle Mf$. Par conséquent (fig. 1208.),

I°. Si un rayon de lumière est dirigé d'un foyer quelconque F, à un point quelconque M de la circonférence intérieure de l'ellipse ; ce rayon se réfléchira d'un autre foyer f, en faisant un angle de réflexion

Qq iv

NMf égal à son angle d'incidence FMP. Car le point M de l'ellipse, où ce rayon se réfléchir, est un plan infiniment petit qui fait partie de la tangente PMN.

II°. L'angle ν MF est divisé de même en deux parties égales, par la tangente NM : ainsi l'angle ν MN est égal à l'angle ν MN; & celui-ci est égal à l'angle opposé au sommet FMP. Par conséquent, un rayon de lumière fM, parti du point f, se réfléchira en F; faisant un angle de réflexion PMF, égal à son angle d'incidence NMf.

De même l'angle FaK est divisé en deux parties égales par la tangente ST; & un rayon de lumière fa se réfléchira en F, faisant un angle de réflexion SaF, égal à son angle d'incidence TaF.

III°. Si la courbe elliptique SMX venoit à faire une révolution sur elle-même, autour de son axe SX; elle décriroit un *solide à concavité elliptique*, propre à réfléchir dans un même point F tous les rayons d'une bougie allumée au point f; & réciproquement. Un segment xSs de ce solide concave, sera un *miroir concave elliptique*.

PARAGRAPHE TROISIEME.

SECTIONS CONIQUES DANS LE CONE.

765. OBSERVATION. NOUS avons fait voir au commencement de ce Traité, comment se forment les sections coniques dans le cône, par le moyen d'un plan qui coupe de différentes manieres ce cône, droit ou incliné, & d'une grandeur quelconque indéfiniment (738). Il nous reste à démontrer ici, que ces courbes ont dans le cône lui-même, les mêmes propriétés fondamentales que nous leur avons supposées sur un plan; & que par conséquent, les courbes que nous

avons observées sur un plan, sont les vraies sections coniques tirées du cône.

THÉORÈME I.

766. Dans la parabole, les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes. (fig. 107.)

DÉMONSTRATION. Concevez que par le point d passe le plan d'un cercle parallèle à la base du cône : concevez encore que par le sommet A du cône, soit faite une section triangulaire BAD , perpendiculaire à la base du cône,

I°. Si par le point S on fait une section parabolique MSM , perpendiculaire sur le plan du triangle BAD ; le plan du cercle bdb ou BDB , & le plan de la parabole, se couperont aux points mm ou MM . Or le plan du cercle & le plan de la parabole sont chacun perpendiculaires au plan du triangle; donc leur commune section mm ou MM , sera perpendiculaire au plan du triangle; puisque cette section est une ligne du plan de la parabole, lequel est supposé perpendiculaire au plan du triangle. Donc nm ou NM sera aussi perpendiculaire tant au diamètre bd ou BD du cercle, qu'à l'axe SN de la parabole. Donc les lignes nm & NM sont des ordonnées communes aux cercles & à la parabole.

II°. Or, par la propriété fondamentale du cercle, on a cette proportion ; $nm \cdot NM :: nb \times nd \cdot NB \times ND$:

Et à cause des paralleles AB & SN , qui donnent $nb = NB$, on aura $nm \cdot NM :: nd \cdot ND$. (220.)

III°. Mais à cause des triangles semblables Snd & SND , on a cette autre proportion : $nd \cdot ND :: Sn \cdot SN$. Par conséquent, en comparant avec cette dernière

proportion, la proportion qui précède, on aura : nm .
 $NM :: Sn . SN$. (168.)

Or cette dernière proportion signifie que les carrés des ordonnées nm & NM , sont entre eux comme les abscisses correspondantes nS & NS . Par conséquent cette courbe MSM est une parabole, semblable à celle que nous avons construite sur un plan : puisqu'elle a les mêmes propriétés, ayant un même rapport entre ses ordonnées & ses abscisses (741). C. Q. F. D.

THÉORÈME II.

767. Dans l'ellipse, les carrés des ordonnées sont entre eux, comme les rectangles des abscisses correspondantes. (fig. 112.)

DÉMONSTRATION. 1°. Faites passer par la section elliptique RER , deux plans parallèles à la base du cône : vous aurez deux cercles vxv & VXV , qui couperont le plan de la section elliptique ; & on verra, comme dans le théorème précédent, que nm & NM sont des ordonnées communes aux cercles & à l'ellipse. Faites aussi passer un plan par le point A & par l'axe ENR de la section elliptique : vous aurez un triangle BAD , dont les côtés passeront par les extrémités du grand axe de la section elliptique.

II°. Par la propriété fondamentale du cercle (410), vous aurez : $nm . NM :: nx \times nv . NX \times NV$.

Mais les triangles semblables Env & ENV , donnent d'une part, $nv . NV :: En . EN$.

Et les autres triangles semblables RNX & Rnx , donnent d'une autre part, $nx . NX :: Rn . RN$.

III°. Multipliez ces deux dernières proportions l'une par l'autre : les produits seront encore en proportion (214) ; & vous aurez : $nv \times nx . NV \times NX :: En \times Rn . EN \times RN$.

Reprenant donc la première proportion, vous aurez :
 $nm : NM :: En \times nR : EN \times RN.$ (168.)

Or dans cette dernière proportion, les deux derniers termes, qui forment la seconde raison, sont les rectangles des abscisses correspondantes : donc dans cette courbe, les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les rectangles des abscisses correspondantes.

IV°. Si on construit une ellipse sur un plan, d'après la théorie que nous avons donnée ailleurs (749); après l'avoir coupée obliquement par deux cercles dont les circonférences atteignent chacune deux points de la courbe elliptique également éloignés du sommet E ou R, on trouvera & on démontrera de la même manière, que dans cette ellipse les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les rectangles des abscisses correspondantes. Par conséquent, cette courbe RER est une ellipse, de même que celle que nous avons observée sur un plan : puisqu'elle a la même nature & les mêmes propriétés, ayant un même rapport entre les quarrés de ses ordonnées & les rectangles de ses abscisses correspondantes. On peut donc appliquer à la courbe REN, tout ce que nous avons dit ailleurs de l'ellipse considérée sur un plan. C. Q. F. D.

THÉORÈME VII.

768. Dans une hyperbole quelconque ; les quarrés des ordonnées sont entre eux, comme les produits ou les rectangles des abscisses correspondantes. (fig. 115.)

DÉMONSTRATION. Soit l'hyperbole IHP, dont une ordonnée est PK, & dont les abscisses correspondantes à cette ordonnée, sont HK & OK. (738. V°). Il s'agit de démontrer que $PK^2 :: HK \times OK :: HP \times OK$.
 P. A cause des cercles parallèles BDB & bdb, on a ;

par la propriété fondamentale du cercle, $\overline{PK} = KD \times KB$, & $\overline{pk} = kd \times kb$: donc $\overline{PK} . \overline{pk} :: KD \times KB . kd \times kb$.

II°. A cause des deux triangles semblables BKO & bkO, on a $KB . kb :: KO . kO$.

Et à cause des deux autres triangles semblables HKD & Hkd, on a aussi $KD . kd :: HK . Hk$.

Multipliant donc les uns par les autres les termes de ces deux dernières proportions, on aura la proportion suivante : $KD \times KB . kd \times kb :: HK \times OK . Hk \times Ok$.

III°. On a eu d'abord $\overline{PK} . \overline{pk} :: HK \times OK . Hk \times OK$. Donc puisque dans ces deux dernières proportions, la seconde raison est la même ; les deux premières raisons sont égales entre elles, & on peut substituer l'une à l'autre : donc $\overline{PK} . \overline{pk} :: HK \times OK . Hk \times OK$. Or cette dernière proportion signifie précisément que les quarrés des ordonnées sont entre eux, comme les rectangles des abscisses correspondantes : ainsi que l'énonce le théorème, C. Q. F. D.

769. HYPOTHESE. Soit un cône droit BAD, d'une grandeur indéfinie. (fig. 125.)

I°. Coupons ce cône par le sommet A, avec un plan perpendiculaire à la base : la section sera un triangle MAN.

Coupons le même par le côté en H, avec un plan perpendiculaire à la base, & parallèle à celui qui vient de donner le triangle : la section sera une hyperbole IHP.

II°. Si l'on conçoit que la section triangulaire & la section hyperbolique soient posées sur un même plan, en telle sorte que les côtés du triangle embrassent les branches de la courbe hyperbolique, sans la toucher ;

ces côtés du triangle seront les *asymptotes de l'hyperbole*. Nous allons nous borner à considérer ici les branches & les asymptotes de l'hyperbole, dans le cône.

T H É O R È M E I V.

770. *Dans l'hyperbole, les branches s'approchent toujours de plus en plus des asymptotes, sans jamais les toucher, quelque prolongées qu'on les suppose. (fig. 125.)*

DÉMONSTRATION. I°. En supposant ici les deux sections dont nous venons de parler dans l'hypothèse précédente; il est clair que les côtés du triangle MAN, seront appuyés sur le diamètre MN du cercle qui forme la base du cône; & que les branches de l'hyperbole parallèle IHP, seront appuyées sur une corde PI du même cercle, corde parallèle au diamètre.

Or plus le cône fera prolongé, plus le cercle de la base deviendra grand; & plus ce cercle deviendra grand, plus la corde qui n'est éloignée du centre du cercle que d'une quantité déterminée, par exemple, d'un pied, approchera de l'égalité avec le diamètre de ce cercle. Donc les branches de l'hyperbole, appuyées sur la corde parallèle au diamètre, s'approcheront toujours de plus en plus à l'infini des côtés du triangle appuyé sur le diamètre.

II°. Mais quelque prolongé qu'on suppose le cône; ou quelque grand que l'on suppose le cercle de la base; on conçoit clairement que la corde différera toujours du diamètre, & fera toujours plus petite que le diamètre: donc les branches de l'hyperbole n'auront jamais une ouverture égale à celle des côtés du triangle.

III°. Mais si l'on conçoit pour un moment que les branches de l'hyperbole sont sur un même plan que

les côtés du triangle ; ces côtés du triangle seront les asymptotes de l'hyperbole : donc dans l'hyperbole, les branches s'approchent de plus en plus à l'infini des asymptotes, sans pouvoir jamais les atteindre & les toucher, quelque prolongées qu'on les suppose. C. Q. F. D.

THEOREME V.

171. *Un plan qui coupe un cône, ne peut pas y faire des sections d'où résultent des figures différentes du triangle, du cercle, de l'ellipse, de la parabole, & de l'hyperbole. (fig. 107 & 112.)*

DÉMONSTRATION. Le plan coupant commence nécessairement sa section ou par le sommet du cône, ou par un point de la surface du cône.

I°. Si le plan commence sa section au sommet du cône ; il est évident que la section sera un triangle BAD, perpendiculaire ou oblique à la base du cône.

II°. Si le plan commence sa section à un point de la surface du cône ; il peut arriver ou que le plan coupant, indéfiniment prolongé, sorte du cône indéfiniment prolongé ; ou que ce même plan reste toujours en dedans du cône dont la base devient toujours plus grande, à mesure qu'elle s'éloigne indéfiniment du sommet.

Dans le premier cas, le plan coupant qui sort du cône, sera ou parallèle à la base, & alors la section donnera un cercle ; ou incliné à la base, & alors la section donnera une ellipse.

Dans le second cas, le plan coupant qui reste toujours en dedans du cône indéfiniment prolongé, sera ou parallèle au côté du cône, & alors la section sera une parabole ; ou non parallèle au côté du cône, & alors la section sera une hyperbole (738). Donc il n'est pas possible qu'un plan fasse dans un cône, d'autres

sections que celles que nous venons de nommer & qu'on appelle les cinq sections coniques. C. Q. F. D.

772. COROLLAIRE. *Dans les sections coniques, le cercle & l'ellipse sont les deux seules courbes régulières, qui rentrent sur elles-mêmes : puisque le triangle, la parabole & l'hyperbole vont en s'écartant à l'infini sur la surface toujours croissante du cône indéfiniment prolongé.*

773. CONCLUSION. Telles sont les connoissances les plus simples & les plus intéressantes, que peut fournir la théorie des sections coniques. Ces connoissances, jointes à celles que donnent les autres parties de cet Ouvrage, suffisent abondamment pour conduire un amateur des sciences & des arts, dans toute la partie la plus brillante & la plus intéressante de la Nature ; dans tout ce que les sciences physico-mathématiques renferment de plus utile & de plus curieux, de plus propre à étendre, à satisfaire, à enrichir & à perfectionner les lumières de l'Esprit humain.

• *FIN DE LA GÉOMÉTRIE.*

TABLE DES SINUS.

AVERTISSEMENT.

Nous avons fait voir dans la Trigonométrie rectiligne, comment on a pu trouver les sinus de tous les angles & de tous les arcs quelconques (697); & quel est l'usage de ces sinus, dont on a formé des Tables complètes; d'après des calculs infiniment précis (702). La *Table des Sinus*, que nous donnons ici, est tirée des grandes Tables d'Ulac & d'Ozanam, dont tous les Géomètres connoissent l'exactitude.

Comme on a besoin presque sans cesse d'une Table des sinus, dans l'étude de la Géométrie & de la Physique; nous avons pensé qu'on seroit bien aisé de trouver dans un seul & même ouvrage, tout ce qui est absolument nécessaire dans l'étude de ces deux Sciences. (708.)

OBSERVATION I.

I°. On trouvera dans cette Table, les sinus de tous les *angles aigus*, jusqu'à l'angle droit; ou les sinus de tous les angles, depuis une minute, jusqu'à 90 degrés inclusivement.

II°. Les sinus des *angles obtus* étant les mêmes que les sinus des angles aigus qui sont leur supplément (636); il s'ensuit que pour avoir le sinus d'un angle obtus, il faut prendre le sinus de son supplément. Par exemple, pour avoir dans les Tables, le sinus d'un angle de 124 degrés & 17 minutes, il faut soustraire de 180 degrés = 179 degrés + 60 minutes, l'angle obtus donne 124 degrés + 17 minutes: le reste 55 degrés 43 minutes, sera l'angle de supplément; & le sinus de cet angle 55 degrés 43 minutes, sera le sinus de l'angle obtus donné 124 degrés 17 minutes.

III°. Le sinus total dans cette Table, est supposé de 10000000 parties : le nombre qui exprime les autres sinus, décroît proportionnellement comme les sinus ; de sorte que quand un sinus est de moitié plus petit que le rayon ou le sinus total, le nombre qui l'exprime, est de moitié plus petit que le nombre qui exprime le sinus total ; & ainsi du reste.

IV°. Quand on n'a pas besoin d'une infinie précision dans les calculs trigonométriques, on néglige & on ne met point dans le calcul, les deux chiffres qui suivent le point intercalaire de chaque sinus ; mais on augmente d'une unité le chiffre qui précède le point intercalaire, quand les deux chiffres suivans valent plus de 50. (697).

V°. Dans les Tables des sinus, on ne trouve pas les sinus des angles moindres qu'une minute : par exemple, on n'y trouve pas les sinus d'un angle de 10 ou de 30 secondes, dont on a quelquefois besoin, sur-tout dans l'astronomie. Pour obvier à cet inconvénient, nous avons donné une méthode très-simple & très-facile, qui apprend à transformer les tables ordinaires des sinus, en tables des sinus des secondes. (717).

O B S E R V A T I O N I I.

On peut remarquer dans cette Table des sinus, ou à l'occasion de cette Table des sinus :

I°. Que les sinus vont en augmentant, d'une minute à la minute suivante, d'une quantité assez constante.

II°. Que l'augmentation, d'une minute à la minute suivante, devient moindre à mesure que l'angle devient plus grand ; & qu'elle devient sensiblement nulle, quand l'angle approche de l'angle droit.

III°. Que s'il y avoit par hasard quelque chi-

fre mal formé dans l'impression, on verroit aisément par le rapport des sinus précédens & des sinus suivans, quel doit être ce chiffre équivoque.

IV°. Que l'on peut aisément & de la même manière, s'assurer que les sinus que l'on prend pour résoudre un triangle, sont exacts & ne contiennent aucune faute; si par hazard on avoit quelque doute en ce genre.

OBSERVATION III.

On a vu, dans la Trigonométrie, comment on trouve les cordes de tous les arcs, depuis une minute jusqu'à 180 degrés; & comment en prenant les moitiés de toutes ces cordes successivement trouvées, on a les sinus de tous les arcs & de tous les angles mesurés par ces arcs, depuis l'angle d'une minute, jusqu'à l'angle droit ou de 90 degrés.

Maintenant, puisque ces sinus sont supposés connus dans cette Table, & que chaque sinus connu est la moitié d'une corde qui soutiendrait un arc double; il est clair que par le moyen de cette Table des sinus, on pourra aisément trouver les cordes inconnues de tous les arcs quelconques: puisqu'il ne s'agit, pour trouver la corde inconnue d'un arc donné, que de prendre deux fois, ou de multiplier par 2, le sinus de la moitié de cet arc. Par exemple, pour avoir la corde d'un arc de 21 degrés, prenez deux fois le sinus de l'arc de 10 degrés 30 minutes.

A la fin de cette Table des sinus, se trouvent les Tangentes & les Sécantes de tous les arcs, depuis une minute jusqu'à 30 minutes: ce sont celles dont l'usage est le plus fréquent, surtout dans le nivellement. On trouvera aisément les autres par le calcul, quand on en aura besoin. (723 & 724).

TABLE DES SINUS.

O DEGRÉS.

I DEGRÉ.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	0	30	872.65	0	1745.24	30	2617.69
1	29.09	31	901.74	1	1774.32	31	2646.77
2	58.28	32	930.83	2	1803.41	32	2675.85
3	87.27	33	959.92	3	1832.49	33	2704.93
4	116.36	34	989.00	4	1861.58	34	2734.01
5	145.44	35	1018.00	5	1890.66	35	2763.09
6	174.53	36	1047.18	6	1919.74	36	2792.16
7	203.62	37	1076.27	7	1948.83	37	2821.24
8	232.71	38	1105.35	8	1977.91	38	2850.32
9	261.80	39	1134.44	9	2006.99	39	2879.40
10	290.89	40	1163.53	10	2036.08	40	2908.47
11	319.98	41	1192.61	11	2065.16	41	2937.55
12	349.06	42	1221.70	12	2094.24	42	2966.62
13	378.15	43	1250.79	13	2123.32	43	2995.70
14	407.24	44	1279.87	14	2152.41	44	3024.78
15	436.33	45	1308.96	15	2181.49	45	3053.85
16	465.42	46	1338.05	16	2210.57	46	3082.93
17	494.51	47	1367.13	17	2239.65	47	3112.00
18	523.60	48	1396.22	18	2268.73	48	3141.08
19	552.68	49	1425.30	19	2297.81	49	3170.15
20	581.77	50	1454.39	20	2326.90	50	3199.22
21	610.86	51	1483.48	21	2355.98	51	3228.30
22	639.95	52	1512.56	22	2385.06	52	3257.37
23	669.04	53	1541.65	23	2414.14	53	3286.44
24	698.13	54	1570.73	24	2443.22	54	3315.52
25	727.21	55	1599.82	25	2472.30	55	3344.59
26	756.30	56	1628.90	26	2501.38	56	3373.66
27	785.39	57	1657.99	27	2530.46	57	3402.73
28	814.48	58	1687.07	28	2559.54	58	3431.81
29	843.57	59	1716.16	29	2588.62	59	3460.88
30	872.65	60	1745.24	30	2617.69	60	3489.95

R r ij

2 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	3489.95	30	4361.94
1	3519.02	31	4391.00
2	3548.09	32	4420.06
3	3577.16	33	4449.12
4	3606.23	34	4478.18
5	3635.30	35	4507.24
6	3664.37	36	4536.30
7	3693.44	37	4565.36
8	3722.51	38	4594.42
9	3751.58	39	4623.47
10	3780.65	40	4652.53
11	3809.71	41	4681.59
12	3838.78	42	4710.64
13	3867.85	43	4739.70
14	3896.91	44	4768.76
15	3925.98	45	4797.81
16	3955.05	46	4826.87
17	3984.11	47	4855.92
18	4013.18	48	4884.98
19	4042.24	49	4914.03
20	4071.31	50	4943.08
21	4100.37	51	4972.14
22	4129.44	52	5001.19
23	4158.50	53	5030.24
24	4187.57	54	5059.29
25	4216.63	55	5088.35
26	4245.69	56	5117.40
27	4274.75	57	5146.45
28	4303.82	58	5175.50
29	4332.88	59	5204.55
30	4361.94	60	5233.60

3 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	5233.60	30	6104.85
1	5262.64	31	6133.89
2	5291.69	32	6162.92
3	5320.74	33	6191.96
4	5349.79	34	6220.99
5	5378.83	35	6250.02
6	5407.88	36	6279.05
7	5436.93	37	6308.08
8	5465.97	38	6337.11
9	5495.02	39	6366.14
10	5524.06	40	6395.17
11	5553.11	41	6424.20
12	5582.15	42	6453.23
13	5611.19	43	6482.26
14	5640.24	44	6511.29
15	5669.28	45	6540.31
16	5698.32	46	6569.34
17	5727.36	47	6598.36
18	5756.40	48	6627.39
19	5785.44	49	6656.41
20	5814.48	50	6685.44
21	5843.52	51	6714.46
22	5872.56	52	6743.48
23	5901.60	53	6772.51
24	5930.64	54	6801.53
25	5959.67	55	6830.55
26	5988.71	56	6859.57
27	6017.75	57	6888.59
28	6046.78	58	6917.61
29	6075.82	59	6946.63
30	6104.85	60	6975.65

TABLE DES SINUS.

4 DEGRÉS.

5 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	6975.65	30	7845.91	0	8715.57	30	9584.58
1	7004.66	31	7874.91	1	8744.55	31	9613.53
2	7033.68	32	7903.91	2	8773.53	32	9642.48
3	7062.70	33	7932.90	3	8802.51	33	9671.44
4	7091.71	34	7961.90	4	8831.48	34	9700.39
5	7120.73	35	7990.90	5	8860.46	35	9729.34
6	7149.74	36	8019.89	6	8889.43	36	9758.29
7	7178.76	37	8048.89	7	8918.40	37	9787.24
8	7207.77	38	8077.88	8	8947.38	38	9816.19
9	7236.78	39	8106.87	9	8976.35	39	9845.14
10	7265.80	40	8135.87	10	9005.32	40	9874.08
11	7294.81	41	8164.86	11	9034.29	41	9903.03
12	7323.82	42	8193.85	12	9073.26	42	9931.97
13	7352.83	43	8222.84	13	9092.23	43	9960.92
14	7381.84	44	8251.83	14	9121.19	44	9989.86
15	7410.85	45	8280.82	15	9150.16	45	10018.81
16	7439.86	46	8309.81	16	9179.13	46	10047.75
17	7468.87	47	8338.80	17	9208.09	47	10076.69
18	7497.87	48	8367.78	18	9237.06	48	10105.63
19	7526.88	49	8396.77	19	9266.02	49	10134.57
20	7555.89	50	8425.76	20	9294.99	50	10163.51
21	7584.89	51	8454.74	21	9323.95	51	10192.45
22	7613.90	52	8483.73	22	9352.91	52	10221.38
23	7642.90	53	8512.71	23	9381.87	53	10250.32
24	7671.90	54	8541.69	24	9410.83	54	10279.25
25	7700.91	55	8570.67	25	9439.79	55	10308.19
26	7729.91	56	8599.66	26	9468.75	56	10337.12
27	7758.91	57	8528.64	27	9497.71	57	10366.05
28	7787.91	58	8557.62	28	9526.66	58	10394.99
29	7816.91	59	8586.60	29	9555.62	59	10423.92
30	7845.91	60	8615.57	30	9584.58	60	10452.85

6 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	10452.85	30	11320.32
1	10481.78	31	11349.22
2	10510.70	32	11378.12
3	10539.63	33	11407.02
4	10568.56	34	11435.92
5	10597.48	35	11464.82
6	10626.41	36	11493.71
7	10655.33	37	11522.61
8	10684.25	38	11551.51
9	10713.18	39	11580.40
10	10742.10	40	11609.29
11	10771.02	41	11638.18
12	10799.94	42	11667.07
13	10828.85	43	11695.96
14	10857.77	44	11724.85
15	10886.69	45	11753.74
16	10915.60	46	11782.63
17	10944.52	47	11811.51
18	10973.43	48	11840.40
19	11002.34	49	11869.28
20	11031.26	50	11898.16
21	11060.17	51	11927.04
22	11089.08	52	11955.93
23	11117.99	53	11984.81
24	11146.89	54	12013.68
25	11175.80	55	12042.56
26	11204.71	56	12071.44
27	11233.61	57	12100.31
28	11262.52	58	12129.19
29	11291.42	59	12158.06
30	11320.32	60	12186.93

7 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	12186.93	30	13052.62
1	12215.81	31	13081.46
2	12244.68	32	13110.30
3	12273.55	33	13139.13
4	12302.41	34	13167.97
5	12331.28	35	13196.81
6	12360.15	36	13225.64
7	12389.01	37	13254.47
8	12417.88	38	13283.30
9	12446.74	39	13312.13
10	12475.60	40	13340.96
11	12504.46	41	13369.79
12	12533.32	42	13398.62
13	12562.18	43	13427.44
14	12591.04	44	13456.27
15	12619.90	45	13485.09
16	12648.75	46	13513.92
17	12677.61	47	13542.74
18	12706.46	48	13571.56
19	12735.31	49	13600.38
20	12764.16	50	13629.19
21	12793.01	51	13658.01
22	12821.86	52	13686.83
23	12850.71	53	13715.64
24	12879.56	54	13744.45
25	12908.41	55	13773.27
26	12937.25	56	13802.08
27	12966.09	57	13830.89
28	12994.94	58	13859.70
29	13023.78	59	13888.50
30	13052.62	60	13917.31

TABLE DES SINUS.

8 DEGRÉS.

9 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	13917.31	30	14780.94	0	15643.45	30	16504.76
1	13946.12	31	14809.71	1	15672.18	31	16533.45
2	13974.92	32	14838.48	2	15700.91	32	16562.14
3	14003.72	33	14867.24	3	15729.63	33	16590.82
4	14032.52	34	14896.01	4	15758.36	34	16619.51
5	14061.32	35	14924.77	5	15787.08	35	16648.19
6	14090.12	36	14953.53	6	15815.81	36	16676.87
7	14118.92	37	14982.30	7	15844.53	37	16705.55
8	14147.72	38	15011.06	8	15873.25	38	16734.23
9	14176.51	39	15039.81	9	15901.97	39	16762.91
10	14205.31	40	15068.57	10	15930.69	40	16791.59
11	14234.10	41	15097.33	11	15959.40	41	16820.26
12	14262.89	42	15126.08	12	15988.12	42	16848.94
13	14291.68	43	15154.84	13	16016.83	43	16877.61
14	14320.47	44	15183.59	14	16045.55	44	16906.28
15	14349.26	45	15212.34	15	16074.26	45	16934.95
16	14378.05	46	15241.09	16	16102.97	46	16963.62
17	14406.84	47	15269.84	17	16131.67	47	16992.28
18	14435.62	48	15298.58	18	16160.38	48	17020.95
19	14464.40	49	15327.33	19	16189.09	49	17049.61
20	14493.19	50	15356.07	20	16217.79	50	17078.28
21	14521.97	51	15384.82	21	16246.50	51	17106.94
22	14550.75	52	15413.56	22	16275.20	52	17135.60
23	14579.53	53	15442.30	23	16303.90	53	17164.25
24	14608.30	54	15471.04	24	16332.60	54	17192.91
25	14637.08	55	15499.78	25	16361.29	55	17221.56
26	14665.85	56	15528.51	26	16389.99	56	17250.22
27	14694.63	57	15557.25	27	16418.68	57	17278.87
28	14723.40	58	15585.98	28	16447.38	58	17307.52
29	14752.17	59	15614.72	29	16476.07	59	17336.17
30	14780.94	60	15643.45	30	16504.76	60	17364.82

10 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	17364.82	30	18223.55
1	17393.46	31	18252.15
2	17422.11	32	18280.75
3	17450.75	33	18309.35
4	17479.39	34	18337.95
5	17508.03	35	18366.54
6	17536.67	36	18395.13
7	17565.31	37	18423.73
8	17593.95	38	18452.32
9	17622.58	39	18480.91
10	17651.21	40	18509.49
11	17679.84	41	18538.08
12	17708.47	42	18566.66
13	17737.10	43	18595.24
14	17765.73	44	18623.82
15	17794.35	45	18652.40
16	17822.98	46	18680.98
17	17851.60	47	18709.56
18	17880.22	48	18738.13
19	17908.84	49	18766.70
20	17937.46	50	18795.27
21	17966.07	51	18823.84
22	17994.69	52	18852.41
23	18023.30	53	18880.98
24	18051.91	54	18909.54
25	18080.52	55	18938.11
26	18109.13	56	18966.67
27	18137.74	57	18995.23
28	18166.35	58	19023.79
29	18194.95	59	19052.34
30	18223.55	60	19080.90

11 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	19080.90	30	19936.79
1	19109.45	31	19965.30
2	19138.00	32	19993.80
3	19166.55	33	20022.30
4	19195.10	34	20050.80
5	19223.65	35	20079.30
6	19252.20	36	20107.79
7	19280.74	37	20136.29
8	19309.28	38	20164.78
9	19337.82	39	20193.27
10	19366.36	40	20221.76
11	19394.90	41	20250.24
12	19423.44	42	20278.73
13	19451.97	43	20307.21
14	19480.50	44	20335.69
15	19509.03	45	20364.17
16	19537.56	46	20392.65
17	19566.09	47	20421.13
18	19594.61	48	20449.61
19	19623.14	49	20478.08
20	19651.66	50	20506.55
21	19680.18	51	20535.02
22	19708.70	52	20563.49
23	19737.22	53	20591.95
24	19765.73	54	20620.42
25	19794.25	55	20648.88
26	19822.76	56	20677.34
27	19851.27	57	20705.80
28	19879.78	58	20734.26
29	19908.29	59	20762.71
30	19936.79	60	20791.17

TABLE DES SINUS.

12 DEGRÉS.

13 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	20791.17	30	21643.96	0	22495.11	30	23344.54
1	20819.62	31	21672.36	1	22523.45	31	23372.82
2	20848.07	32	21700.76	2	22551.79	32	23401.10
3	20876.52	33	21729.15	3	22580.13	33	23429.38
4	20904.97	34	21757.54	4	22608.46	34	23457.66
5	20933.41	35	21785.93	5	22636.80	35	23485.94
6	20961.86	36	21814.32	6	22665.13	36	23514.21
7	20990.30	37	21842.71	7	22693.46	37	23542.48
8	21018.74	38	21871.10	8	22721.79	38	23570.75
9	21047.18	39	21899.48	9	22750.12	39	23599.02
10	21075.61	40	21927.86	10	22778.44	40	23627.29
11	21104.05	41	21956.24	11	22806.77	41	23655.55
12	21132.48	42	21984.62	12	22835.09	42	23683.81
13	21160.91	43	22013.00	13	22863.41	43	23712.07
14	21189.34	44	22041.37	14	22891.72	44	23740.33
15	21217.77	45	22069.74	15	22920.04	45	23768.59
16	21246.19	46	22098.11	16	22948.35	46	23796.84
17	21274.62	47	22126.48	17	22976.66	47	23825.10
18	21303.04	48	22154.85	18	23004.97	48	23853.35
19	21331.46	49	22183.21	19	23033.28	49	23881.59
20	21359.88	50	22211.58	20	23061.59	50	23909.84
21	21388.29	51	22239.94	21	23089.89	51	23938.08
22	21416.71	52	22268.30	22	23118.19	52	23966.33
23	21445.12	53	22296.66	23	23146.49	53	23994.57
24	21473.53	54	22325.01	24	23174.79	54	24022.80
25	21501.94	55	22353.37	25	23203.09	55	24051.04
26	21530.35	56	22381.72	26	23231.38	56	24079.27
27	21558.76	57	22410.07	27	23259.67	57	24107.51
28	21587.16	58	22438.41	28	23287.96	58	24135.74
29	21615.56	59	22466.76	29	23316.25	59	24163.96
30	21643.96	60	22495.11	30	23344.54	60	24192.19

14 DEGRÉS.

15 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	24192.19	30	25038.00	0	25881.90	30	26723.84
1	24210.41	31	25066.16	1	25910.00	31	26751.87
2	24248.63	32	25094.32	2	25938.10	32	26779.89
3	24376.85	33	25122.48	3	25966.19	33	26807.92
4	24305.07	34	25150.63	4	25994.28	34	26835.94
5	24333.29	35	25178.79	5	26022.37	35	26863.96
6	24361.50	36	25206.94	6	26050.45	36	26891.98
7	24389.71	37	25235.08	7	26078.53	37	26920.00
8	24417.92	38	25263.23	8	26106.61	38	26948.01
9	24446.13	39	25291.37	9	26134.69	39	26976.02
10	24474.33	40	25319.52	10	26162.77	40	27004.03
11	24502.54	41	25347.66	11	26190.85	41	27032.04
12	24530.74	42	25375.79	12	26218.92	42	27060.04
13	24558.94	43	25403.93	13	26246.99	43	27088.05
14	24587.13	44	25432.06	14	26275.06	44	27116.05
15	24615.33	45	25460.19	15	26303.12	45	27144.04
16	24643.52	46	25488.32	16	26331.18	46	27172.04
17	24671.71	47	25516.45	17	26359.24	47	27200.03
18	24699.90	48	25544.58	18	26387.30	48	27228.02
19	24728.09	49	25572.70	19	26415.36	49	27256.01
20	24756.27	50	25600.82	20	26443.42	50	27284.00
21	24784.45	51	25628.94	21	26471.47	51	27311.98
22	24812.63	52	25657.05	22	26499.52	52	27339.96
23	24840.81	53	25685.17	23	26527.57	53	27367.94
24	24868.99	54	25713.99	24	26555.61	54	27395.92
25	24897.16	55	25741.39	25	26583.65	55	27423.90
26	24925.33	56	25769.50	26	26611.69	56	27451.87
27	24953.50	57	25797.60	27	26639.73	57	27479.84
28	24981.67	58	25825.70	28	26667.77	58	27507.81
29	25009.84	59	25853.81	29	26695.81	59	27535.78
30	25038.00	60	25881.90	30	26723.84	60	27563.74

TABLE DES SINUS.

16 DEGRÉS.

17 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	27563.74	30	28401.53	0	29237.17	30	30070.58
1	27591.70	31	28429.42	1	29264.99	31	30098.32
2	27619.65	32	28457.31	2	29292.80	32	30126.06
3	27647.61	33	28485.20	3	29320.61	33	30153.80
4	27675.56	34	28513.08	4	29348.42	34	30181.53
5	27703.52	35	28540.96	5	29376.23	35	30209.26
6	27731.47	36	28568.84	6	29404.03	36	30236.99
7	27759.41	37	28596.71	7	29431.83	37	30264.71
8	27787.36	38	28624.58	8	29459.63	38	30292.44
9	27815.30	39	28652.45	9	29487.43	39	30320.16
10	27843.24	40	28680.32	10	29515.22	40	30347.88
11	27871.18	41	28708.19	11	29543.02	41	30375.59
12	27899.11	42	28736.05	12	29570.80	42	30403.31
13	27927.04	43	28763.91	13	29598.59	43	30431.02
14	27954.97	44	28791.77	14	29626.38	44	30458.72
15	27982.90	45	28819.63	15	29654.16	45	30486.43
16	28010.83	46	28847.48	16	29681.94	46	30514.13
17	28038.75	47	28875.33	17	29709.71	47	30541.83
18	28066.67	48	28903.18	18	29737.49	48	30569.53
19	28094.59	49	28931.03	19	29765.26	49	30597.23
20	28122.51	50	28958.87	20	29793.03	50	30624.92
21	28150.42	51	28986.71	21	29820.79	51	30652.61
22	28178.33	52	29014.55	22	29848.56	52	30680.29
23	28206.24	53	29042.39	23	29876.32	53	30707.98
24	28234.15	54	29070.22	24	29904.08	54	30735.66
25	28262.05	55	29098.05	25	29931.84	55	30763.34
26	28289.95	56	29125.88	26	29959.59	56	30791.02
27	28317.85	57	29153.71	27	29987.34	57	30818.69
28	28345.75	58	29181.53	28	30015.09	58	30846.36
29	28373.64	59	29209.35	29	30042.84	59	30874.03
30	28401.53	60	29237.17	30	30070.58	60	30901.70

636 TABLE DES SINUS.

18 DEGRÉS.

19 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	30901.70	30	31730.47	0	32556.82	30	33380.69
1	30929.36	31	31758.05	1	32584.32	31	33408.10
2	30957.02	32	31785.63	2	32611.82	32	33435.52
3	30984.68	33	31813.21	3	32639.31	33	33462.93
4	31012.34	34	31840.79	4	32666.81	34	33490.34
5	31039.99	35	31868.36	5	32694.30	35	33517.75
6	31067.64	36	31895.93	6	32721.79	36	33545.16
7	31095.29	37	31923.50	7	32749.28	37	33572.56
8	31122.94	38	31951.06	8	32776.76	38	33599.96
9	31150.58	39	31978.63	9	32804.24	39	33627.35
10	31178.22	40	32006.19	10	32831.72	40	33654.75
11	31205.86	41	32033.74	11	32859.19	41	33682.14
12	31233.49	42	32061.30	12	32886.66	42	33709.53
13	31261.12	43	32088.85	13	32914.13	43	33736.91
14	31288.75	44	32116.40	14	32941.60	44	33764.29
15	31316.38	45	32143.95	15	32969.06	45	33791.67
16	31344.00	46	32171.49	16	32996.52	46	33819.05
17	31371.63	47	32199.03	17	33023.98	47	33846.42
18	31399.25	48	32226.57	18	33051.44	48	33873.79
19	31426.86	49	32254.10	19	33078.89	49	33901.16
20	31454.48	50	32281.64	20	33106.34	50	33928.53
21	31482.09	51	32309.17	21	33133.79	51	33955.89
22	31509.69	52	32336.70	22	33161.23	52	33983.25
23	31537.30	53	32364.22	23	33188.67	53	34010.60
24	31564.90	54	32391.74	24	33216.11	54	34037.95
25	31592.50	55	32419.26	25	33243.55	55	34065.30
26	31620.10	56	32446.78	26	33270.98	56	34092.65
27	31647.70	57	32474.29	27	33298.41	57	34120.00
28	31675.29	58	32501.80	28	33325.84	58	34147.34
29	31702.88	59	32529.31	29	33353.27	59	34174.68
30	31730.47	60	32556.82	30	33380.69	60	34202.02

TABLE DES SINUS.

20 DEGRÉS.

21 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	34202.02	30	35020.74	0	35836.79	30	36650.13
1	34229.35	31	35047.99	1	35863.95	31	36677.19
2	34256.68	32	35075.23	2	35891.10	32	36704.25
3	34284.01	33	35102.47	3	35918.25	33	36731.31
4	34311.33	34	35129.70	4	35945.40	34	36758.36
5	34338.65	35	35156.93	5	35972.54	35	36785.41
6	34365.97	36	35184.16	6	35999.68	36	36812.46
7	34393.29	37	35211.39	7	36026.82	37	36839.50
8	34420.60	38	35238.62	8	36053.95	38	36866.54
9	34447.91	39	35265.84	9	36081.08	39	36893.58
10	34475.22	40	35293.06	10	36108.22	40	36920.62
11	34502.52	41	35320.27	11	36135.33	41	36947.65
12	34529.82	42	35347.48	12	36162.46	42	36974.68
13	34557.12	43	35374.69	13	36189.58	43	37001.70
14	34584.42	44	35401.90	14	36216.69	44	37028.72
15	34611.71	45	35429.10	15	36243.80	45	37055.74
16	34639.00	46	35456.30	16	36270.91	46	37082.76
17	34666.29	47	35483.50	17	36298.02	47	37109.77
18	34693.57	48	35510.70	18	36325.12	48	37136.78
19	34720.85	49	35537.89	19	36352.22	49	37163.79
20	34748.13	50	35565.08	20	36379.32	50	37190.80
21	34775.40	51	35592.26	21	36406.41	51	37217.80
22	34802.67	52	35619.44	22	36433.50	52	37244.80
23	34829.94	53	35645.62	23	36460.59	53	37271.79
24	34857.21	54	35673.80	24	36487.68	54	37298.78
25	34884.47	55	35700.97	25	36514.76	55	37325.77
26	34911.73	56	35728.14	26	36541.84	56	37352.75
27	34938.99	57	35755.32	27	36568.92	57	37379.73
28	34966.24	58	35782.48	28	36595.99	58	37406.71
29	34993.49	59	35809.64	29	36623.06	59	37433.69
30	35020.74	60	35836.79	30	36650.13	60	37460.66

638 TABLE DES SINUS.

22 DEGRÉS.

23 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	37460.66	30	38268.34	0	39073.11	30	39874.91
1	37487.63	31	38295.22	1	39099.89	31	39901.58
2	37514.59	32	38322.09	2	39126.66	32	39928.25
3	37541.56	33	38348.95	3	39153.43	33	39954.91
4	37568.51	34	38375.82	4	39180.19	34	39981.58
5	37595.47	35	38402.68	5	39206.95	35	40008.24
6	37622.43	36	38429.53	6	39233.71	36	40034.90
7	37649.38	37	38456.39	7	39260.47	37	40061.56
8	37676.32	38	38483.24	8	39287.22	38	40088.21
9	37703.27	39	38510.08	9	39313.97	39	40114.86
10	37730.21	40	38536.93	10	39340.71	40	40141.50
11	37757.14	41	38563.77	11	39367.45	41	40168.14
12	37784.08	42	38590.60	12	39394.19	42	40194.78
13	37811.01	43	38617.44	13	39420.93	43	40221.41
14	37837.94	44	38644.27	14	39447.66	44	40248.04
15	37864.86	45	38671.10	15	39474.39	45	40274.67
16	37891.78	46	38697.92	16	39501.11	46	40301.29
17	37918.70	47	38724.74	17	39527.83	47	40327.91
18	37945.62	48	38751.56	18	39554.55	48	40354.53
19	37972.53	49	38778.37	19	39581.27	49	40381.14
20	37999.44	50	38805.18	20	39607.98	50	40407.75
21	38026.34	51	38831.99	21	39634.69	51	40434.36
22	38053.24	52	38858.80	22	39661.39	52	40460.96
23	38080.14	53	38885.60	23	39688.09	53	40487.56
24	38107.04	54	38912.39	24	39714.79	54	40514.16
25	38133.93	55	38939.19	25	39741.48	55	40540.75
26	38160.82	56	38965.98	26	39768.17	56	40567.34
27	38187.70	57	38992.77	27	39794.86	57	40593.93
28	38214.59	58	39019.55	28	39821.55	58	40620.51
29	38241.47	59	39046.33	29	39848.23	59	40647.09
30	38268.34	60	39073.11	30	39874.91	60	40673.66

TABLE DES SINUS.

24 DEGRÉS.

25 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	40673.66	30	41469.32	0	42261.83	30	43051.11
1	40780.23	31	41495.79	1	42288.19	31	43077.36
2	40716.81	32	41522.26	2	42314.55	32	43103.61
3	40753.37	33	41548.72	3	42340.90	33	43129.86
4	40779.93	34	41575.18	4	42367.25	34	43156.10
5	40806.49	35	41601.63	5	42393.60	35	43182.34
6	40833.05	36	41628.08	6	42419.94	36	43208.57
7	40859.60	37	41654.53	7	42446.28	37	43234.80
8	40886.15	38	41680.97	8	42472.62	38	43261.03
9	40912.69	39	41707.41	9	42498.95	39	43287.26
10	40939.23	40	41733.85	10	42525.28	40	43313.48
11	40965.77	41	41760.28	11	42551.61	41	43339.70
12	40992.30	42	41786.71	12	42577.93	42	43365.91
13	41018.83	43	41813.13	13	42604.25	43	43392.12
14	41045.36	44	41839.55	14	42630.56	44	43418.33
15	41071.89	45	41865.97	15	42656.87	45	43444.53
16	41098.41	46	41892.39	16	42683.18	46	43470.73
17	41124.93	47	41918.80	17	42709.49	47	43496.91
18	41151.44	48	41945.21	18	42735.79	48	43523.11
19	41177.95	49	41971.61	19	42762.09	49	43549.30
20	41204.46	50	41998.01	20	42788.38	50	43575.48
21	41230.96	51	42024.41	21	42814.67	51	43601.66
22	41257.46	52	42050.80	22	42840.95	52	43627.84
23	41283.95	53	42077.19	23	42867.23	53	43654.01
24	41310.44	54	42103.58	24	42893.51	54	43680.18
25	41336.93	55	42129.96	25	42919.79	55	43706.34
26	41363.42	56	42156.34	26	42946.06	56	43732.50
27	41389.90	57	42182.72	27	42972.33	57	43758.66
28	41416.38	58	42209.09	28	42998.59	58	43784.82
29	41442.85	59	42235.46	29	43024.85	59	43810.97
30	41469.32	60	42261.83	30	43051.11	60	43837.12

640 TABLE DES SINUS.

26 DEGRÉS.

27 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	43837.12	30	44619.78	0	45399.05	30	46174.86
1	43863.26	31	44645.81	1	45424.97	31	46200.66
2	43889.40	32	44671.84	2	45450.88	32	46226.46
3	43915.53	33	44697.86	3	45476.79	33	46252.15
4	43941.66	34	44723.88	4	45502.69	34	46278.04
5	43967.79	35	44749.90	5	45528.59	35	46303.83
6	43993.92	36	44775.91	6	45554.49	36	46329.60
7	44020.04	37	44801.92	7	45580.38	37	46355.38
8	44046.16	38	44827.92	8	45606.27	38	46381.15
9	44072.27	39	44853.92	9	45632.16	39	46406.92
10	44098.38	40	44879.92	10	45658.04	40	46432.69
11	44124.48	41	44905.91	11	45683.92	41	46458.45
12	44150.58	42	44931.90	12	45709.79	42	46484.21
13	44176.68	43	44957.89	13	45735.66	43	46509.96
14	44202.78	44	44983.87	14	45761.53	44	46535.71
15	44228.87	45	45009.85	15	45787.39	45	46561.45
16	44254.96	46	45035.85	16	45813.25	46	46587.19
17	44281.04	47	45061.79	17	45839.10	47	46612.93
18	44307.12	48	45087.76	18	45864.95	48	46638.66
19	44333.19	49	45113.72	19	45890.80	49	46664.39
20	44359.27	50	45139.68	20	45916.64	50	46690.12
21	44385.34	51	45165.63	21	45942.48	51	46715.84
22	44411.40	52	45191.58	22	45968.32	52	46741.56
23	44437.46	53	45217.53	23	45994.15	53	46767.27
24	44463.52	54	45243.47	24	46019.98	54	46792.98
25	44489.57	55	45269.41	25	46045.80	55	46818.69
26	44515.62	56	45295.35	26	46071.62	56	46844.39
27	44541.67	57	45321.28	27	46097.44	57	46870.09
28	44567.71	58	45347.21	28	46123.25	58	46895.78
29	44593.75	59	45373.13	29	46149.06	59	46921.47
30	44619.78	60	45399.05	30	46174.86	60	46947.16

TABLE DES SINUS.

28 DEGRÉS.

29 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	46947.16	30	47715.88	0	48480.96	30	49242.36
1	46972.84	31	47741.44	1	48506.40	31	49267.67
2	46998.52	32	47767.00	2	48531.84	32	49292.98
3	47024.19	33	47792.55	3	48557.27	33	49318.29
4	47049.86	34	47818.10	4	48582.70	34	49343.59
5	47075.53	35	47843.64	5	48608.12	35	49368.89
6	47101.19	36	47869.18	6	48633.54	36	49394.19
7	47126.85	37	47894.72	7	48658.95	37	49419.48
8	47152.50	38	47920.26	8	48684.36	38	49444.77
9	47178.15	39	47945.79	9	48709.77	39	49470.05
10	47203.80	40	47971.31	10	48735.17	40	49495.33
11	47229.44	41	47996.83	11	48760.57	41	49520.60
12	47255.08	42	48022.35	12	48785.97	42	49545.87
13	47280.71	43	48047.86	13	48811.36	43	49571.13
14	47306.34	44	48073.37	14	48836.74	44	49596.39
15	47331.97	45	48098.88	15	48862.12	45	49621.65
16	47357.59	46	48124.38	16	48887.50	46	49646.90
17	47383.21	47	48149.87	17	48912.87	47	49672.15
18	47408.82	48	48175.37	18	48938.24	48	49697.40
19	47434.43	49	48200.86	19	48963.61	49	49722.64
20	47460.04	50	48226.34	20	48988.97	50	49747.87
21	47485.64	51	48251.82	21	49014.33	51	49773.10
22	47511.24	52	48277.30	22	49039.68	52	49798.33
23	47536.83	53	48302.77	23	49065.03	53	49823.55
24	47562.42	54	48328.24	24	49090.37	54	49848.77
25	47588.01	55	48353.70	25	49115.71	55	49873.99
26	47613.59	56	48379.16	26	49141.05	56	49899.20
27	47639.17	57	48404.62	27	49166.38	57	49924.41
28	47664.74	58	48430.07	28	49191.71	58	49949.61
29	47690.31	59	48455.52	29	49217.04	59	49974.81
30	47715.88	60	48480.96	30	49242.36	60	50000.00

T t

30 DEGRÉS.

31 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	50000.00	30	50753.84	0	51503.81	30	52249.86
1	50025.19	31	50778.90	1	51528.74	31	52274.66
2	50050.38	32	50803.96	2	51553.67	32	52299.45
3	50075.56	33	50829.01	3	51578.59	33	52324.25
4	50100.74	34	50854.06	4	51603.51	34	52349.03
5	50125.91	35	50879.10	5	51628.42	35	52373.81
6	50151.07	36	50904.14	6	51653.33	36	52398.59
7	50176.24	37	50929.18	7	51678.24	37	52423.36
8	50201.40	38	50954.21	8	51703.14	38	52448.13
9	50226.55	39	50979.24	9	51728.04	39	52472.90
10	50251.70	40	51004.26	10	51752.93	40	52497.66
11	50276.85	41	51029.28	11	51777.82	41	52522.41
12	50301.99	42	51054.29	12	51802.70	42	52547.16
13	50327.13	43	51079.30	13	51827.58	43	52571.91
14	50352.27	44	51104.31	14	51852.46	44	52596.65
15	50377.40	45	51129.31	15	51877.33	45	52621.39
16	50402.53	46	51154.31	16	51902.19	46	52646.12
17	50427.65	47	51179.30	17	51927.05	47	52670.85
18	50452.77	48	51204.29	18	51951.91	48	52695.58
19	50477.88	49	51229.27	19	51976.76	49	52720.30
20	50502.99	50	51254.25	20	52001.61	50	52745.02
21	50528.09	51	51279.22	21	52026.46	51	52769.73
22	50553.19	52	51304.19	22	52051.30	52	52794.44
23	50578.28	53	51329.16	23	52076.13	53	52819.14
24	50603.37	54	51354.12	24	52100.96	54	52843.84
25	50628.46	55	51379.08	25	52125.79	55	52868.53
26	50653.55	56	51403.04	26	52150.61	56	52893.22
27	50678.63	57	51428.99	27	52175.43	57	52917.90
28	50703.70	58	51453.93	28	52200.24	58	52942.58
29	50728.77	59	51478.87	29	52225.05	59	52967.26
30	50753.84	60	51503.81	30	52249.86	60	52991.93

TABLE DES SINUS.

32 DEGRÉS.

33 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	52991.93	30	53729.96	0	54463.90	30	55193.70
1	53016.59	31	53754.49	1	54488.30	31	55217.95
2	53041.25	32	53779.02	2	54512.69	32	55242.20
3	53065.91	33	53803.54	3	54537.07	33	55266.45
4	53090.56	34	53828.06	4	54561.45	34	55290.69
5	53115.21	35	53852.57	5	54585.83	35	55314.92
6	53139.86	36	53877.08	6	54610.20	36	55339.15
7	53164.50	37	53901.58	7	54634.56	37	55363.38
8	53189.13	38	53926.08	8	54658.92	38	55387.60
9	53213.76	39	53950.58	9	54683.28	39	55411.82
10	53238.39	40	53975.07	10	54707.63	40	55436.03
11	53263.01	41	53999.55	11	54731.98	41	55460.24
12	53287.63	42	54024.03	12	54756.32	42	55484.44
13	53312.24	43	54048.51	13	54780.66	43	55508.64
14	53336.85	44	54072.98	14	54804.99	44	55532.83
15	53361.45	45	54097.45	15	54829.32	45	55557.02
16	53386.05	46	54121.91	16	54853.65	46	55581.21
17	53410.64	47	54146.37	17	54877.97	47	55605.39
18	53435.23	48	54170.82	18	54902.28	48	55629.56
19	53459.82	49	54195.27	19	54926.59	49	55653.73
20	53484.40	50	54219.71	20	54950.90	50	55677.90
21	53508.98	51	54244.15	21	54975.20	51	55702.06
22	53533.55	52	54268.59	22	54999.50	52	55726.21
23	53558.12	53	54293.02	23	55023.79	53	55750.36
24	53582.68	54	54317.44	24	55048.07	54	55774.51
25	53607.24	55	54341.87	25	55072.36	55	55798.65
26	53631.79	56	54366.28	26	55096.64	56	55822.79
27	53656.34	57	54390.69	27	55120.91	57	55846.92
28	53680.88	58	54415.10	28	55145.18	58	55871.05
29	53705.42	59	54439.50	29	55169.44	59	55895.17
30	53729.96	60	54463.90	30	55193.70	60	55919.29

T r ij

34 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	55919.29	30	56640.62
1	55943.40	31	56664.59
2	55967.51	32	56688.56
3	55991.61	33	56712.52
4	56015.71	34	56736.48
5	56039.81	35	56760.43
6	56063.90	36	56784.37
7	56087.98	37	56808.31
8	56112.06	38	56832.25
9	56136.14	39	56856.18
10	56160.21	40	56880.11
11	56184.28	41	56904.03
12	56208.34	42	56927.95
13	56232.39	43	56951.86
14	56256.44	44	56975.77
15	56280.49	45	56999.68
16	56304.53	46	57023.58
17	56328.57	47	57047.47
18	56352.60	48	57071.36
19	56376.63	49	57095.24
20	56400.66	50	57119.12
21	56424.67	51	57142.99
22	56448.69	52	57166.86
23	56472.70	53	57190.73
24	56496.70	54	57214.59
25	56520.70	55	57238.44
26	56544.69	56	57262.29
27	56568.68	57	57286.14
28	56592.67	58	57309.98
29	56616.65	59	57333.81
30	56640.62	60	57357.64

35 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	57357.64	30	58070.30
1	57381.47	31	58093.98
2	57405.29	32	58117.65
3	57429.11	33	58141.32
4	57452.92	34	58164.98
5	57476.72	35	58188.64
6	57500.52	36	58212.30
7	57524.32	37	58235.95
8	57548.11	38	58259.59
9	57571.90	39	58283.23
10	57595.68	40	58306.87
11	57619.46	41	58330.50
12	57643.23	42	58354.12
13	57667.00	43	58377.74
14	57690.76	44	58401.36
15	57714.52	45	58424.97
16	57738.27	46	58448.57
17	57762.02	47	58472.17
18	57785.76	48	58495.77
19	57809.50	49	58519.36
20	57833.23	50	58542.94
21	57856.96	51	58566.52
22	57880.68	52	58590.10
23	57904.40	53	58613.67
24	57928.12	54	58637.24
25	57951.83	55	58660.80
26	57975.53	56	58684.35
27	57999.23	57	58707.90
28	58022.92	58	58731.45
29	58046.61	59	58754.99
30	58070.30	60	58778.53

TABLE DES SINUS.

36 DEGRÉS.

37 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	58778.53	30	59482.28	0	60181.50	30	60876.14
1	58802.06	31	59505.66	1	60204.73	31	60899.22
2	58825.58	32	59529.03	2	60227.95	32	60922.29
3	58849.10	33	59552.40	3	60251.17	33	60945.35
4	58872.62	34	59575.77	4	60274.39	34	60968.41
5	58896.13	35	59599.13	5	60297.60	35	60991.47
6	58919.64	36	59622.49	6	60320.80	36	61014.52
7	58943.14	37	59645.84	7	60344.00	37	61037.56
8	58966.63	38	59669.18	8	60367.19	38	61060.60
9	58990.12	39	59692.52	9	60390.38	39	61083.63
10	59013.61	40	59715.86	10	60413.56	40	61106.66
11	59037.09	41	59739.19	11	60436.74	41	61129.68
12	59060.57	42	59762.51	12	60459.91	42	61152.70
13	59084.04	43	59785.83	13	60483.08	43	61175.72
14	59107.50	44	59809.15	14	60506.24	44	61198.73
15	59130.96	45	59832.46	15	60529.40	45	61221.73
16	59154.42	46	59855.76	16	60552.55	46	61244.73
17	59177.87	47	59879.06	17	60575.70	47	61267.72
18	59201.32	48	59902.36	18	60598.84	48	61290.71
19	59224.76	49	59925.65	19	60621.98	49	61313.69
20	59248.19	50	59948.93	20	60645.11	50	61336.66
21	59271.62	51	59972.21	21	60668.23	51	61359.63
22	59295.05	52	59995.49	22	60691.35	52	61382.60
23	59318.47	53	60018.76	23	60714.47	53	61405.56
24	59341.89	54	60042.02	24	60737.58	54	61428.52
25	59365.30	55	60065.28	25	60760.69	55	61451.47
26	59388.71	56	60088.53	26	60783.79	56	61474.42
27	59412.11	57	60111.78	27	60806.89	57	61497.36
28	59435.50	58	60135.03	28	60829.98	58	61520.29
29	59458.89	59	60158.27	29	60853.06	59	61543.22
30	59482.28	60	60181.50	30	60876.14	60	61566.15

38 DEGRÉS.

39 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	61566.15	30	62251.46	0	61932.04	30	63607.82
1	61589.07	31	62274.22	1	61954.64	31	63630.26
2	61611.98	32	62296.98	2	61977.24	32	63652.70
3	61634.89	33	62319.73	3	61999.83	33	63675.13
4	61657.79	34	62342.48	4	62022.42	34	63697.56
5	61680.69	35	62365.22	5	62045.00	35	63719.98
6	61703.59	36	62387.96	6	62067.58	36	63742.40
7	61726.48	37	62410.69	7	62090.15	37	63764.81
8	61749.36	38	62433.42	8	62112.72	38	63787.21
9	61772.24	39	62456.14	9	62135.28	39	63809.61
10	61795.11	40	62478.85	10	62157.84	40	63832.01
11	61817.98	41	62501.56	11	62180.39	41	63854.40
12	61840.84	42	62524.26	12	62202.93	42	63876.78
13	61863.70	43	62546.96	13	62225.47	43	63899.16
14	61886.55	44	62569.66	14	62248.00	44	63921.53
15	61909.40	45	62592.35	15	62270.53	45	63943.90
16	61932.24	46	62615.03	16	62293.05	46	63966.26
17	61955.07	47	62637.71	17	62315.57	47	63988.62
18	61977.90	48	62660.38	18	62338.08	48	64010.97
19	62000.73	49	62683.05	19	62360.59	49	64033.32
20	62023.55	50	62705.71	20	62383.09	50	64055.66
21	62046.36	51	62728.37	21	62405.59	51	64077.99
22	62069.17	52	62751.02	22	62428.08	52	64100.32
23	62091.98	53	62773.66	23	62450.57	53	64122.64
24	62114.78	54	62796.30	24	62473.05	54	64144.96
25	62137.57	55	62818.94	25	62495.53	55	64167.27
26	62160.36	56	62841.57	26	62518.00	56	64189.58
27	62183.14	57	62864.20	27	62540.46	57	64211.88
28	62205.92	58	62886.82	28	62562.92	58	64234.18
29	62228.69	59	62909.43	29	62585.37	59	64256.47
30	62251.46	60	62932.04	30	62607.82	60	64278.76

TABLE DES SINUS.

40 DEGRÉS.

41 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	64278.76	30	64944.80	0	65605.90	30	66262.01
1	64301.04	31	64966.92	1	65617.85	31	66283.79
2	64323.32	32	64989.03	2	65649.80	32	66305.57
3	64345.59	33	65011.14	3	65671.74	33	66327.34
4	64367.85	34	65033.24	4	65693.67	34	66349.10
5	64390.11	35	65055.33	5	65715.60	35	66370.87
6	64412.36	36	65077.42	6	65737.52	36	66392.62
7	64434.61	37	65099.50	7	65759.44	37	66414.37
8	64456.85	38	65121.58	8	65781.35	38	66436.11
9	64479.09	39	65143.66	9	65803.26	39	66457.85
10	64501.32	40	65165.72	10	65825.16	40	66479.59
11	64523.55	41	65187.78	11	65847.06	41	66501.32
12	64545.77	42	65209.84	12	65868.95	42	66523.04
13	64567.98	43	65231.89	13	65890.83	43	66544.75
14	64590.19	44	65253.94	14	65912.71	44	66566.46
15	64612.40	45	65275.98	15	65934.58	45	66588.17
16	64634.60	46	65298.01	16	65956.45	46	66609.87
17	64656.79	47	65320.04	17	65978.31	47	66631.56
18	64678.98	48	65342.06	18	66000.17	48	66653.25
19	64701.16	49	65364.08	19	66022.02	49	66674.93
20	64723.34	50	65386.09	20	66043.86	50	66696.61
21	64745.51	51	65408.10	21	66065.70	51	66718.28
22	64767.67	52	65430.10	22	66087.53	52	66739.94
23	64789.83	53	65452.09	23	66109.36	53	66761.60
24	64811.99	54	65474.08	24	66131.18	54	66783.26
25	64834.14	55	65496.06	25	66153.00	55	66804.91
26	64856.28	56	65518.04	26	66174.81	56	66826.55
27	64878.42	57	65540.01	27	66196.62	57	66848.18
28	64900.55	58	65561.98	28	66218.42	58	66869.81
29	64922.68	59	65583.94	29	66240.22	59	66891.44
30	64944.80	60	65605.90	30	66262.01	60	66913.07

42 DEGRÉS.

43 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	66913.06	30	67559.02	0	68199.84	30	68835.45
1	66934.67	31	67580.46	1	68221.11	31	68856.55
2	66956.28	32	67601.90	2	68242.37	32	68877.64
3	66977.88	33	67623.33	3	68263.63	33	68898.73
4	66999.48	34	67644.76	4	68284.88	34	68919.81
5	67021.07	35	67666.18	5	68306.13	35	68940.89
6	67042.66	36	67687.60	6	68327.37	36	68961.96
7	67064.24	37	67709.01	7	68348.61	37	68983.02
8	67085.82	38	67730.41	8	68369.84	38	69004.07
9	67107.39	39	67751.81	9	68391.07	39	69025.12
10	67128.95	40	67773.20	10	68412.29	40	69046.17
11	67150.51	41	67794.59	11	68433.50	41	69067.21
12	67172.06	42	67815.97	12	68454.71	42	69088.24
13	67193.61	43	67837.34	13	68475.91	43	69109.27
14	67215.15	44	67858.71	14	68497.11	44	69130.29
15	67236.68	45	67880.07	15	68518.30	45	69151.31
16	67258.21	46	67901.43	16	68539.48	46	69172.32
17	67279.73	47	67922.78	17	68560.66	47	69193.32
18	67301.25	48	67944.13	18	68581.84	48	69214.32
19	67322.76	49	67965.47	19	68603.00	49	69235.31
20	67344.27	50	67986.81	20	68624.16	50	69256.30
21	67365.77	51	68008.14	21	68645.32	51	69277.28
22	67387.27	52	68029.46	22	68666.47	52	69298.25
23	67408.76	53	68050.78	23	68687.61	53	69319.22
24	67430.24	54	68072.09	24	68708.75	54	69340.18
25	67451.72	55	68093.39	25	68729.88	55	69361.14
26	67473.19	56	68114.69	26	68751.01	56	69382.09
27	67494.66	57	68135.99	27	68772.13	57	69403.04
28	67516.12	58	68157.28	28	68793.24	58	69423.98
29	67537.57	59	68178.56	29	68814.35	59	69444.91
30	67559.02	60	68199.84	30	68835.45	60	69465.84

TABLE DES SINUS.

44 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	69465.84	30	70090.93
1	69486.76	31	70111.67
2	69507.67	32	70132.41
3	69528.58	33	70153.14
4	69549.49	34	70173.87
5	69570.39	35	70194.59
6	69591.28	36	70215.30
7	69612.17	37	70236.01
8	69633.05	38	70256.71
9	69653.92	39	70277.41
10	69674.79	40	70298.11
11	69695.65	41	70318.79
12	69716.51	42	70339.47
13	69737.36	43	70360.14
14	69758.21	44	70380.81
15	69779.05	45	70401.47
16	69799.88	46	70422.13
17	69820.71	47	70442.78
18	69841.53	48	70463.42
19	69862.34	49	70484.06
20	69883.15	50	70504.69
21	69903.96	51	70525.32
22	69924.76	52	70545.94
23	69945.55	53	70566.55
24	69966.33	54	70587.16
25	69987.11	55	70607.76
26	70007.89	56	70628.35
27	70028.66	57	70648.94
28	70049.42	58	70669.53
29	70070.18	59	70690.11
30	70090.93	60	70710.68

45 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	70710.68	30	71325.05
1	70731.24	31	71345.43
2	70751.80	32	71365.81
3	70772.36	33	71386.18
4	70792.91	34	71406.55
5	70813.45	35	71426.91
6	70833.98	36	71447.27
7	70854.51	37	71467.62
8	70875.04	38	71487.96
9	70895.56	39	71508.30
10	70916.07	40	71528.63
11	70936.57	41	71548.95
12	70957.07	42	71569.27
13	70977.57	43	71589.58
14	70998.06	44	71609.89
15	71018.54	45	71630.19
16	71039.01	46	71650.49
17	71059.48	47	71670.78
18	71079.95	48	71691.06
19	71100.41	49	71711.34
20	71120.86	50	71731.61
21	71141.30	51	71751.87
22	71161.74	52	71772.13
23	71182.17	53	71792.38
24	71202.60	54	71812.63
25	71223.02	55	71832.87
26	71243.44	56	71853.10
27	71263.85	57	71873.33
28	71284.26	58	71893.55
29	71304.66	59	71913.77
30	71325.05	60	71933.98

650 TABLE DES SINUS.

46 DEGRÉS.

47 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	71933.98	30	72537.44	0	73135.37	30	73727.73
1	71954.18	31	72557.46	1	73155.20	31	73747.38
2	71974.38	32	72577.47	2	73175.03	32	73767.02
3	71994.57	33	72597.48	3	73194.85	33	73786.66
4	72014.76	34	72617.48	4	73214.67	34	73806.29
5	72034.94	35	72637.48	5	73234.48	35	73825.92
6	72055.11	36	72657.47	6	73254.29	36	73845.54
7	72075.28	37	72677.45	7	73274.09	37	73865.15
8	72095.44	38	72697.43	8	73293.88	38	73884.75
9	72115.59	39	72717.40	9	73313.67	39	73904.35
10	72135.74	40	72737.36	10	73333.45	40	73923.94
11	72155.88	41	72757.32	11	73353.22	41	73943.53
12	72176.02	42	72777.27	12	73372.99	42	73963.11
13	72196.15	43	72797.22	13	73392.75	43	73982.68
14	72216.28	44	72817.16	14	73412.50	44	74002.25
15	72236.40	45	72837.09	15	73432.25	45	74021.81
16	72256.51	46	72857.02	16	73451.99	46	74041.37
17	72276.61	47	72876.94	17	73471.73	47	74060.92
18	72296.71	48	72896.86	18	73491.46	48	74080.46
19	72316.81	49	72916.77	19	73511.18	49	74100.00
20	72336.90	50	72936.67	20	73530.90	50	74119.53
21	72356.98	51	72956.57	21	73550.61	51	74139.05
22	72377.05	52	72976.46	22	73570.32	52	74158.57
23	72397.12	53	72996.35	23	73590.02	53	74178.08
24	72417.18	54	73016.23	24	73609.71	54	74197.58
25	72437.24	55	73036.10	25	73629.39	55	74217.08
26	72457.29	56	73055.97	26	73649.07	56	74236.57
27	72477.34	57	73075.83	27	73668.75	57	74256.06
28	72497.38	58	73095.68	28	73688.42	58	74275.54
29	72517.41	59	73115.53	29	73708.08	59	74295.01
30	72537.44	60	73135.37	30	73727.73	60	74314.48

TABLE DES SINUS.

48 DEGRÉS.

49 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	74314.48	30	74895.57
1	74333.94	31	74914.84
2	74353.40	32	74934.11
3	74372.85	33	74953.37
4	74392.29	34	74972.62
5	74411.72	35	74991.87
6	74431.15	36	75011.11
7	74450.57	37	75030.34
8	74469.99	38	75049.57
9	74489.40	39	75068.79
10	74508.81	40	75088.00
11	74528.21	41	75107.21
12	74547.60	42	75126.41
13	74566.99	43	75145.61
14	74586.37	44	75164.80
15	74605.74	45	75183.98
16	74625.10	46	75203.16
17	74644.46	47	75222.33
18	74663.82	48	75241.49
19	74683.17	49	75260.65
20	74702.51	50	75279.80
21	74721.84	51	75298.94
22	74741.17	52	75318.08
23	74760.49	53	75337.21
24	74779.81	54	75356.34
25	74799.12	55	75375.46
26	74818.42	56	75394.57
27	74837.72	57	75413.68
28	74857.01	58	75432.78
29	74876.29	59	75451.87
30	74895.57	60	75470.96

M	Sinus.	M	Sinus.
0	75470.96	30	76040.60
1	75490.04	31	76059.49
2	75509.11	32	76078.37
3	75528.18	33	76097.24
4	75547.24	34	76116.11
5	75566.30	35	76134.97
6	75585.35	36	76153.83
7	75604.39	37	76172.68
8	75623.42	38	76191.52
9	75642.45	39	76210.36
10	75661.47	40	76229.19
11	75680.49	41	76248.01
12	75699.50	42	76266.83
13	75718.51	43	76285.64
14	75737.51	44	76304.45
15	75756.50	45	76323.25
16	75775.48	46	76342.04
17	75794.46	47	76360.82
18	75813.43	48	76379.62
19	75832.40	49	76398.37
20	75851.36	50	76417.14
21	75870.31	51	76435.90
22	75889.26	52	76454.65
23	75908.20	53	76473.40
24	75927.13	54	76492.14
25	75946.06	55	76510.87
26	75964.98	56	76529.60
27	75983.89	57	76548.32
28	76002.80	58	76567.03
29	76021.70	59	76585.74
30	76040.60	60	76604.44

50 DEGRÉS.

51 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	76604.44	30	77162.46	0	77714.60	30	78260.82
1	76623.14	31	77180.96	1	77732.90	31	78278.92
2	76641.83	32	77199.45	2	77751.20	32	78297.02
3	76660.51	33	77217.94	3	77769.49	33	78315.11
4	76679.18	34	77236.42	4	77787.77	34	78333.20
5	76697.85	35	77254.89	5	77806.04	35	78351.28
6	76716.51	36	77273.36	6	77824.31	36	78369.35
7	76735.17	37	77291.82	7	77842.57	37	78387.41
8	76753.82	38	77310.27	8	77860.83	38	78405.47
9	76772.46	39	77328.72	9	77879.08	39	78423.52
10	76791.10	40	77347.16	10	77897.33	40	78441.57
11	76809.73	41	77365.59	11	77915.57	41	78459.61
12	76828.35	42	77384.02	12	77933.80	42	78477.64
13	76846.97	43	77402.44	13	77952.02	43	78495.66
14	76865.58	44	77420.86	14	77970.24	44	78513.68
15	76884.18	45	77439.27	15	77988.45	45	78531.69
16	76902.78	46	77457.67	16	78006.65	46	78549.70
17	76921.37	47	77476.06	17	78024.85	47	78567.70
18	76939.95	48	77494.45	18	78043.04	48	78585.69
19	76958.53	49	77512.83	19	78061.22	49	78603.67
20	76977.10	50	77531.21	20	78079.40	50	78621.65
21	76995.67	51	77549.58	21	78097.57	51	78639.62
22	77014.23	52	77567.94	22	78115.74	52	78657.59
23	77032.78	53	77586.29	23	78133.90	53	78675.55
24	77051.32	54	77604.64	24	78152.05	54	78693.50
25	77069.86	55	77622.98	25	78170.19	55	78711.45
26	77088.39	56	77641.32	26	78188.33	56	78729.39
27	77106.92	57	77659.65	27	78206.46	57	78747.32
28	77125.44	58	77677.97	28	78224.59	58	78765.24
29	77143.95	59	77696.29	29	78242.71	59	78783.16
30	77162.46	60	77714.60	30	78260.82	60	78801.07

TABLE DES SINUS.

52 DEGRÉS.

53 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	78801.07	30	79335.33	0	79863.55	30	80385.69
1	78818.98	31	79353.04	1	79881.05	31	80402.99
2	78836.88	32	79370.74	2	79898.55	32	80420.28
3	78854.77	33	79388.43	3	79916.04	33	80437.56
4	78872.66	34	79406.11	4	79933.52	34	80454.84
5	78890.54	35	79423.79	5	79951.00	35	80472.11
6	78908.41	36	79441.46	6	79968.47	36	80489.38
7	78926.27	37	79459.12	7	79985.93	37	80506.64
8	78944.13	38	79476.78	8	80003.38	38	80523.89
9	78961.98	39	79494.43	9	80020.83	39	80541.13
10	78979.83	40	79512.08	10	80038.27	40	80558.37
11	78997.67	41	79529.72	11	80055.71	41	80575.60
12	79015.50	42	79547.35	12	80073.14	42	80592.83
13	79033.33	43	79564.97	13	80090.56	43	80610.05
14	79051.15	44	79582.59	14	80107.97	44	80627.26
15	79068.96	45	79600.20	15	80125.38	45	80644.46
16	79086.76	46	79617.80	16	80142.78	46	80661.66
17	79104.56	47	79635.40	17	80160.17	47	80678.85
18	79122.35	48	79652.99	18	80177.56	48	80696.03
19	79140.14	49	79670.57	19	80194.94	49	80713.21
20	79157.92	50	79688.15	20	80212.32	50	80730.38
21	79175.69	51	79705.72	21	80229.69	51	80747.54
22	79193.45	52	79723.28	22	80247.05	52	80764.70
23	79211.21	53	79740.84	23	80264.40	53	80781.85
24	79228.96	54	79758.39	24	80281.75	54	80798.99
25	79246.71	55	79775.93	25	80299.09	55	80816.12
26	79264.45	56	79793.47	26	80316.42	56	80833.25
27	79282.18	57	79811.00	27	80333.75	57	80850.37
28	79299.90	58	79828.52	28	80351.07	58	80867.49
29	79317.62	59	79846.04	29	80368.38	59	80884.60
30	79335.33	60	79863.55	30	80385.69	60	80901.70

654 TABLE DES SINUS.

54 DEGRÉS.

55 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	80901.70	30	81411.55
1	80918.79	31	81428.44
2	80935.88	32	81445.32
3	80952.96	33	81462.19
4	80970.03	34	81479.06
5	80987.10	35	81495.93
6	81004.16	36	81512.78
7	81021.21	37	81529.63
8	81038.26	38	81546.47
9	81055.30	39	81563.30
10	81072.33	40	81580.13
11	81089.36	41	81596.94
12	81106.38	42	81613.76
13	81123.39	43	81630.56
14	81140.40	44	81647.36
15	81157.40	45	81664.15
16	81174.39	46	81680.94
17	81191.37	47	81697.72
18	81208.35	48	81714.49
19	81225.32	49	81731.25
20	81242.29	50	81748.01
21	81259.25	51	81764.76
22	81276.20	52	81781.50
23	81293.14	53	81798.24
24	81310.08	54	81814.97
25	81327.01	55	81831.69
26	81343.93	56	81848.41
27	81360.84	57	81865.12
28	81377.75	58	81881.82
29	81394.65	59	81898.52
30	81411.55	60	81915.21

M	Sinus.	M	Sinus.
0	81915.21	30	82412.62
1	81931.89	31	82429.09
2	81948.56	32	82445.56
3	81965.23	33	82462.02
4	81981.89	34	82478.47
5	81998.54	35	82494.91
6	82015.19	36	82511.35
7	82031.83	37	82527.78
8	82048.46	38	82544.20
9	82065.08	39	82560.62
10	82081.70	40	82577.03
11	82098.31	41	82593.43
12	82114.92	42	82609.83
13	82131.52	43	82626.22
14	82148.11	44	82642.60
15	82164.69	45	82658.97
16	82181.27	46	82675.35
17	82197.84	47	82691.70
18	82214.40	48	82708.06
19	82230.96	49	82724.40
20	82247.51	50	82740.74
21	82264.05	51	82757.07
22	82280.59	52	82773.42
23	82297.12	53	82789.72
24	82313.64	54	82806.03
25	82330.15	55	82822.34
26	82346.66	56	82838.64
27	82363.16	57	82854.93
28	82379.65	58	82871.21
29	82396.14	59	82887.49
30	82412.62	60	82903.76

TABLE DES SINUS.

56 DEGRÉS.

57 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	82903.76	30	83388.58	0	83867.06	30	84339.14
1	82920.02	31	83404.63	1	83882.90	31	84354.77
2	82936.28	32	83420.68	2	83898.73	32	84370.39
3	82952.52	33	83436.72	3	83914.55	33	84386.00
4	82968.77	34	83452.75	4	83930.37	34	84401.60
5	82985.00	35	83468.77	5	83946.18	35	84417.20
6	83001.23	36	83484.79	6	83961.98	36	84432.79
7	83017.44	37	83500.80	7	83977.78	37	84448.37
8	83033.66	38	83516.80	8	83993.57	38	84463.95
9	83049.87	39	83532.79	9	84009.35	39	84479.52
10	83066.07	40	83548.78	10	84025.13	40	84495.08
11	83082.26	41	83564.76	11	84040.90	41	84510.63
12	83098.44	42	83580.73	12	84056.66	42	84526.18
13	83114.62	43	83596.70	13	84072.41	43	84541.72
14	83130.79	44	83612.66	14	84088.16	44	84557.25
15	83146.96	45	83628.61	15	84103.90	45	84572.78
16	83163.12	46	83644.56	16	84119.63	46	84588.30
17	83179.27	47	83660.50	17	84135.36	47	84603.81
18	83195.41	48	83676.43	18	84151.08	48	84619.31
19	83211.55	49	83692.35	19	84166.79	49	84634.81
20	83227.68	50	83708.27	20	84182.49	50	84650.30
21	83243.80	51	83724.18	21	84198.19	51	84665.78
22	83259.91	52	83740.08	22	84213.88	52	84681.26
23	83276.02	53	83755.98	23	84229.56	53	84696.73
24	83292.12	54	83771.87	24	84245.24	54	84712.19
25	83308.21	55	83787.75	25	84260.91	55	84727.64
26	83324.30	56	83803.63	26	84276.57	56	84743.09
27	83340.38	57	83819.50	27	84292.22	57	84758.53
28	83356.45	58	83835.36	28	84307.87	58	84773.97
29	83372.52	59	83851.21	29	84323.51	59	84789.39
30	83388.58	60	83867.06	30	84339.14	60	84804.81

656 TABLE DES SINUS.

58 DEGRÉS.

59 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	84804.81	30	85264.02	0	85716.73	30	86162.92
1	84820.22	31	85279.21	1	85731.71	31	86177.68
2	84835.62	32	85294.40	2	85746.68	32	86192.43
3	84851.02	33	85309.58	3	85761.64	33	86207.17
4	84866.41	34	85324.75	4	85776.60	34	86221.91
5	84881.79	35	85339.92	5	85791.55	35	86236.64
6	84897.17	36	85355.08	6	85806.49	36	86251.36
7	84912.54	37	85370.23	7	85821.42	37	86266.08
8	84927.90	38	85385.37	8	85836.35	38	86280.79
9	84943.35	39	85400.51	9	85851.27	39	86295.49
10	84958.60	40	85415.64	10	85866.18	40	86310.19
11	84973.94	41	85430.76	11	85881.09	41	86324.88
12	84989.27	42	85445.88	12	85895.99	42	86339.56
13	85004.59	43	85460.99	13	85910.88	43	86354.23
14	85019.91	44	85476.09	14	85925.76	44	86368.89
15	85035.22	45	85491.18	15	85940.64	45	86383.55
16	85050.52	46	85506.27	16	85955.51	46	86398.20
17	85065.82	47	85521.35	17	85970.37	47	86412.84
18	85081.11	48	85536.42	18	85985.23	48	86427.48
19	85096.39	49	85551.49	19	86000.07	49	86442.11
20	85111.66	50	85566.55	20	86014.91	50	86456.73
21	85126.93	51	85581.60	21	86029.75	51	86471.34
22	85142.19	52	85596.64	22	86044.57	52	86485.95
23	85157.44	53	85611.68	23	86059.39	53	86500.55
24	85172.69	54	85626.71	24	86074.20	54	86515.14
25	85187.93	55	85641.73	25	86089.00	55	86529.72
26	85203.16	56	85656.74	26	86103.80	56	86544.30
27	85218.39	57	85671.75	27	86118.59	57	86558.87
28	85233.60	58	85686.75	28	86133.37	58	86573.43
29	85248.81	59	85701.74	29	86148.15	59	86587.99
30	85264.02	60	85716.73	30	86162.92	60	86602.54

TABLE DES SINUS.

60 DEGRÉS.

61 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	86602.54	30	87035.57	0	87461.97	30	87881.71
1	86617.08	31	87049.89	1	87476.07	31	87895.59
2	86631.61	32	87064.20	2	87490.16	32	87909.46
3	86646.14	33	87078.51	3	87504.24	33	87923.32
4	86660.66	34	87092.81	4	87518.32	34	87937.17
5	86675.17	35	87107.10	5	87532.39	35	87951.02
6	86689.67	36	87121.38	6	87546.45	36	87964.86
7	86704.17	37	87135.66	7	87560.50	37	87978.69
8	86718.66	38	87149.93	8	87574.55	38	87992.51
9	86733.14	39	87164.19	9	87588.59	39	88006.33
10	86747.62	40	87178.44	10	87602.62	40	88020.14
11	86762.09	41	87192.69	11	87616.65	41	88033.94
12	86776.55	42	87206.93	12	87630.67	42	88047.73
13	86791.00	43	87221.16	13	87644.68	43	88061.52
14	86805.44	44	87235.38	14	87658.68	44	88075.30
15	86819.88	45	87249.60	15	87672.67	45	88089.07
16	86834.31	46	87263.81	16	87686.66	46	88102.84
17	86848.73	47	87278.01	17	87700.64	47	88116.60
18	86863.15	48	87292.21	18	87714.61	48	88130.35
19	86877.56	49	87306.40	19	87728.58	49	88144.09
20	86891.96	50	87320.58	20	87742.54	50	88157.82
21	86906.35	51	87334.75	21	87756.49	51	88171.55
22	86920.74	52	87348.91	22	87770.43	52	88185.27
23	86935.12	53	87363.07	23	87784.37	53	88198.98
24	86949.49	54	87377.22	24	87798.30	54	88212.68
25	86963.85	55	87391.36	25	87812.22	55	88226.38
26	86978.21	56	87405.50	26	87826.13	56	88240.07
27	86992.56	57	87419.63	27	87840.04	57	88253.75
28	87006.90	58	87433.75	28	87853.94	58	88267.43
29	87021.24	59	87447.86	29	87867.83	59	88281.10
30	87035.57	60	87461.97	30	87881.71	60	88294.76

X x

62 DEGRÉS.

63 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	88294.76	30	88701.08	0	89100.66	30	89493.43
1	88308.41	31	88714.51	1	89113.85	31	89506.41
2	88322.05	32	88727.93	2	89127.05	32	89519.38
3	88335.69	33	88741.34	3	89140.24	33	89532.34
4	88349.32	34	88754.75	4	89153.42	34	89545.29
5	88362.94	35	88768.15	5	89166.59	35	89558.24
6	88376.56	36	88781.54	6	89179.75	36	89571.18
7	88390.17	37	88794.92	7	89192.91	37	89584.11
8	88403.77	38	88808.29	8	89206.06	38	89597.03
9	88417.36	39	88821.66	9	89219.20	39	89609.94
10	88430.95	40	88835.02	10	89232.34	40	89622.85
11	88444.53	41	88848.37	11	89245.46	41	89635.75
12	88458.10	42	88861.72	12	89258.58	42	89648.64
13	88471.66	43	88875.06	13	89271.69	43	89661.52
14	88485.22	44	88888.39	14	89284.79	44	89674.40
15	88498.76	45	88901.71	15	89297.89	45	89687.27
16	88512.30	46	88915.03	16	89310.98	46	89700.13
17	88525.83	47	88928.34	17	89324.06	47	89712.99
18	88539.36	48	88941.64	18	89337.14	48	89725.84
19	88552.88	49	88954.93	19	89350.21	49	89738.68
20	88566.39	50	88968.21	20	89363.27	50	89751.51
21	88579.89	51	88981.49	21	89376.32	51	89764.33
22	88593.39	52	88994.76	22	89389.36	52	89777.15
23	88606.88	53	89008.02	23	89402.39	53	89789.96
24	88620.36	54	89021.28	24	89415.42	54	89802.76
25	88633.83	55	89034.53	25	89428.44	55	89815.55
26	88647.29	56	89047.77	26	89441.45	56	89828.34
27	88660.75	57	89061.00	27	89454.46	57	89841.12
28	88674.20	58	89074.22	28	89467.46	58	89853.89
29	88687.64	59	89087.44	29	89480.45	59	89866.65
30	88701.08	60	89100.65	30	89493.43	60	89879.40

TABLE DES SINUS.

64 DEGRÉS.

65 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	89879.40	30	90258.53	0	90630.78	30	90996.13
1	89892.15	31	90271.05	1	90643.07	31	91008.19
2	89904.89	32	90283.56	2	90655.35	32	91020.24
3	89917.62	33	90296.06	3	90667.62	33	91032.28
4	89930.35	34	90308.56	4	90679.89	34	91044.31
5	89943.07	35	90321.05	5	90692.15	35	91056.35
6	89955.78	36	90333.53	6	90704.40	36	91068.37
7	89968.48	37	90346.00	7	90716.64	37	91080.38
8	89981.17	38	90358.47	8	90728.88	38	91092.38
9	89993.86	39	90370.93	9	90741.11	39	91104.38
10	90006.54	40	90383.38	10	90753.33	40	91116.37
11	90019.21	41	90395.82	11	90765.54	41	91128.35
12	90031.87	42	90408.25	12	90777.75	42	91140.32
13	90044.53	43	90420.68	13	90789.95	43	91152.29
14	90057.18	44	90433.10	14	90802.14	44	91164.25
15	90069.82	45	90445.51	15	90814.32	45	91176.20
16	90082.45	46	90457.92	16	90826.49	46	91188.14
17	90095.08	47	90470.32	17	90838.66	47	91200.08
18	90107.70	48	90482.71	18	90850.82	48	91212.01
19	90120.31	49	90495.09	19	90862.97	49	91223.93
20	90132.91	50	90507.46	20	90875.11	50	91235.84
21	90145.51	51	90519.83	21	90887.25	51	91247.75
22	90158.10	52	90532.19	22	90899.38	52	91259.65
23	90170.68	53	90544.54	23	90911.50	53	91271.54
24	90183.25	54	90556.88	24	90923.61	54	91283.42
25	90195.82	55	90569.21	25	90935.71	55	91295.29
26	90208.38	56	90581.54	26	90947.81	56	91307.16
27	90220.92	57	90593.86	27	90959.90	57	91319.02
28	90233.47	58	90606.17	28	90971.98	58	91330.87
29	90246.00	59	90618.48	29	90984.06	59	91342.71
30	90258.53	60	90630.78	30	90996.13	60	91354.54

X x ij

66 DEGRÉS.

67 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	91354.54	30	91706.01	0	92050.49	30	92387.95
1	91366.37	31	91717.60	1	92061.85	31	92399.08
2	91378.19	32	91729.19	2	92073.20	32	92410.10
3	91390.00	33	91740.77	3	92084.55	33	92421.31
4	91401.81	34	91752.34	4	92095.89	34	92432.41
5	91413.51	35	91763.90	5	92107.22	35	92443.51
6	91425.40	36	91775.46	6	92118.54	36	92454.60
7	91437.18	37	91787.01	7	92129.85	37	92465.68
8	91448.95	38	91798.55	8	92141.16	38	92476.75
9	91460.71	39	91810.08	9	92152.46	39	92487.82
10	91472.47	40	91821.61	10	92163.75	40	92498.88
11	91484.22	41	91833.13	11	92175.03	41	92509.93
12	91495.96	42	91844.64	12	92186.31	42	92520.97
13	91507.70	43	91856.14	13	92197.58	43	92532.00
14	91519.43	44	91867.63	14	92208.84	44	92543.03
15	91531.15	45	91879.12	15	92220.09	45	92554.05
16	91542.86	46	91890.60	16	92231.34	46	92565.06
17	91554.56	47	91902.07	17	92242.58	47	92576.06
18	91566.26	48	91913.53	18	92253.81	48	92587.06
19	91577.95	49	91924.99	19	92265.03	49	92598.05
20	91589.63	50	91936.44	20	92276.24	50	92609.02
21	91601.30	51	91947.88	21	92287.45	51	92620.00
22	91612.96	52	91959.31	22	92298.65	52	92630.96
23	91624.62	53	91970.73	23	92309.84	53	92641.91
24	91636.27	54	91982.15	24	92321.02	54	92651.86
25	91647.91	55	91993.56	25	92332.19	55	92661.80
26	91659.55	56	92004.96	26	92343.36	56	92674.73
27	91671.18	57	92016.35	27	92354.52	57	92685.66
28	91682.80	58	92027.74	28	92365.67	58	92696.58
29	91694.41	59	92039.12	29	92376.82	59	92707.49
30	91706.01	60	92050.49	30	92387.95	60	92718.39

TABLE DES SINUS.

68 DEGRÉS.

69 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	92718.39	30	93041.75	0	93358.04	30	93667.22
1	92729.28	31	93052.41	1	93368.46	31	93677.40
2	92740.16	32	93063.06	2	93378.87	32	93687.57
3	92751.04	33	93073.70	3	93389.28	33	93697.74
4	92761.91	34	93084.33	4	93399.68	34	93707.90
5	92772.77	35	93094.96	5	93410.07	35	93718.05
6	92783.62	36	93105.58	6	93420.45	36	93728.19
7	92794.47	37	93116.19	7	93430.82	37	93738.33
8	92805.31	38	93126.79	8	93441.18	38	93748.46
9	92816.14	39	93137.38	9	93451.54	39	93758.58
10	92826.96	40	93147.97	10	93461.89	40	93768.69
11	92837.77	41	93158.55	11	93472.23	41	93778.80
12	92848.58	42	93169.12	12	93482.56	42	93788.89
13	92859.38	43	93179.68	13	93492.89	43	93798.98
14	92870.17	44	93190.24	14	93503.21	44	93809.06
15	92880.95	45	93200.79	15	93513.52	45	93819.13
16	92891.73	46	93211.33	16	93523.82	46	93829.19
17	92902.50	47	93221.86	17	93534.11	47	93839.25
18	92913.26	48	93232.38	18	93544.40	48	93849.30
19	92924.01	49	93242.89	19	93554.68	49	93859.34
20	92934.75	50	93253.40	20	93564.95	50	93869.37
21	92945.49	51	93263.90	21	93575.21	51	93879.40
22	92956.22	52	93274.39	22	93585.46	52	93889.42
23	92966.94	53	93284.87	23	93595.71	53	93899.43
24	92977.65	54	93295.35	24	93605.95	54	93909.43
25	92988.35	55	93305.82	25	93616.18	55	93919.42
26	92999.05	56	93316.28	26	93626.40	56	93929.40
27	93009.74	57	93326.73	27	93636.62	57	93939.38
28	93020.42	58	93337.17	28	93646.83	58	93949.35
29	93031.09	59	93347.61	29	93657.03	59	93959.31
30	93041.75	60	93358.04	30	93667.22	60	93969.26

70 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	93969.26	30	94264.15
1	93979.21	31	94273.86
2	93989.14	32	94283.56
3	93999.07	33	94293.25
4	94008.99	34	94302.93
5	94018.90	35	94312.60
6	94028.81	36	94322.26
7	94038.71	37	94331.92
8	94048.60	38	94341.57
9	94058.48	39	94351.21
10	94068.35	40	94360.85
11	94078.22	41	94370.48
12	94088.08	42	94380.10
13	94097.93	43	94389.71
14	94107.77	44	94399.31
15	94117.60	45	94408.90
16	94127.42	46	94418.49
17	94137.24	47	94428.07
18	94147.05	48	94437.64
19	94156.86	49	94447.20
20	94166.65	50	94456.75
21	94176.44	51	94466.30
22	94186.22	52	94475.84
23	94195.99	53	94485.37
24	94205.75	54	94494.89
25	94215.50	55	94504.40
26	94225.24	56	94513.91
27	94234.98	57	94523.41
28	94244.71	58	94532.90
29	94254.43	59	94542.38
30	94264.15	60	94551.85

71 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	94551.85	30	94832.36
1	94561.32	31	94841.59
2	94570.78	32	94850.81
3	94580.23	33	94860.02
4	94589.67	34	94869.22
5	94599.10	35	94878.41
6	94608.53	36	94887.60
7	94617.95	37	94896.78
8	94627.36	38	94905.95
9	94636.76	39	94915.11
10	94646.16	40	94924.26
11	94655.55	41	94933.41
12	94664.93	42	94942.55
13	94674.30	43	94951.68
14	94683.66	44	94960.80
15	94693.01	45	94969.91
16	94702.36	46	94979.02
17	94711.70	47	94988.12
18	94721.03	48	94997.21
19	94730.35	49	95006.29
20	94739.66	50	95015.36
21	94748.97	51	95024.42
22	94758.27	52	95033.48
23	94767.56	53	95042.53
24	94776.84	54	95051.57
25	94786.11	55	95060.60
26	94795.38	56	95069.63
27	94804.64	57	95078.65
28	94813.89	58	95087.66
29	94823.13	59	95096.66
30	94832.36	60	95105.65

TABLE DES SINUS.

72 DEGRÉS.

73 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	95105.65	30	95371.69	0	95630.48	30	95881.97
1	95114.63	31	95380.43	1	95638.98	31	95890.23
2	95123.61	32	95389.17	2	95647.47	32	95898.48
3	95132.58	33	95397.90	3	95655.95	33	95906.72
4	95141.54	34	95406.62	4	95664.43	34	95914.95
5	95150.50	35	95415.33	5	95672.90	35	95923.18
6	95159.44	36	95424.03	6	95681.36	36	95931.40
7	95168.38	37	95432.72	7	95689.81	37	95939.61
8	95177.31	38	95441.41	8	95698.25	38	95947.81
9	95186.23	39	95450.09	9	95706.69	39	95956.00
10	95195.14	40	95458.76	10	95715.12	40	95964.18
11	95204.04	41	95467.42	11	95723.54	41	95972.36
12	95212.94	42	95476.07	12	95731.95	42	95980.53
13	95221.83	43	95484.72	13	95740.35	43	95988.69
14	95230.71	44	95493.36	14	95748.75	44	95996.84
15	95239.58	45	95501.99	15	95757.14	45	96004.98
16	95248.44	46	95510.61	16	95765.52	46	96013.12
17	95257.30	47	95519.23	17	95773.89	47	96021.25
18	95266.15	48	95527.83	18	95782.25	48	96029.37
19	95274.99	49	95536.43	19	95790.60	49	96037.48
20	95283.82	50	95545.02	20	95798.95	50	96045.58
21	95292.64	51	95553.60	21	95807.29	51	96053.68
22	95301.46	52	95562.17	22	95815.62	52	96061.77
23	95310.27	53	95570.74	23	95823.94	53	96069.85
24	95319.07	54	95579.30	24	95832.26	54	96077.92
25	95327.86	55	95587.85	25	95840.56	55	96085.98
26	95336.64	56	95596.39	26	95848.86	56	96094.03
27	95345.42	57	95604.92	27	95857.15	57	96102.08
28	95354.18	58	95613.45	28	95865.43	58	96110.12
29	95362.94	59	95621.97	29	95873.70	59	96118.15
30	95371.69	60	95630.48	30	95881.97	60	96126.17

74 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	96126.17	30	96363.05
1	96134.18	31	96370.83
2	96142.19	32	96378.58
3	96150.19	33	96386.33
4	96158.18	34	96394.07
5	96166.16	35	96401.81
6	96174.13	36	96409.54
7	96182.09	37	96417.26
8	96190.05	38	96424.97
9	96198.00	39	96432.67
10	96205.94	40	96440.37
11	96213.87	41	96448.06
12	96221.80	42	96455.74
13	96229.72	43	96463.41
14	96237.62	44	96471.07
15	96245.53	45	96478.73
16	96253.42	46	96486.38
17	96261.30	47	96494.02
18	96269.17	48	96501.65
19	96277.04	49	96509.27
20	96284.90	50	96516.88
21	96292.75	51	96524.49
22	96300.59	52	96532.09
23	96308.43	53	96539.68
24	96316.26	54	96547.26
25	96324.08	55	96554.83
26	96331.89	56	96562.40
27	96339.69	57	96569.96
28	96347.48	58	96577.51
29	96355.27	59	96585.05
30	96363.05	60	96592.58

75 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	96592.58	30	96814.76
1	96600.10	31	96822.04
2	96607.62	32	96829.31
3	96615.13	33	96836.57
4	96622.63	34	96843.83
5	96630.12	35	96851.08
6	96637.60	36	96858.32
7	96645.08	37	96865.55
8	96652.55	38	96872.77
9	96660.01	39	96879.98
10	96667.46	40	96887.18
11	96674.90	41	96894.38
12	96682.33	42	96901.57
13	96689.76	43	96908.75
14	96697.18	44	96915.92
15	96704.59	45	96923.09
16	96711.99	46	96930.25
17	96719.38	47	96937.40
18	96726.77	48	96944.54
19	96734.15	49	96951.67
20	96741.52	50	96958.79
21	96748.88	51	96965.90
22	96756.23	52	96973.01
23	96763.58	53	96980.11
24	96770.92	54	96987.20
25	96778.25	55	96994.28
26	96785.57	56	97001.35
27	96792.88	57	97008.42
28	96800.18	58	97015.48
29	96807.47	59	97022.53
30	96814.76	60	97029.57

TABLE DES SINUS.

76 DEGRÉS.

77 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	97029.57	30	97236.99	0	97437.01	30	97629.60
1	97036.60	31	97243.78	1	97443.51	31	97635.89
2	97043.63	32	97250.56	2	97450.08	32	97642.17
3	97050.65	33	97257.33	3	97456.60	33	97648.45
4	97057.66	34	97264.09	4	97463.11	34	97654.72
5	97064.66	35	97270.84	5	97469.62	35	97660.98
6	97071.65	36	97277.58	6	97476.12	36	97667.23
7	97078.63	37	97284.32	7	97482.61	37	97673.47
8	97085.61	38	97291.05	8	97489.09	38	97679.70
9	97092.58	39	97297.77	9	97495.56	39	97685.93
10	97099.54	40	97304.48	10	97502.03	40	97692.15
11	97106.49	41	97311.18	11	97508.49	41	97698.36
12	97113.43	42	97317.88	12	97514.94	42	97704.56
13	97120.36	43	97324.57	13	97521.38	43	97710.75
14	97127.29	44	97331.25	14	97527.81	44	97716.93
15	97134.21	45	97337.92	15	97534.23	45	97723.11
16	97141.22	46	97344.58	16	97540.65	46	97729.28
17	97148.02	47	97351.24	17	97547.06	47	97735.44
18	97154.91	48	97357.89	18	97553.46	48	97741.59
19	97161.79	49	97364.53	19	97559.85	49	97747.73
20	97168.67	50	97371.16	20	97566.23	50	97753.86
21	97175.54	51	97377.78	21	97572.60	51	97759.99
22	97182.40	52	97384.39	22	97578.97	52	97766.11
23	97189.25	53	97391.00	23	97585.33	53	97772.22
24	97196.09	54	97397.60	24	97591.68	54	97778.32
25	97202.93	55	97404.19	25	97598.02	55	97784.41
26	97209.76	56	97410.77	26	97604.35	56	97790.50
27	97216.58	57	97417.34	27	97610.67	57	97796.58
28	97223.39	58	97423.90	28	97616.99	58	97802.65
29	97230.29	59	97430.46	29	97623.30	59	97808.71
30	97236.99	60	97437.02	30	97629.60	60	97814.76

78 DEGRÉS.

79 DEGRÉS.

M.	Sinus.	M.	Sinus.	M.	Sinus.	M.	Sinus.
0	97814.76	30	97992.47	0	98162.71	30	98325.49
1	97820.80	31	97998.26	1	98168.26	31	98330.79
2	97826.84	32	98004.05	2	98173.80	32	98336.08
3	97832.87	33	98009.83	3	98179.33	33	98341.36
4	97838.89	34	98015.60	4	98184.85	34	98346.63
5	97844.90	35	98021.36	5	98190.36	35	98351.89
6	97850.90	36	98027.11	6	98195.97	36	98357.14
7	97856.89	37	98032.86	7	98201.37	37	98362.39
8	97862.88	38	98038.60	8	98206.86	38	98367.63
9	97868.86	39	98044.33	9	98212.34	39	98372.86
10	97874.83	40	98050.05	10	98217.81	40	98378.08
11	97880.79	41	98055.76	11	98223.27	41	98383.29
12	97886.74	42	98061.46	12	98228.72	42	98388.50
13	97892.68	43	98067.16	13	98234.17	43	98393.70
14	97898.62	44	98072.85	14	98239.61	44	98398.89
15	97904.55	45	98078.53	15	98245.04	45	98404.07
16	97910.47	46	98084.20	16	98250.46	46	98409.24
17	97916.38	47	98089.86	17	98255.87	47	98414.40
18	97922.28	48	98095.51	18	98261.27	48	98419.56
19	97928.17	49	98101.16	19	98266.67	49	98424.71
20	97934.06	50	98106.80	20	98272.06	50	98429.85
21	97939.94	51	98112.43	21	98277.44	51	98434.98
22	97945.81	52	98118.05	22	98282.81	52	98440.10
23	97951.67	53	98123.66	23	98288.17	53	98445.21
24	97957.52	54	98129.26	24	98293.53	54	98450.31
25	97963.37	55	98134.86	25	98298.88	55	98455.41
26	97969.21	56	98140.45	26	98304.22	56	98460.50
27	97975.04	57	98146.03	27	98309.55	57	98465.58
28	97980.86	58	98151.60	28	98314.87	58	98470.65
29	97986.67	59	98157.16	29	98320.18	59	98475.71
30	97992.47	60	98162.71	30	98325.49	60	98480.77

TABLE DES SINUS.

800

80 DEGRÉS.

81 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	98480.77	30	98628.56	0	98768.83	30	98901.58
1	98485.82	31	98633.36	1	98773.38	31	98905.88
2	98490.86	32	98638.15	2	98777.92	32	98910.17
3	98495.89	33	98642.93	3	98782.45	33	98914.45
4	98500.91	34	98647.70	4	98786.97	34	98918.72
5	98505.92	35	98652.46	5	98791.48	35	98922.98
6	98510.93	36	98657.21	6	98795.98	36	98927.23
7	98515.93	37	98661.96	7	98800.48	37	98931.47
8	98520.92	38	98666.70	8	98804.97	38	98935.71
9	98525.90	39	98671.43	9	98809.45	39	98939.94
10	98530.87	40	98676.15	10	98813.92	40	98944.16
11	98535.83	41	98680.86	11	98818.38	41	98948.37
12	98540.79	42	98685.57	12	98822.83	42	98952.57
13	98545.74	43	98690.27	13	98827.28	43	98956.77
14	98550.68	44	98694.96	14	98831.72	44	98960.96
15	98555.61	45	98699.64	15	98836.15	45	98965.14
16	98560.53	46	98704.31	16	98840.57	46	98969.31
17	98565.44	47	98708.97	17	98844.98	47	98973.47
18	98570.34	48	98713.62	18	98849.38	48	98977.62
19	98575.24	49	98718.27	19	98853.78	49	98981.76
20	98580.13	50	98722.91	20	98858.17	50	98985.90
21	98585.01	51	98727.54	21	98862.55	51	98990.03
22	98589.88	52	98732.16	22	98866.92	52	98994.15
23	98594.74	53	98736.77	23	98871.28	53	98998.26
24	98599.60	54	98741.38	24	98875.63	54	99002.36
25	98604.45	55	98745.98	25	98879.98	55	99006.45
26	98609.29	56	98750.57	26	98884.32	56	99010.54
27	98614.12	57	98755.15	27	98888.65	57	99014.62
28	98618.94	58	98759.72	28	98892.97	58	99018.69
29	98623.75	59	98764.28	29	98897.28	59	99022.75
30	98628.56	60	98768.83	30	98901.58	60	99026.80

Y y ij

DEGRÉS.

83 DEGRÉS.

M.	Sinus.	M.	Sinus.	M.	Sinus.	M.	Sinus.
0	99026.80	30	99144.49	0	99254.62	30	99357.18
1	99030.84	31	99148.28	1	99258.16	31	99360.47
2	99034.88	32	99152.06	2	99261.69	32	99363.75
3	99038.91	33	99155.84	3	99265.21	33	99367.01
4	99042.93	34	99159.61	4	99268.72	34	99370.28
5	99046.92	35	99163.37	5	99272.23	35	99373.54
6	99050.94	36	99167.12	6	99275.73	36	99376.79
7	99054.93	37	99170.86	7	99279.22	37	99380.03
8	99058.92	38	99174.59	8	99282.70	38	99383.26
9	99062.90	39	99178.31	9	99286.17	39	99386.48
10	99066.87	40	99182.03	10	99289.64	40	99389.69
11	99070.83	41	99185.74	11	99293.10	41	99392.89
12	99074.78	42	99189.44	12	99296.55	42	99396.09
13	99078.72	43	99193.13	13	99299.99	43	99399.28
14	99082.66	44	99196.81	14	99303.42	44	99402.46
15	99086.59	45	99200.49	15	99306.84	45	99405.63
16	99090.51	46	99204.16	16	99310.25	46	99408.79
17	99094.41	47	99207.82	17	99313.66	47	99411.94
18	99098.32	48	99211.47	18	99317.06	48	99415.09
19	99102.21	49	99215.11	19	99320.45	49	99418.23
20	99106.09	50	99218.74	20	99323.83	50	99421.36
21	99109.97	51	99222.36	21	99327.20	51	99424.48
22	99113.84	52	99225.98	22	99330.57	52	99427.59
23	99117.70	53	99229.59	23	99333.93	53	99430.69
24	99121.55	54	99233.19	24	99337.28	54	99433.79
25	99125.39	55	99236.78	25	99340.62	55	99436.88
26	99129.23	56	99240.36	26	99343.95	56	99439.96
27	99133.06	57	99243.94	27	99347.27	57	99443.03
28	99136.88	58	99247.51	28	99350.58	58	99446.09
29	99140.69	59	99251.07	29	99353.88	59	99449.14
30	99144.49	60	99254.62	30	99357.18	60	99452.18

TABLE DES SINUS.

84 DEGRÉS.

85 DEGRÉS.

M.	Sinus.	M.	Sinus.	M.	Sinus.	M.	Sinus.
0	99452.18	30	99539.62	0	99619.47	30	99691.73
1	99455.22	31	99542.40	1	99622.00	31	99694.01
2	99458.25	32	99545.17	2	99624.52	32	99696.28
3	99461.27	33	99547.94	3	99627.03	33	99698.54
4	99464.28	34	99550.70	4	99629.54	34	99700.79
5	99467.28	35	99553.45	5	99632.04	35	99703.03
6	99470.27	36	99556.19	6	99634.53	36	99705.27
7	99473.26	37	99558.91	7	99637.01	37	99707.50
8	99476.24	38	99561.65	8	99639.48	38	99709.72
9	99479.21	39	99564.37	9	99641.94	39	99711.93
10	99482.17	40	99567.08	10	99644.40	40	99714.13
11	99485.12	41	99569.78	11	99646.85	41	99716.32
12	99488.06	42	99572.47	12	99649.29	42	99718.51
13	99491.00	43	99575.15	13	99651.72	43	99720.69
14	99493.93	44	99577.82	14	99654.14	44	99722.86
15	99496.85	45	99580.49	15	99656.55	45	99725.02
16	99499.76	46	99583.15	16	99658.95	46	99727.17
17	99502.66	47	99585.80	17	99661.35	47	99729.31
18	99505.55	48	99588.44	18	99663.74	48	99731.44
19	99508.44	49	99591.07	19	99666.12	49	99733.57
20	99511.32	50	99593.69	20	99668.49	50	99735.69
21	99514.19	51	99596.31	21	99670.85	51	99737.80
22	99517.05	52	99598.92	22	99673.20	52	99739.90
23	99519.90	53	99601.52	23	99675.55	53	99741.99
24	99522.74	54	99604.11	24	99677.89	54	99744.07
25	99525.57	55	99606.69	25	99680.22	55	99746.15
26	99528.40	56	99609.26	26	99682.54	56	99748.22
27	99531.22	57	99611.82	27	99684.85	57	99750.28
28	99534.03	58	99614.38	28	99687.15	58	99751.33
29	99536.83	59	99616.93	29	99689.44	59	99751.37
30	99539.62	60	99619.47	30	99691.73	60	99756.40

670 TABLE DES SINUS.

86 DEGRÉS.

87 DEGRÉS.

M.	Sinus.	M.	Sinus.	M.	Sinus.	M.	Sinus.
0	99756.40	30	99813.48	0	99862.95	30	99904.82
1	99758.42	31	99815.25	1	99864.47	31	99906.08
2	99760.44	32	99817.01	2	99865.98	32	99907.34
3	99762.45	33	99818.78	3	99867.48	33	99908.59
4	99764.45	34	99820.51	4	99868.97	34	99909.83
5	99766.44	35	99822.25	5	99870.45	35	99911.06
6	99768.42	36	99823.98	6	99871.93	36	99912.28
7	99770.39	37	99825.70	7	99873.40	37	99913.49
8	99772.36	38	99827.41	8	99874.86	38	99914.70
9	99774.32	39	99829.11	9	99876.31	39	99915.90
10	99776.27	40	99830.81	10	99877.75	40	99917.09
11	99778.21	41	99832.50	11	99879.18	41	99918.27
12	99780.14	42	99834.18	12	99880.61	42	99919.44
13	99782.06	43	99835.85	13	99882.03	43	99920.60
14	99783.98	44	99837.51	14	99883.44	44	99921.75
15	99785.89	45	99839.16	15	99884.84	45	99922.90
16	99787.79	46	99840.81	16	99886.23	46	99924.04
17	99789.68	47	99842.45	17	99887.61	47	99925.17
18	99791.56	48	99844.08	18	99888.98	48	99926.29
19	99793.43	49	99845.70	19	99890.35	49	99927.40
20	99795.29	50	99847.31	20	99891.71	50	99928.51
21	99797.15	51	99848.91	21	99893.06	51	99929.60
22	99799.00	52	99850.50	22	99894.40	52	99930.69
23	99800.84	53	99852.09	23	99895.73	53	99931.77
24	99802.67	54	99853.67	24	99897.05	54	99932.84
25	99804.49	55	99855.24	25	99898.37	55	99933.90
26	99806.30	56	99856.80	26	99899.68	56	99934.95
27	99808.11	57	99858.35	27	99900.98	57	99935.99
28	99809.91	58	99859.89	28	99902.27	58	99937.03
29	99811.70	59	99861.42	29	99903.55	59	99938.06
30	99813.48	60	99862.95	30	99904.82	60	99939.08

TABLE DES SINUS.

88 DEGRÉS.

89 DEGRÉS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	99939.08	30	99965.73	0	99984.77	30	99996.19
1	99940.09	31	99966.49	1	99985.27	31	99996.44
2	99941.09	32	99967.24	2	99985.76	32	99996.68
3	99942.09	33	99967.98	3	99986.25	33	99996.92
4	99943.08	34	99968.71	4	99986.73	34	99997.14
5	99944.06	35	99969.43	5	99987.20	35	99997.36
6	99945.03	36	99970.14	6	99987.66	36	99997.56
7	99945.99	37	99970.85	7	99988.11	37	99997.76
8	99946.94	38	99971.55	8	99988.55	38	99997.95
9	99947.88	39	99972.24	9	99988.99	39	99998.13
10	99948.81	40	99972.92	10	99989.42	40	99998.31
11	99949.74	41	99973.59	11	99989.84	41	99998.47
12	99950.66	42	99974.25	12	99990.25	42	99998.63
13	99951.57	43	99974.91	13	99990.65	43	99998.78
14	99952.47	44	99975.56	14	99991.04	44	99998.92
15	99953.36	45	99976.20	15	99991.43	45	99999.05
16	99954.24	46	99976.83	16	99991.81	46	99999.17
17	99955.11	47	99977.45	17	99992.18	47	99999.28
18	99955.98	48	99978.06	18	99992.54	48	99999.39
19	99956.84	49	99978.67	19	99992.89	49	99999.49
20	99957.69	50	99979.27	20	99993.23	50	99999.58
21	99958.53	51	99979.86	21	99993.56	51	99999.66
22	99959.36	52	99980.44	22	99993.89	52	99999.73
23	99960.19	53	99981.01	23	99994.21	53	99999.79
24	99961.01	54	99981.57	24	99994.52	54	99999.85
25	99961.82	55	99982.12	25	99994.82	55	99999.89
26	99962.62	56	99982.67	26	99995.11	56	99999.93
27	99963.41	57	99983.21	27	99995.39	57	99999.96
28	99964.19	58	99983.74	28	99995.66	58	99999.98
29	99964.96	59	99984.26	29	99995.93	59	99999.99
30	99965.73	60	99984.77	30	99996.19	60	100000.00

Sinus de 90 degrés = 100000.00 parties.

672 TANGENTES ET SECANTES.

TANGENTES
des Angles
au-deffous d'un Degré.

SECANTES
des Angles
au-deffous d'un Degré.

M	Tangen.	M	Tangen.	M	Secantes.	M	Secantes.
0	0	30	872.69	0	100000.00	30	100003.80
1	29.09	31	901.78	1	100000.00	31	100004.06
2	58.18	32	930.87	2	100000.02	32	100004.33
3	87.27	33	959.96	3	100000.04	33	100004.61
4	116.36	34	989.05	4	100000.07	34	100004.89
5	145.44	35	1018.14	5	100000.11	35	100005.18
6	174.53	36	1047.24	6	100000.16	36	100005.48
7	203.62	37	1076.33	7	100000.21	37	100005.79
8	232.71	38	1105.42	8	100000.27	38	100006.11
9	261.80	39	1134.51	9	100000.34	39	100006.44
10	290.89	40	1163.61	10	100000.42	40	100006.77
11	319.98	41	1192.70	11	100000.51	41	100007.11
12	349.06	42	1221.79	12	100000.61	42	100007.46
13	378.16	43	1250.88	13	100000.72	43	100007.82
14	407.25	44	1279.98	14	100000.83	44	100008.19
15	436.33	45	1309.07	15	100000.95	45	100008.57
16	465.42	46	1338.17	16	100001.08	46	100008.96
17	494.51	47	1367.26	17	100001.22	47	100009.35
18	523.60	48	1396.35	18	100001.37	48	100009.75
19	552.69	49	1425.45	19	100001.53	49	100010.16
20	581.78	50	1454.54	20	100001.70	50	100010.58
21	610.87	51	1483.64	21	100001.87	51	100011.01
22	639.96	52	1512.73	22	100002.05	52	100011.45
23	669.05	53	1541.83	23	100002.24	53	100011.89
24	698.14	54	1570.93	24	100002.44	54	100012.34
25	727.23	55	1600.02	25	100002.65	55	100012.80
26	756.32	56	1629.12	26	100002.86	56	100013.27
27	785.41	57	1658.21	27	100003.08	57	100013.75
28	814.50	58	1687.31	28	100003.31	58	100014.24
29	843.60	59	1716.41	29	100003.55	59	100014.73
30	872.69	60	1745.51	30	100003.80	60	100015.23

REMARQUE.

R E M A R Q U E.

L'Approbation & le Privilege de cet Ouvrage, se trouvent dans la *Théorie des Êtres sensibles*, dont ce Volume renferme la partie Mathématique.

PAGES.	LIGNES.	FAUTES A CORRIGER.	
		FAUTES.	L I S E Z.
XV.	31	trois à quatre ans	trois ou quatre ans
XXI.	4	III°. On sera peut-être	On sera peut-être
	21	IV°. Le Cours de Physique,	Le Cours de Physique,
	41	des quadrillons, Ou bien (fig. 89),	des quatrillons, Ou bien (fig. 117),
470	21	trouver par	trouver à peu près par
506	29	Pieds de toise cubes.	Pieds de toise cube.
626.	32	jusqu'à 30 minutes	jusqu'à 60 minutes

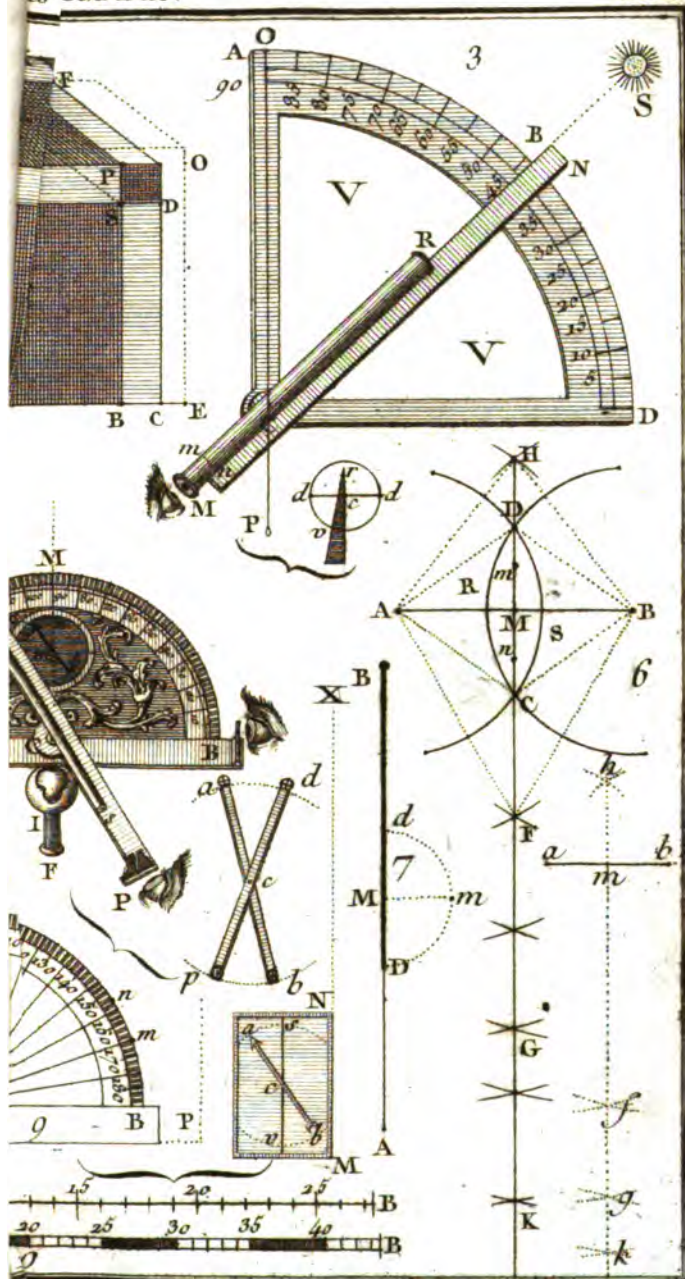
PAGE 152. *Il y a une omission dans cette page ; omission qui fait la suite de cette dernière ligne du problème : supplément à l'angle donné A & à l'angle trouvé C. (386.)*

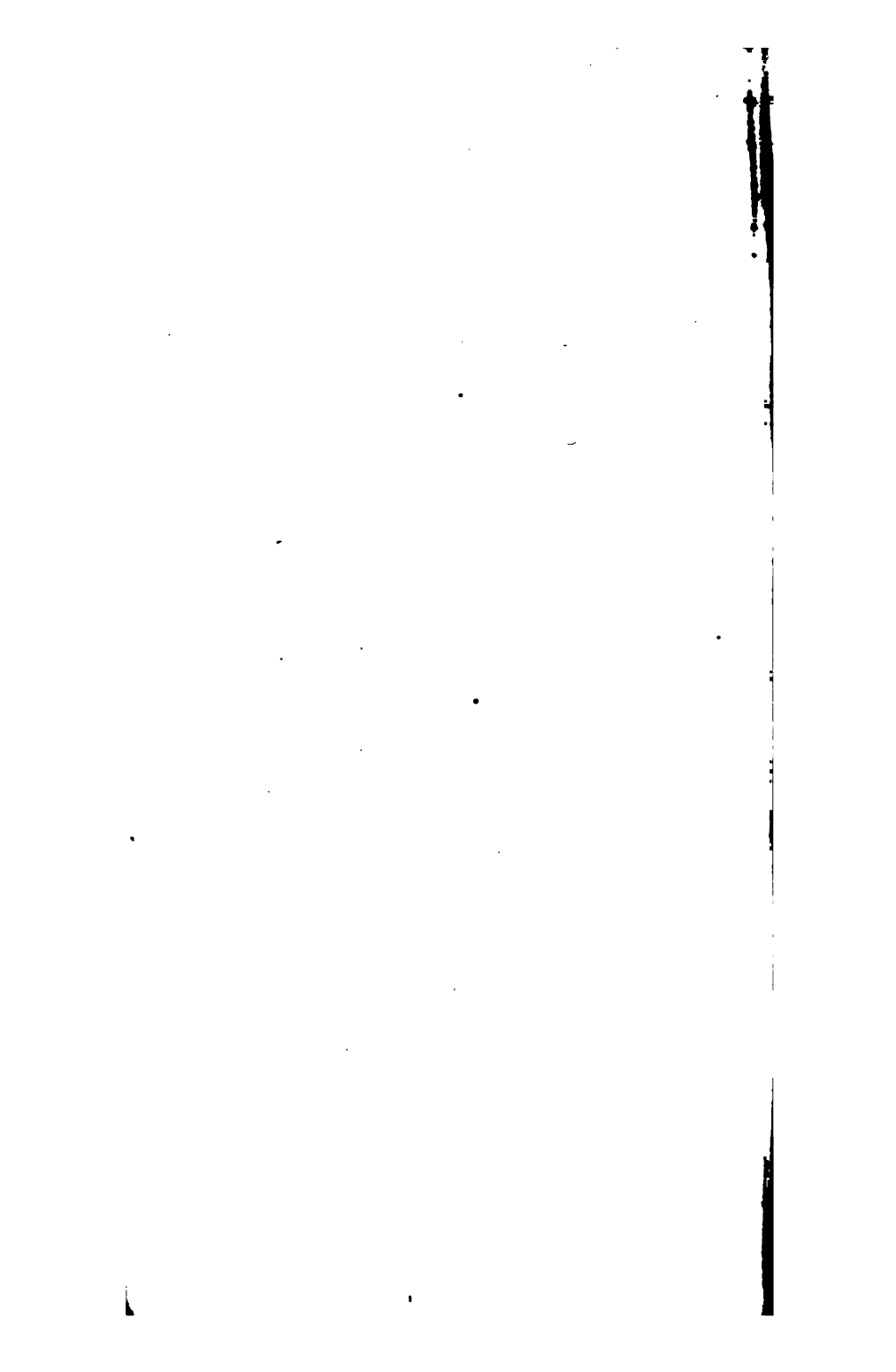
Mais il faut faire attention ici que l'angle que l'on cherche, peut être ou aigu ou obtus ; & qu'en cherchant la valeur de cet angle inconnu , aigu ou obtus , on trouve toujours un nombre qui répond dans les tables des sinus , à un angle aigu : parce que les nombres marqués dans les tables sont indifféremment ou le sinus d'un angle aigu , ou le sinus d'un angle obtus supplément à cet angle aigu (636). Par exemple (fig. 16) :

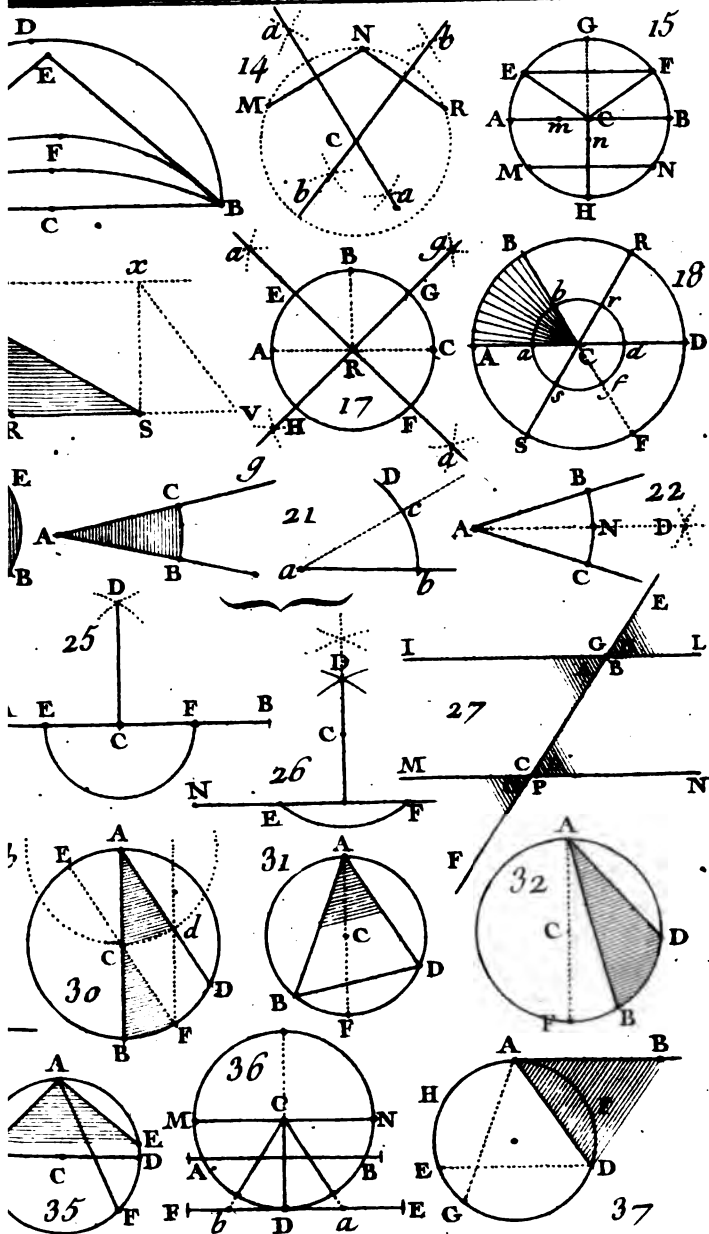
Soit le triangle DAC, dans lequel on connoisse l'angle aigu D & les deux côtés CD & CA. Avec un

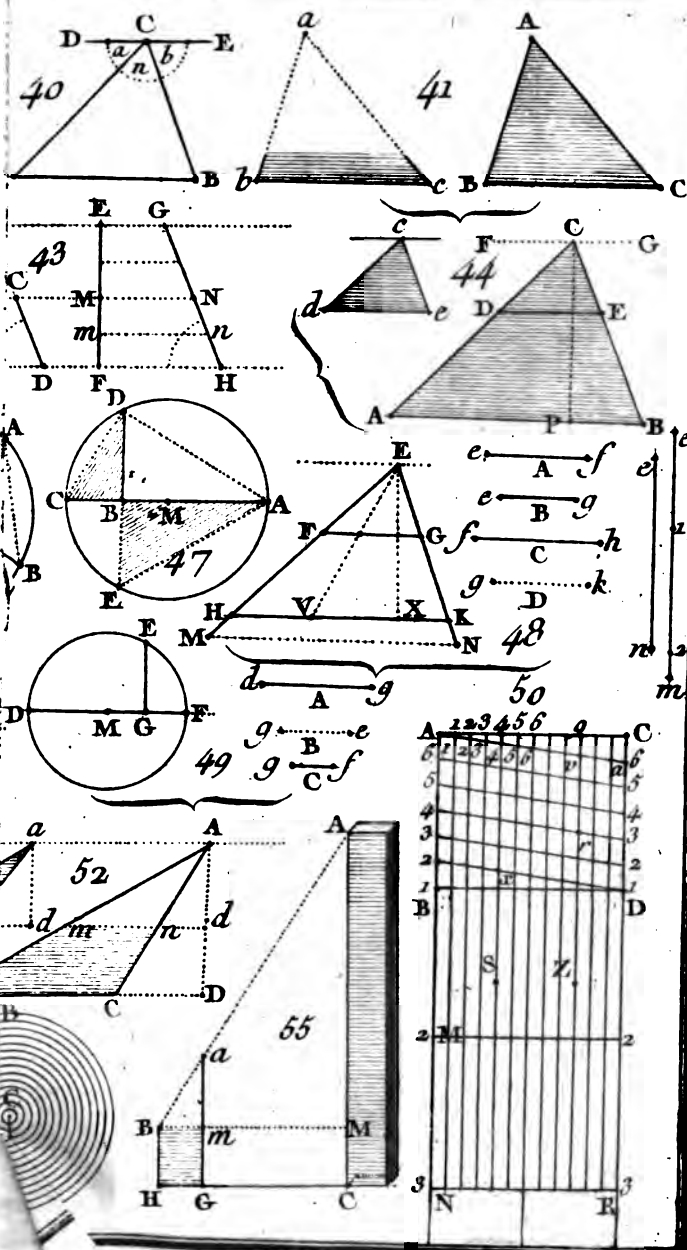
rayon CA décrivez un arc AB : vous aurez un autre triangle DBC, dans lequel le côté CB sera égal au côté CA, mais dans lequel l'angle aigu CBD sera différent de l'angle obtus CAD. Par la méthode de ce problème, vous trouverez indifféremment ou un angle obtus CAD, ou un angle aigu CBD. C'est pour quoi pour trouver ici l'angle inconnu, il faut préalablement savoir *si cet angle est aigu ou obtus*. Si l'angle est aigu, le nombre trouvé répond dans les tables à l'angle lui-même. Si l'angle est obtus, le nombre trouvé répond au supplément de cet angle. Par exemple, soit le côté CD de 10 toises; le côté CA ou CB, de six toises; l'angle D, commun aux deux triangles, de 20 degrés : on aura cette analogie : le sinus connu de l'angle D, est au côté opposé & connu CA ou CB = 6; comme le sinus inconnu de l'angle CAD ou CBD, est au côté opposé & connu CD = 10; ou en chiffres, en négligeant ceux qui suivent le point intercalaire dans les tables, $34202 \cdot 6 :: x \cdot 10$: ce qui donne $x = 57003$, qui répond indifféremment ou à l'angle aigu CBD de 34 degrés 46 minutes, ou à l'angle obtus CAD de 145 degrés 14 minutes.

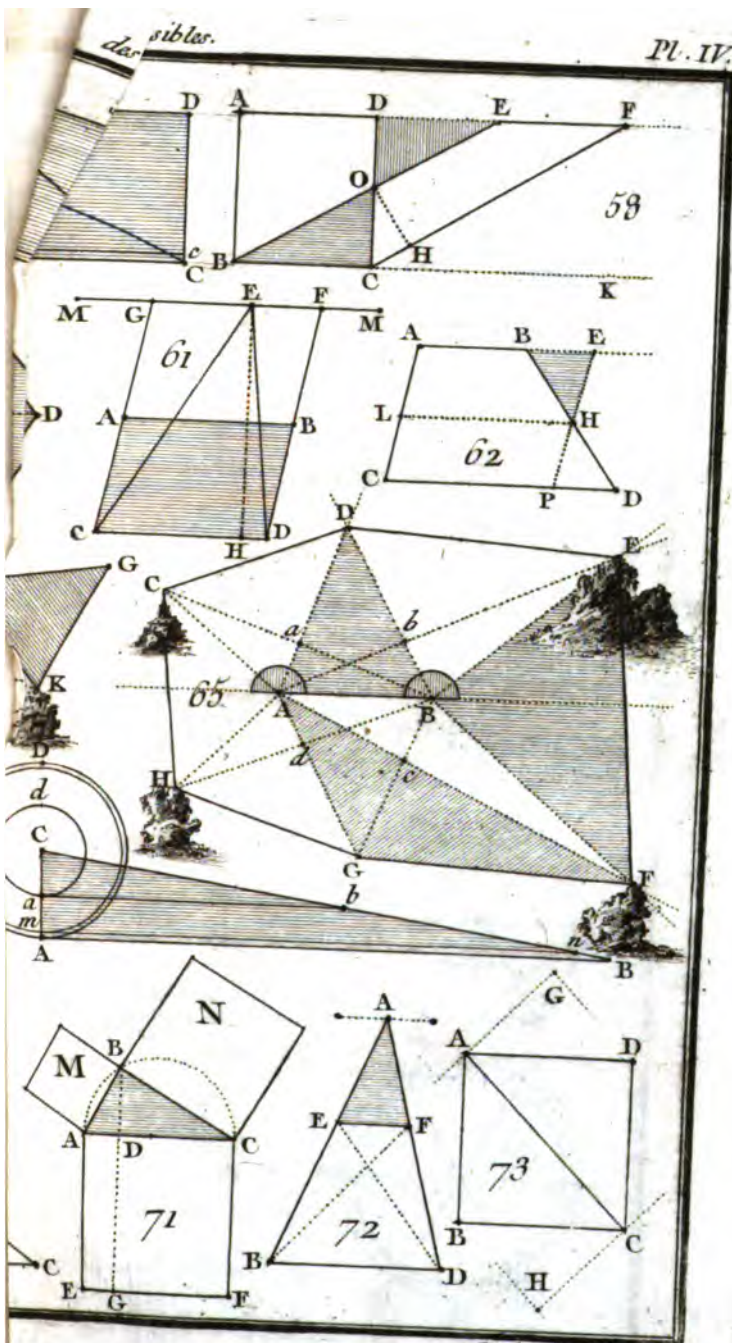
LOGARITHMES. &c.





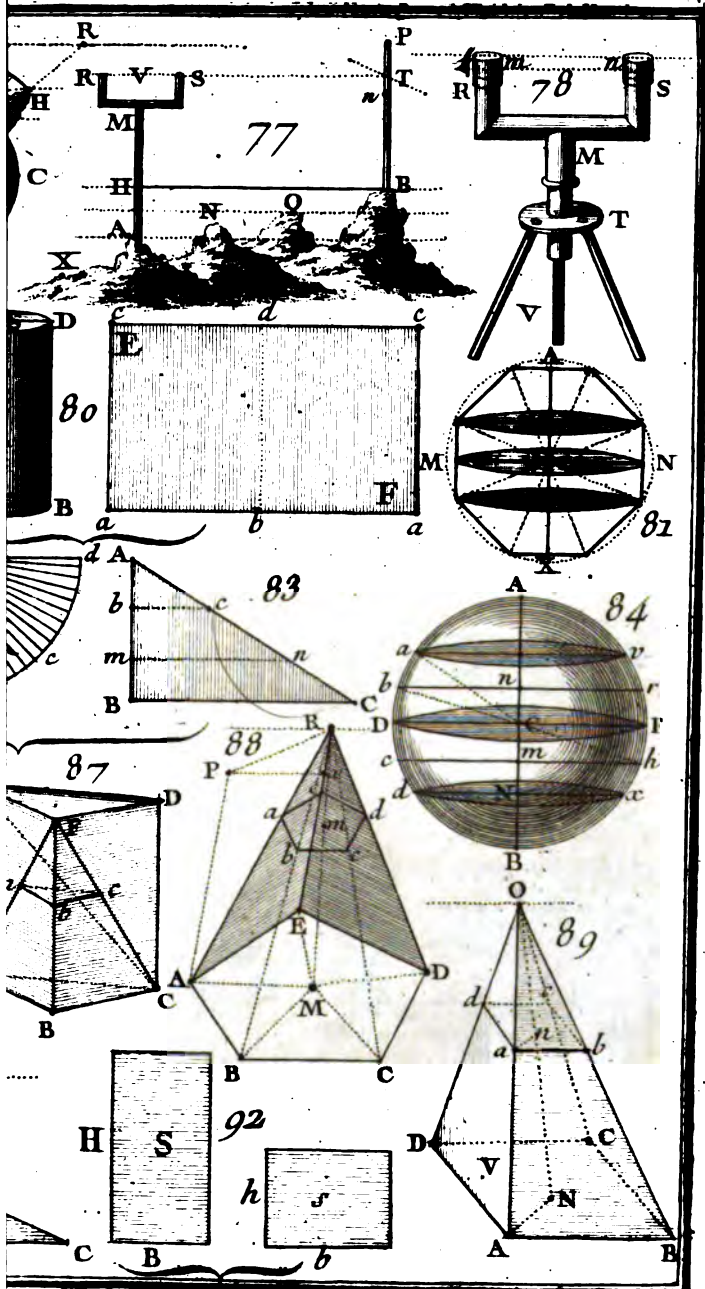


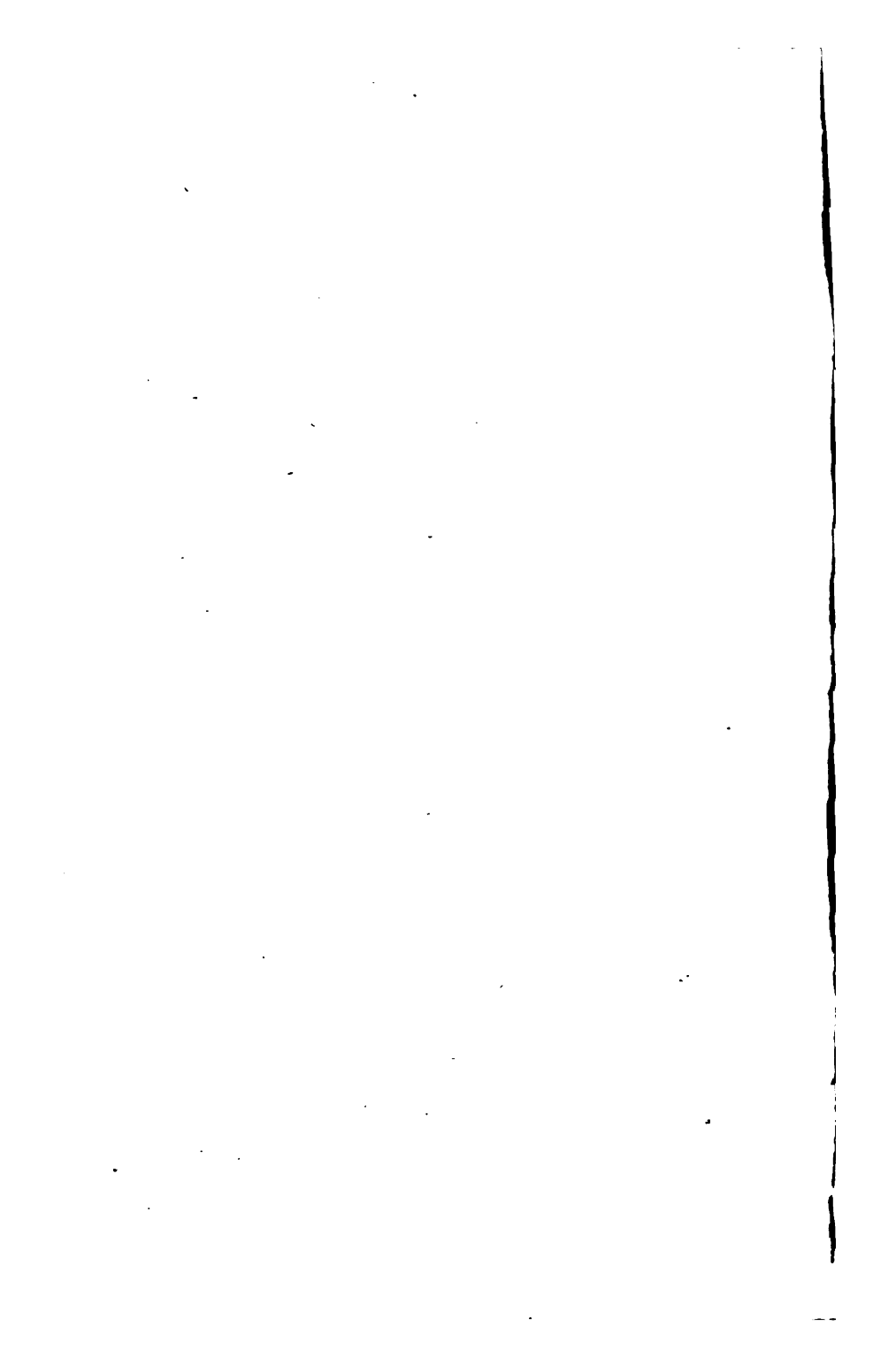


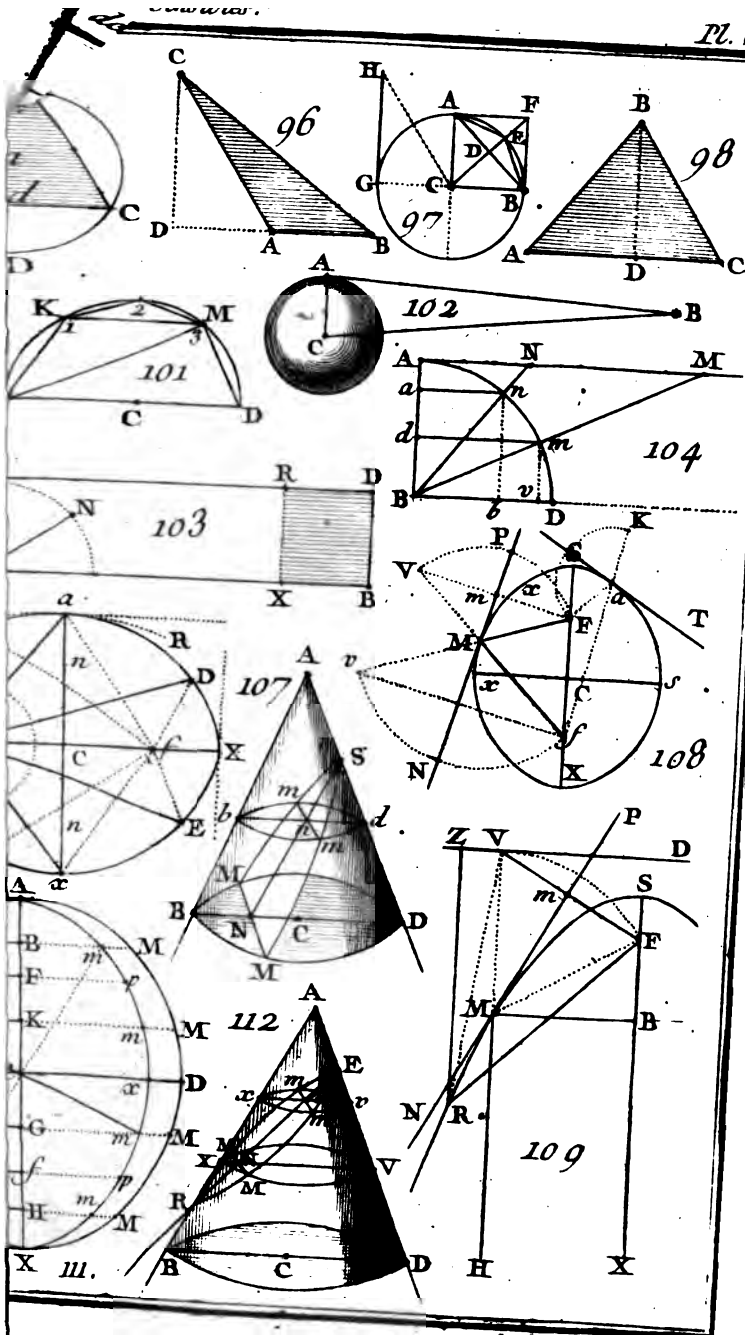


de la Gardette sculp. 4.









de la Gardette Sculp.

(MICH.)

